

切欠きを有する丸棒におけるねじり波の散乱解析

Scattering Analysis of Torsional Wave in a Rod with a Notch

グナワン アリーフ*・廣瀬壮一**

Arief GUNAWAN and Sohichi HIROSE

*学生員 工修 東京工業大学大学院情報理工学研究科情報環境学専攻 (〒152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1)

**正会員 工博 東京工業大学大学院情報理工学研究科情報環境学専攻 (〒152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1)

The scattering analysis of torsional wave in a rod with a notch is carried out by using the mode exciting method. In mode exciting method, a set of torsional wave modes are excited by appropriate boundary conditions given on the virtual edges of the rod. The excited torsional wave modes constitute a system of equations, which can be used to determine the scattering coefficient for each torsional mode. To investigate the ability of torsional wave in detecting and characterizing notch in a rod, 8 types of notches, which differ in the depth and the shape, are analyzed. The scattering coefficients of 0th mode and 1st torsional wave mode incidence are shown for the frequency below the cut-off frequency of 3rd mode. The results show that 0th mode is more sensitive to notch than 1st mode, which is understandable considering the distribution of power as a function of radial position in the rod. The 0th mode is also suitable to the characterization of notch.

Key Words : torsional wave, rod, scattering analysis, mode exciting method

1. はじめに

ガイド波を用いた探傷法は薄板、丸棒やパイプなどのようなウェーブガイドにおける欠陥の非破壊検査法として従来から用いられる手法である。ガイド波は縦波や横波などの実体波に比べて減衰が小さいので、ウェーブガイドの広範囲を検査できる。そのため、探触子を動かす必要のない非常に効率的な非破壊検査が行える。しかし、ガイド波は、複数の波動モードが存在する上、伝播速度が周波数に依存する分散特性を有する。そのため、ガイド波の散乱特性について未知な部分が多く、欠陥の形状や位置、そして使用したガイド波モードによっては検出されにくい欠陥が存在している。ガイド波探傷法を最適な条件下で運用するためには、欠陥との相互作用を含めた波動解析を行う必要がある。

ガイド波の散乱解析に関してはすでにいくつかの研究報告がなされている。その中には特に薄板を伝播する板波についての散乱解析が多く行われている。Rokhlin¹⁾は水平な中心クラックに対する板波の散乱問題を解析手法を用いて解いている。Crane 等²⁾は低い周波数を条件として鉛直なクラックに対する解析的な板波の散乱解析法を導いている。Koshiba 等³⁾、Lowe 等⁴⁾、Al-Nassar 等⁵⁾は有限要素法と板波のモード展開法を結合させ、板波の散乱解析を行っている。また、Cho と Rose⁶⁾⁻⁸⁾は境界要素法と板波のモード展開法を結合させたハイブリッド境界要素法を用いて、板端の反射ならびに表面欠陥に対する散乱解析を行っている。林等⁹⁾は非進行波も考慮してハイブリッド境界要素法の最適化を図って

いる。Gunawan と Hirose¹⁰⁾はモード励振法を開発して板波の散乱解析に適用している。モード励振法では、有限板の両端に適切な境界条件を与えて、有限板の中に板波モードを励振する。この励振された板波モードを用いて、散乱係数を未知数とする連立方程式を立てて、無限長さの板における板波の散乱問題を解く。モード励振法では有限要素法や境界要素法をほかの手法と結合しないから、通常の有限要素法や境界要素法のままで計算できるという利点がある。

一方、丸棒内に伝播するガイド波モードについては研究されている^{8),11),12)}ものの、丸棒内のガイド波の散乱解析についての研究は非常に少ない。丸棒に伝播するガイド波に多くの種類があることや問題が3次元であることなどが、丸棒内のガイド波の散乱解析を困難にしている原因である。本研究では、丸棒内の一般的なガイド波の散乱解析に踏み入れる第一歩として、モード励振法を用いた切欠きによるねじり波の散乱解析を行い、ねじり波を用いた切欠きの検出能力を調べる。

2. ねじり波モード

図-1に示すような、半径 a をもった均質等方線形な弾性丸棒を考える。丸棒の表面は自由面とし、丸棒内は角周波数 ω の時間調和な振動をし、その変位は軸対称かつ円周方向の成分のみをもつとする。このとき、丸棒内に伝播できるねじり波モードの波数 k と角周波数

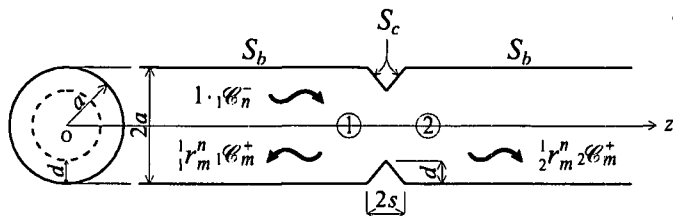


図-1 無限長さの丸棒におけるねじり波の散乱

ω の関係は式 (1) で与えられる^{8),11),12)}。

$$(qa)J_0(qa) - 2J_1(qa) = 0 \quad (1)$$

ここに、 $J_i(\quad)$ は i 次の Bessel 関数、 $q^2 = k_T^2 - k^2$ 、 $k_T = \omega/c_T$ 、 c_T は横波の波速である。図-2 に最初の 6 つのモードの分散曲線を示す。0 次以外のモードにはカットオフ周波数 ω_c が存在する。 $\omega > \omega_c$ のときは k が実数となり、そのモードは進行モードであるが、 $\omega < \omega_c$ のときは k が虚数となり、そのモードは非進行モードである。

