

安定化気泡関数有限要素法を用いた 非圧縮粘性流れにおける形状同定解析

IDENTIFICATION ANALYSIS FOR INCOMPRESSIBLE VISCOUS FLOW
USING STABILIZED BUBBLE FUNCTION FINITE ELEMENT METHOD

松本純一*

Junichi MATSUMOTO

*正会員 工博 産業技術総合研究所 計算科学研究部門, PRESTO, JST (〒 305-8568 つくば市梅園 1-1-1 中央第二)

Numerical solutions for shape identification of flow past a circular cylinder are treated in this paper. The Sakawa-Shindo method is employed as a minimization algorithm. Thus, unified computational approach to the simulation of flow and the shape identification is presented. As a numerical approach to spatial discretization, mixed interpolations by the stabilized bubble function and linear elements are applied for velocity and pressure.

Key Words : Identification Analysis, Incompressible Viscous Flow, Stabilized Bubble Function Finite Element Method

1. 緒言

近年, コンピュータの急速な発達および並列計算の普及により, 非圧縮 Navier-Stokes 方程式を用いた大規模な 3 次元計算が行われている。また, 数値解析の応用問題として流体問題の計算において逆解析理論を用いた定常 Stokes 方程式の形状最適化問題の解析¹⁾²⁾³⁾⁴⁾⁵⁾⁶⁾, 低レイノルズ数における定常 Navier-Stokes 方程式の形状最適化問題の解析⁷⁾⁸⁾が行われている。本研究では, その応用問題として, 非圧縮 Navier-Stokes 方程式における形状同定解析を行うものである。制御・同定などの逆問題を扱う場合には, その制御・同定量を求めるために, 対象としている流れ場の状態方程式に対する随伴方程式を導き, 状態方程式, 随伴方程式をそれぞれ解いていかなければならない。さらに, これらの未知量をもとに最小化手法を適用して制御・同定量を反復計算により求めなければならない。以上の計算は, 通常の計算 (順解析) に比べて非常に定式化が複雑になる⁹⁾。このことから, 状態方程式, 随伴方程式の定式化として, できるだけ簡便な安定化手法をとるとう離散化が有効となる。本研究では, これらの問題に対して従来提案されている解析手法に比べ計算を安定にかつ高精度に行い, 極めて簡便に安定化手法の定式化を行うことのできる安定化気泡関数有限要素法⁹⁾¹⁰⁾¹¹⁾を適用し, 非圧縮 Navier-Stokes 方程式における評価関数に流体力を用いた形状同定解析を行うものである。

検証の問題として, 円柱周りの計算を取り上げ, レイノルズ数 0.1 (Stokes 流れとなる領域), 20 (カルマン渦の発生しない領域), 250 (カルマン渦が発生する領域) の 3 ケースの抗力の同定形状解析を行っている。

2. 基礎方程式

非圧縮粘性流れにおける基礎方程式は以下の運動方程式と連続式によって表される。

$$\dot{u}_i + u_j u_{i,j} + p_{,i} - \nu (u_{i,j} + u_{j,i})_{,j} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$u_{i,i} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

ここで, u_i , p は流速, 圧力, また $\nu = 1/Re$ であり, Re はレイノルズ数である。境界 Γ は Γ_1 と Γ_2 に分けられ, 以下の境界条件が規定される。

$$u_i = \hat{u}_i \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (3)$$

$$\{-p \delta_{ij} + \nu (u_{i,j} + u_{j,i})\} \cdot n_j = t_i \quad \text{on } \Gamma_2 \quad (4)$$

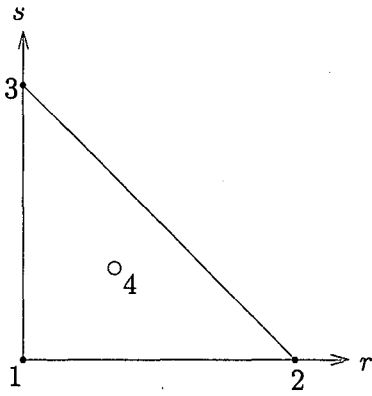
ここで, δ_{ij} はクロネッカーのデルタ関数, n_j は境界 Γ_2 の外向き法線ベクトルである。

3. 安定化気泡関数要素を用いた定式化

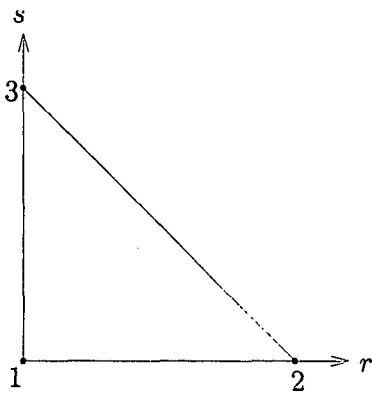
3.1 MINI 要素

本研究では, 流体の基礎方程式における空間方向の定式化として, 混合補間を用いる。ここで, 混合補間

の組み合わせとして MINI 要素¹⁰⁾は混合補間を用いた手法の中で最も自由度が少なく、かつ定式化が極めて容易に行える要素である。また、計算を安定にかつ高精度に行うための安定化項の考慮が SUPG/PSPG 法¹²⁾、BTD 法¹³⁾などの安定化手法に比べて非常に簡単に行える。さらに、混合補間の要素の選択として、流速に高次の要素を用いる場合には、質量行列を集中化することは不可能であるが、MINI 要素は質量行列の集中化が可能である。したがって、流速に高次要素を用いる他の混合補間に比べて、極めて計算効率がよい手法であると考えられる。上記理由により、混合補間の組み合わせとして、MINI 要素を用いるものとする。すなわち、要素の選択として、流速に関しては気泡関数要素を圧力に関しては 1 次要素を補間関数に用いる (図-1 参照)。



(a) 気泡関数要素



(b) 1 次要素

図-1 MINI 要素

3.2 線形型気泡関数

本研究では、図-2 に示すように三角形の要素領域をその重心点を用いて 3 つの小三角形 w_i に分割する線形型気泡関数を用いる。線形型気泡関数はこの小三角

形毎にアイソパラメトリック座標系 $\{r, s\}$ を用いて次のように定義される。

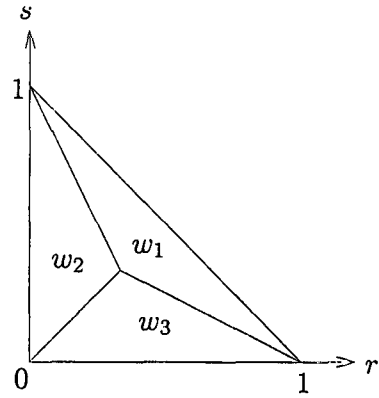


図-2 要素領域

$$\phi_B = \begin{cases} 3(1-r-s) & \text{in } w_1 \\ 3r & \text{in } w_2 \\ 3s & \text{in } w_3 \end{cases} \quad (5)$$

3.3 有限要素方程式

Petrov-Galerkin 法により有限要素近似を行う。安定化気泡関数要素を用いた有限要素近似では、次の 1 次要素の有限要素空間 $\bar{V}_i^h, Q^h$ と気泡関数の空間 $V_i^{h'}, \hat{V}_i^{h'}$ を用いる。

$$\bar{V}_i^h = \{\bar{v}_i^h \in (C_0^0(\Omega))^2, \bar{v}_i^h|_{\Omega_k} \in (P1(\Omega_k))^2\} \quad (6)$$

$$V_i^{h'} = \{v_i^{h'} \in (