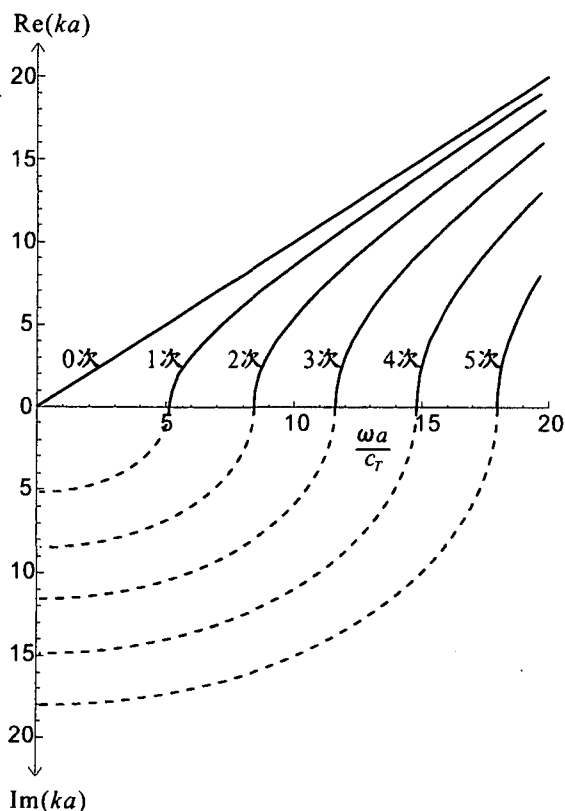


図-2 丸棒におけるねじり波モードの分散曲線

円柱座標系 (r, θ, z) を用いると、0 次モード以外 ($q \neq 0$) の場合、ねじり波モードの変位は式 (2) で表される。

$$u_\theta = A \frac{J_1(qr)}{q} e^{i(kz - \omega t)} \quad (2)$$

0 次モード ($q = 0$) の場合は

$$u_\theta = \frac{1}{2} A r e^{i(kz - \omega t)} \quad (3)$$

となる。ただし、 A は定数である。応力 τ は次式で求められる。

$$\tau = \rho c_T^2 \{ (\nabla u)^T + \nabla u \} \quad (4)$$

ここに、 ρ は密度である。

3. 解くべき問題

図-1 に示すような無限長さの丸棒を考える。丸棒の左側から角周波数 ω で振動する時間調和なある振動モードのねじり波が入射し、丸棒の表面に存在する切欠きによって散乱されるものとする。ただし、切欠きは図-1 に示すように、丸棒表面の一周にわたる開口幅が $2s$ 、深さが d の軸対称な切欠きである。このとき全変位場 u_θ は入射波 u_θ^{in} と散乱波 u_θ^{sc} の和によって表される。この全変位場は丸棒内部 D で運動方程式 (5) および丸棒表面 S_b と切欠きの境界面 S_c 上の境界条件 (6) を満足する。

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + k_T^2 u_\theta \equiv 0 \quad \text{in } D \quad (5)$$

$$t = n \cdot \tau \equiv 0 \quad \text{on } S_b \text{ and } S_c \quad (6)$$

ここに、 n は法線ベクトルである。また、散乱波は次に述べる放射条件を満足しなければならない。すなわち、散乱体は切欠き S_c のみなので、散乱波は切欠きから左右の無限遠に伝播する成分のみからなり、左右の無限遠から切欠きに向かって伝播する波動成分は入射波以外には存在しない。以上のように解くべき問題は、数学的には境界条件 (6) と左右無限遠での放射条件を満足する運動方程式 (5) の解を見つけることに帰着される。

ガイド波を用いた探傷法においては、単位振幅のあるモードの入射波が切欠きに入射したときに、どのようなモードの反射波、透過波がいかなる割合で発生するかが興味の対象となることが多い。ここでは、単位振幅の n 次モードが丸棒①から入射するときに発生する丸棒②内の m 次モードの振幅を ${}^i_j r_m^n$ で表すとする。このとき、図-1 に示される散乱形態は次のように表せる。

$$1 \cdot {}^i C_n^- \rightarrow \sum_{j=1}^2 \sum_{m=1}^{N_j} {}^i_j r_m^n {}^j C_m^+ \quad (i=1) \quad (7)$$

ここに、 N_j は丸棒②のねじり波の進行モードの数、 ${}^i C_n^\pm$ は丸棒①に伝播する n 次ねじり波モード、上付 $-$ と $+$ はそれぞれ入射波と散乱波を示す。そして式 (7) の矢印は、左側の入射波が切欠きによって右側の散乱波に散乱されることを意味する。図-1 に示すように、丸棒①と②はそれぞれ丸棒の左部分と右部分を意味する。こ

The diagram shows a rectangular structure divided into three sections. The left and right sections have a length l and are separated by a central gap of width S_c . The left section contains two channels, labeled 1 and 2, with wave functions α_n, β_m and α_n^-, β_m^+ respectively. The right section contains two channels, labeled 1 and 2, with wave functions α_n, β_m and α_n^-, β_m^+ respectively. The central gap is labeled S_c . The total length of the system is l . The wave functions are represented by wavy lines.

4. モード励振法

さて境界 S_e に与える境界条件について考察する。一般的にウェーブガイド内の任意の弾性波動場はガイド波モードに分解できる^{10), 12)}。有限な丸棒に関する境界値問題の解はもちろん弾性波動場であるので、その解は丸棒に伝播するガイド波モードに分解することができる。さらに境界値問題の軸対称により、 S_e に与える適当な境界条件を軸対称および円周方向成分のみを有するようなものにすれば、境界値問題の解における波動場の変位も軸対称かつ円周方向の成分のみを有することとなる。この場合、丸棒内の波動場はねじり波モードのみに分解することができる。

るので、これらのモードを散乱波とみなせる。その結果、入射波と散乱波の関係は次のように表せる。

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_i} i \alpha_n i \mathcal{C}_n^- \rightarrow \sum_{j=1}^2 \sum_{m=1}^{\mathcal{N}_j} j \beta_m j \mathcal{C}_m^+ \quad (8)$$

散乱係数は以下のように求めることができる。式(7)の両辺に $i\alpha_n$ を掛け、すべてのモードとすべての丸棒に関して足し合わせると、次のようになる。

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^{N_i} i \alpha_n i \mathcal{C}_n^- \rightarrow \sum_{i=1}^2 \sum_{m=1}^{N_j} \sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^{N_i} i \alpha_n j^i r_m^n j \mathcal{C}_m^+ \quad (9)$$

$${}_j\beta_m = \sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_i} i\alpha_n {}_j r_m^n, \quad j = 1, 2, \quad m = 1, \dots, \mathcal{N}_j. \quad (10)$$

ただし、図-1 に示すような左右対称な問題においては、 $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_2$ および $\frac{1}{2}r_m^n = \frac{2}{2}r_m^n$, $\frac{1}{2}r_m^n = \frac{2}{1}r_m^n$ であるので、未知数の数は半分、すなわち $2\mathcal{N}_1^2$ となる。式 (10) の方程式の数は $2\mathcal{N}_1$ 個であるので、 $\mathcal{N}_1$ 個の境界値問題を解けば十分である。

ここではモード励振法を用いた切欠きによるねじり波モードの散乱解析結果を示す。解析対象となる切欠きは図-4に示すような8種類のものである。Type 1~Type 4の順に切欠きが深くなる。そして、Type Aは鋭い切欠き、Type Bは緩やかな切欠きである。

- 295 -

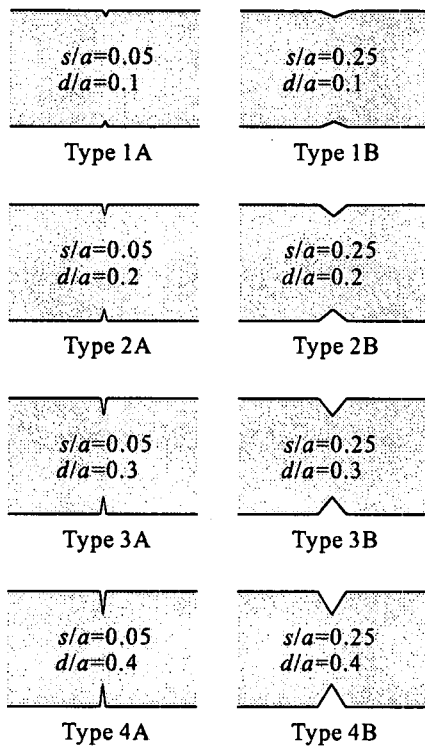


図-4 本研究で扱われる8種類の切欠き

欠きを離さなければならないからである。図-5に4つの周波数における Type 3A の解析結果の誤差を示す。横軸は仮想境界と切欠きとの無次元化した距離 lb 、縦軸は散乱係数 $\frac{1}{2}r_1^1$ から参考値 R をひいた値の絶対値を表す。参考値 R として $lb = 10$ のときの $\frac{1}{2}r_1^1$ を用いた。この図は、 lb が大きくなるにつれて $\frac{1}{2}r_1^1$ は収束することを示している。本研究では $lb = 8$ で十分収束していると判断して、仮想境界と切欠きとの距離 l は $8/b$ とする。

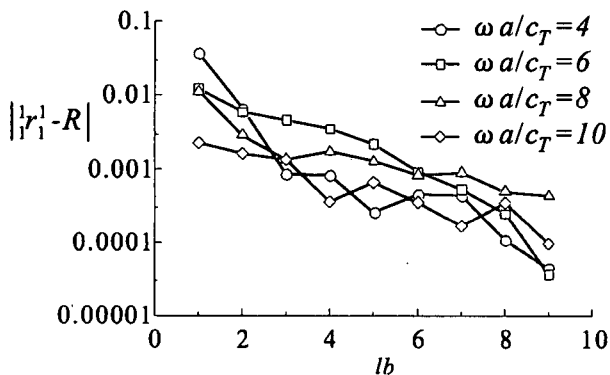


図-5 モード励振法を用いた解析結果の誤差と、仮想境界と切欠きとの距離の関係

左右の仮想境界に与える適当な境界条件として、式(2)に示す進行ねじり波モードの変位分布を用いた。進行ねじり波モードはちょうど N_1 個ある上、互いに独

立し、そして軸対称および円周方向成分のみを有するという条件を満たしているから、簡単に N_1 個の独立な境界条件を作成できる。この境界条件の選び方はあくまでも便宜上だけで、著者等が確認したところでは違う境界条件を使用しても計算結果の散乱係数は等しい。

本研究では境界値問題を解くために境界要素法 (BEM) を用いた。解析モデルは軸対称であるので、解析モデルは3次元から2次元に落とせる。すなわち、変位は半径方向および長さ方向のみの関数と考える。BEMでは2次要素を用い、境界の離散化は次のように行った。境界 S_e と S_c はそれぞれ5分割とし、 S_e^i の各要素の長さは進行モードの中で最も短い波長の $1/5$ とする。

解析結果を図-6～図-21に示す。横軸は無次元化周波数 $\omega a / c_T$ を、縦軸は散乱係数 (複素数) の絶対値 $|i_j r_m^n|$ を表す。図-6～図-13はそれぞれ0次モードが入射するときの Type 1A～Type 4A, Type 1B～Type 4B の切欠きに関する散乱係数を、図-14～図-21はそれぞれ1次モードが入射するときの Type 1A～Type 4A, Type 1B～Type 4B の切欠きに関する散乱係数を表す。この散乱解析は3次モードのカットオフ周波数 ($\omega a / c_T = 11.6$) まで行った。前に述べたように、問題が左右対称であるので、 $\frac{1}{2}r_m^n = \frac{2}{2}r_m^n$, $\frac{1}{2}r_m^n = \frac{2}{2}r_m^n$ となる。図-6～図-21には $\frac{1}{2}r_m^n$ と $\frac{2}{2}r_m^n$ のみを示す。

解析結果の精度は、式(11)で表せるエネルギー保存則¹⁰⁾を用いて検証した。

$$\sum_{j=1}^2 \sum_{m=1}^{N_j} i_j r_m^{n_1} (i_j r_m^{n_2})^* - \delta_{i_1 i_2} \delta_{n_1 n_2} \equiv 0 \quad (11)$$

ここには、 δ_{ij} は $i=j$ のときは1、 $i \neq j$ のときは0であり、*は複素数の共役数である。解析結果の $i_j r_m^n$ の精度は、その $i_j r_m^n$ を式(11)の左辺に代入して得られた残差から評価できる。以下に示す解析結果の式(11)による残差は0.01以内である。

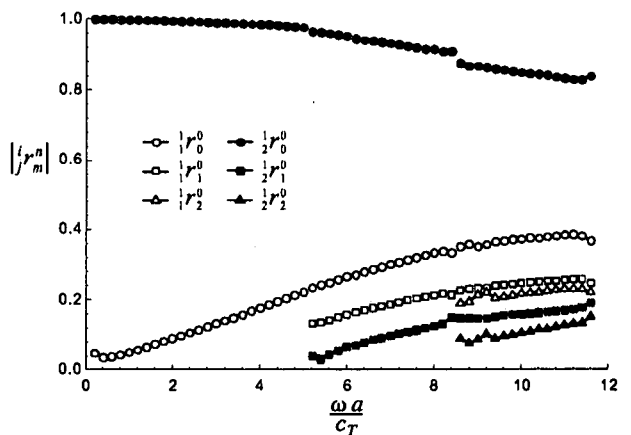


図-6 0次モードが Type 1A の切欠きに入射する場合の散乱係数

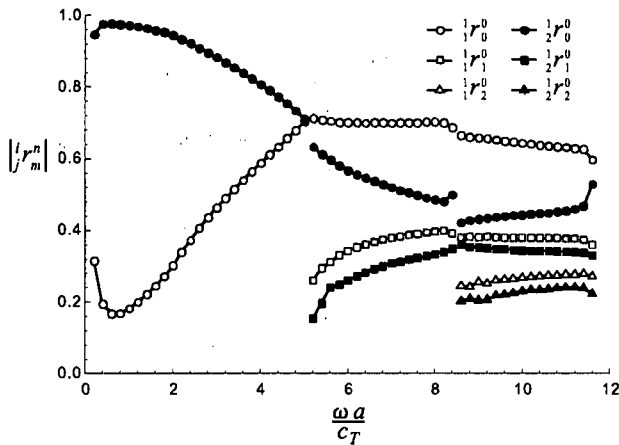


図-7 0次モードが Type 2A の切欠きに入射する場合の散乱係数

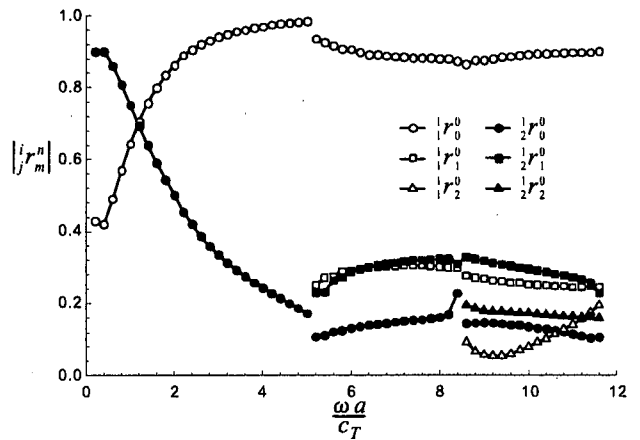


図-9 0次モードが Type 4A の切欠きに入射する場合の散乱係数

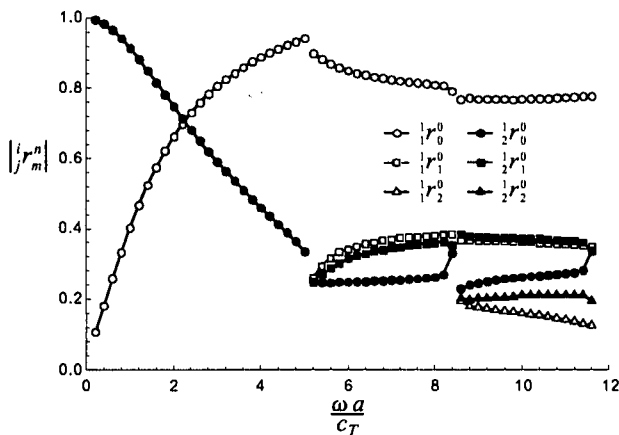


図-8 0次モードが Type 3A の切欠きに入射する場合の散乱係数

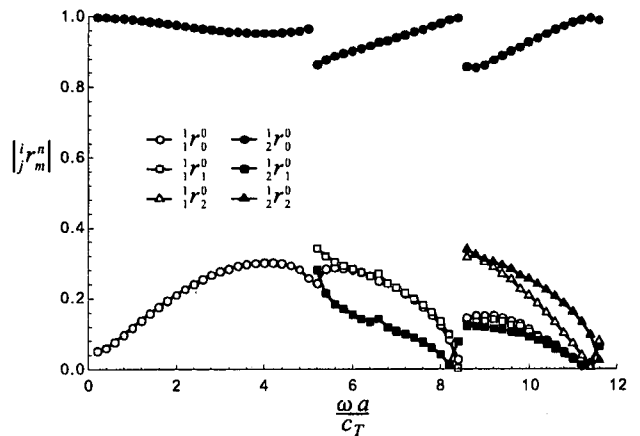


図-10 0次モードが Type 1B の切欠きに入射する場合の散乱係数

まず0次モードが入射する場合の結果を考察する。ガイド波を用いた探傷法では主に入射モードと同じモードの反射波を検出するので、ここでは反射係数 $\frac{1}{2}r_0^0$ に注目する。前にも述べたように Type 1～Type 4 の順に切欠きが深くなる。解析結果では、図-6～図-9 の順に、および図-10～図-13 の順に $\frac{1}{2}r_0^0$ が大きくなるのが分かる。従って、 $\frac{1}{2}r_0^0$ の大小によって、切欠きの深さはある程度推定できる。

さらに Type A と Type B の切欠きに関する $\frac{1}{2}r_0^0$ を比較すると、切欠きの形状によって $\frac{1}{2}r_0^0$ の振る舞いは異なることが分かる。Type A は鋭い切欠き、Type B は緩やかな切欠きである。図-6～図-9 に示すように、鋭い切欠きに対する $\frac{1}{2}r_0^0$ は1次モードのカットオフ周波数 ($\omega a/c_T = 5.13$) まで周波数が大きくなるにつれて増加するが、1次モードのカットオフ周波数以降はほぼ一定となる。それに対して、緩やかな切欠きに対する $\frac{1}{2}r_0^0$ は図-10～図-13 に示すようにそれぞれのモードのカットオフ周波数で局所的に最小値を示す。切欠き

の形状によって反射係数の振る舞いは異なるので、十分に広い周波数範囲でねじり波探傷を行えば、切欠きの形状を特定することが可能である。

次に1次モードが入射する場合の結果を考察する。ここでは反射係数 $\frac{1}{2}r_1^1$ に注目する。Type A (図-14～図-17) の $\frac{1}{2}r_1^1$ と Type B (図-18～図-21) の $\frac{1}{2}r_1^1$ を比較すると、0次モードが入射する場合と同様に切欠きの形状によって、 $\frac{1}{2}r_1^1$ の振る舞いが異なる。しかし、Type 1～Type 4 の $\frac{1}{2}r_1^1$ を比較すると、切欠きの深さによる相違はあまり見られない。それに1次モードが入射する場合の $\frac{1}{2}r_1^1$ は0次モードが入射する場合の $\frac{1}{2}r_0^0$ に比べて非常に小さい。その理由は図-22 を用いて説明することができる。この図は0次モードおよび1次モードにおける丸棒内のパワーの分布 $p(r/a)$ を示す。

$$p(r/a) = \Re \frac{1}{P} \frac{-i\omega}{2} 2\pi \left(\frac{r}{a}\right) \hat{\mathbf{u}}^* \cdot \hat{\mathbf{t}} \quad (12)$$

ここには、 $\hat{\mathbf{u}}$ と $\hat{\mathbf{t}}$ はそれぞれ周波数域におけるモードの変位と丸棒の横断面上の表面力、 $\Re$ は実部、 P は次

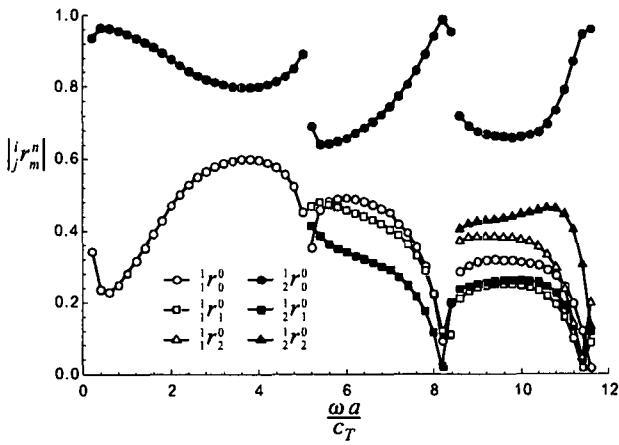


図-11 0次モードが Type 2B の切欠きに入射する場合の散乱係数

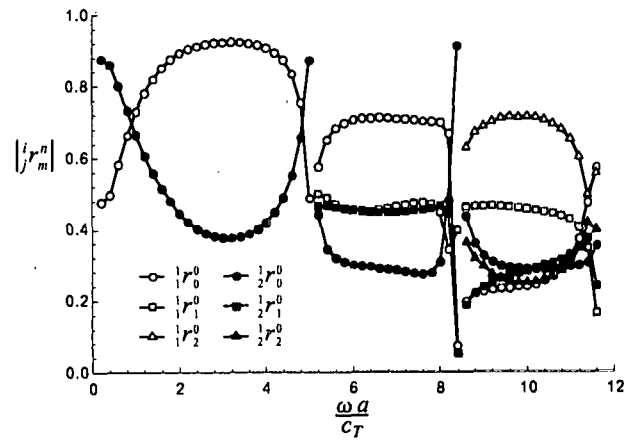


図-13 0次モードが Type 4B の切欠きに入射する場合の散乱係数

式で定義される全断面のパワーである。

$$P = \Re \int_0^1 \frac{-i\omega}{2} \left(2\pi \frac{r}{a} \right) \tilde{\mathbf{u}}^* \cdot \tilde{\mathbf{t}} \frac{dr}{a} \quad (13)$$

図-22 より明らかに、0 次モードのパワーは主に丸棒の表面に集中しているに対し、1 次モードのパワーは $r/a \approx 0.4$ に集中している。そのため、表面近傍の切欠きによって遮断されたパワーの量も 1 次モードより 0 次モードの方が多い。遮断されたパワーと全パワーの比 $\int_{1-d/a}^1 p(r/a)(dr/a)$ を具体的に計算すると、表-1 となる。切欠き深さ $d/a = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ に対しては、0 次モードの場合はそれぞれ 34.3%, 59.0%, 76.0%, 87.0% と比較的大きいが、1 次モードの場合はそれぞれ 15.8%, 21.4%, 21.9%, 26.9% しかない。このように、0 次モードが入射する場合は 1 次モードの場合より反射係数が大きいことが裏づけられた。さらに 1 次モードの場合は $d/a = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ の切欠きに遮断されたパワーの量の差は小さいので、切欠きの深さによる反射係数の変化が見られないのは当然である。

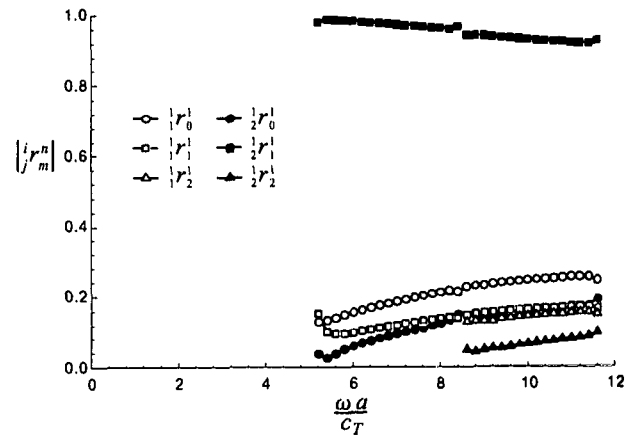


図-14 1次モードが Type 1A の切欠きに入射する場合の散乱係数

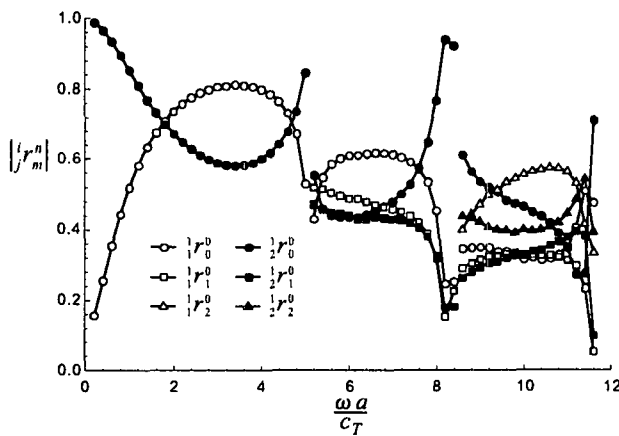


図-12 0次モードが Type 3B の切欠きに入射する場合の散乱係数

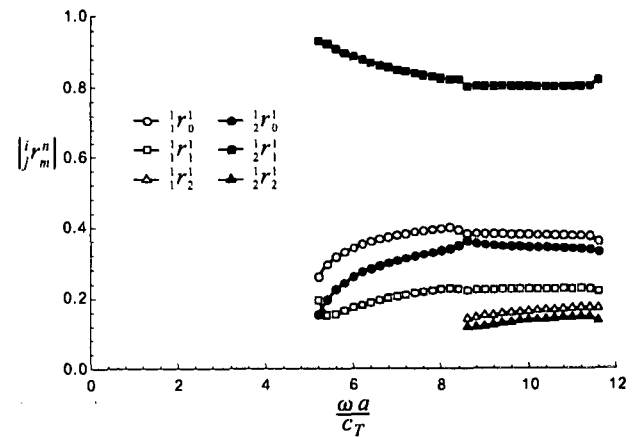


図-15 1次モードが Type 2A の切欠きに入射する場合の散乱係数

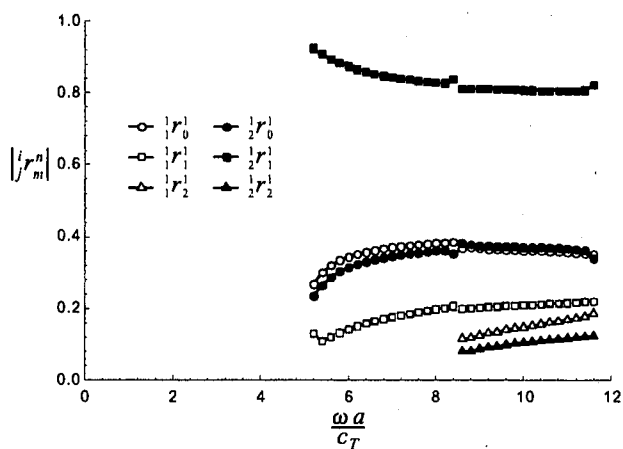


図-16 1次モードが Type 3A の切欠きに入射する場合の散乱係数

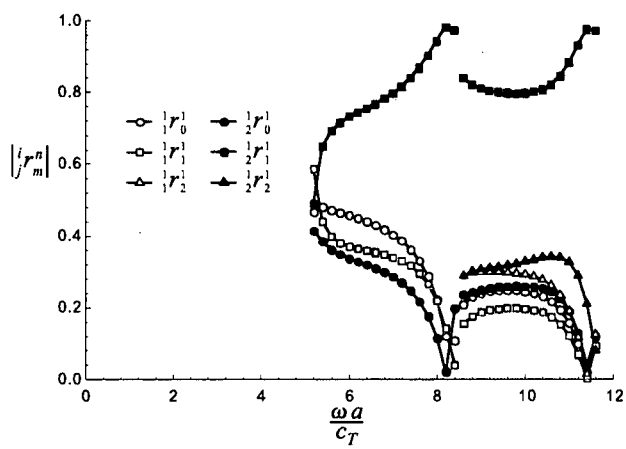


図-19 1次モードが Type 2B の切欠きに入射する場合の散乱係数

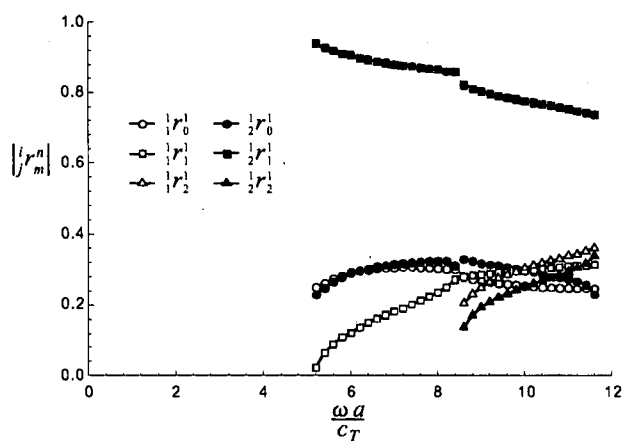


図-17 1次モードが Type 4A の切欠きに入射する場合の散乱係数

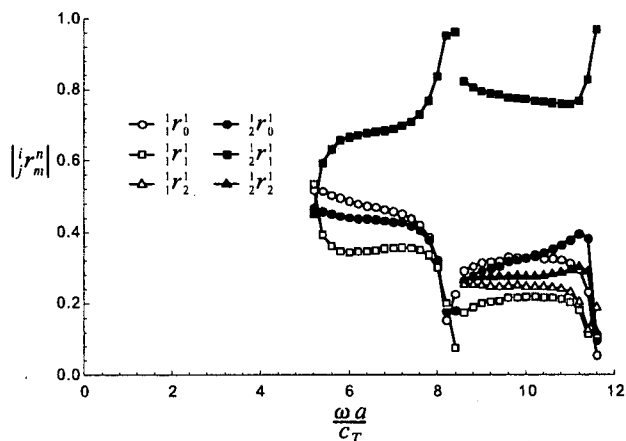


図-20 1次モードが Type 3B の切欠きに入射する場合の散乱係数

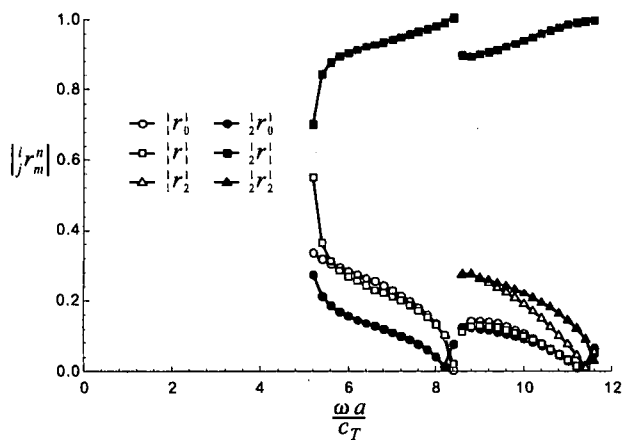


図-18 1次モードが Type 1B の切欠きに入射する場合の散乱係数

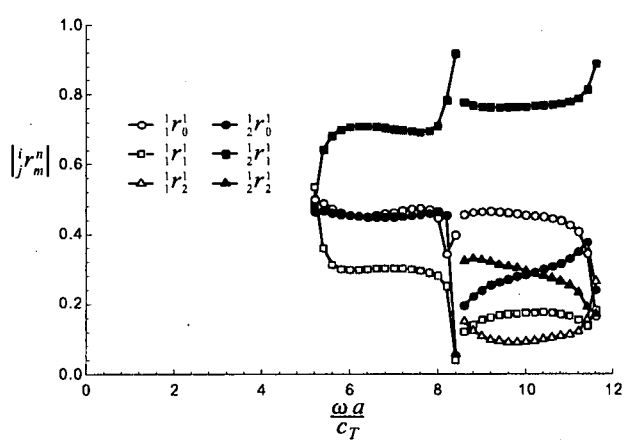


図-21 1次モードが Type 4B の切欠きに入射する場合の散乱係数

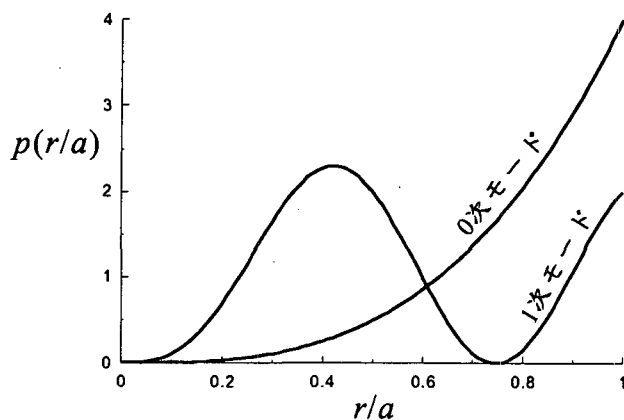


図-22 丸棒内の半径方向における0次モードおよび1次モードのパワーの分布

表-1 切欠きに遮断されたパワーと全パワーとの比

切欠きの深さ	0次モード	1次モード
$d/a = 0.1$	0.343	0.158
$d/a = 0.2$	0.590	0.214
$d/a = 0.3$	0.760	0.219
$d/a = 0.4$	0.870	0.269

6. まとめ

本研究では、モード励振法を用いて丸棒の切欠きによるねじり波の散乱解析を行った。解析結果により、切欠きを検出するには、1次モードより0次モードの方が適切である。そして十分に広い周波数範囲でねじり波探傷を行えば、切欠きの深さや鋭さも特定することが可能である。本研究で扱った切欠きは軸対称に限られるが、今後、モード励振法をより一般的な欠陥やパイプの問題などの様々なウェーブガイドの問題に拡張する予定である。

参考文献

- 1) S. Rokhlin, Diffraction of Lamb waves by a finite crack in an elastic layer, *J. Acous. Soc. Am.* 67, pp.1157-1165, 1980.
- 2) L. J. Crane, M. D. Gilchrist, and J. J. H. Miller, Analysis of Rayleigh-Lamb wave scattering by a crack in an elastic plate, *Computational Mech.* 19, pp.533-537, 1997.
- 3) M. Koshihara, S. Karakida, and M. Suzuki, Finite-element analysis of Lamb waves scattering in an elastic plate waveguide, *IEEE Trans. Son. and Ultrasonics* 31, pp.18-25, 1984.

- 4) M. J. S. Lowe, R. E. Challis, and C. W. Chan, The transmission of Lamb waves across adhesively bonded lap joints, *J. Acous. Soc. Am.* 107, pp.1333-1345, 2000.
- 5) Y. N. Al-Nassar, S. K. Datta, and A. H. Shah, Scattering of Lamb waves by a normal rectangular strip weldment, *Ultrasonics* 29, pp. 125-132, 1991.
- 6) Y. H. Cho and J. L. Rose, A boundary element solution for a mode conversion study on the edge reflection of Lamb waves, *J. Acous. Soc. Am.* 99, pp.2097-2109, 1996.
- 7) Y. H. Cho and J. L. Rose, Lamb wave scattering analysis for reflector characterization, *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelect. Freq. Contr.* 44, pp.44-52, 1997.
- 8) J. L. Rose, *Ultrasonic Waves in Solid Media*, Cambridge Univ. Press, 1999.
- 9) 林高弘, 琵琶志朗, J. C. Choi, 遠藤茂寿, ハイブリッド境界要素法を用いた大領域ラム波シミュレーション, 日本機械学会論文集 (A 編)65 巻,630 号, pp.10-17, 1999-2.
- 10) A. Gunawan and S. Hirose, Mode exciting method for Lamb wave scattering analysis, *J. Acous. Soc. Am.*, (submitted to be published).
- 11) J. D. Achenbach, *Wave Propagation in Elastic Solids*, North-Holland, Amsterdam, 1973.
- 12) B. A. Auld, *Acoustic Fields and Waves in Solids*, John Wiley and Sons, New York, 1973.

付録 I モード分解法

ここではガイド波モードの直交性を利用したモード分解法を説明する。境界値問題の解として変位 $\tilde{u}e^{-i\omega t}$ と応力 $\tilde{\tau}e^{-i\omega t}$ をもつ弾性波動場から、複数の進行モードと非進行モードに分解できるとする。このとき、進行モード $\mathcal{G}_n^\pm$ の振幅 $A_n^\pm$ は式 (I.1) で求められる。ただし、 $\mathcal{G}_n^\pm$ はパワーによる正規化が施されて、その変位と応力はそれぞれ $\tilde{u}e^{-i\omega t}$ と $\tilde{\sigma}e^{-i\omega t}$ とする。

$$A_n^\pm = \frac{i\omega}{4P} \int_A (\tilde{u}_i \tilde{\sigma}_{zi}^* - \tilde{v}_i^* \tilde{\tau}_{zi}) dA \quad (\text{I.1})$$

ただし、

$$P = \frac{i\omega}{4} \int_A (\tilde{v}_i \tilde{\sigma}_{zi}^* - \tilde{v}_i^* \tilde{\sigma}_{zi}) dA,$$

A はウェーブガイドの横断面、 z 方向はウェーブガイドの長さ方向である。非進行モードを含めた一般化されたモード分解法について Gunawan と Hirose による文献¹⁰⁾に参照されたい。

(2003 年 4 月 18 日 受付)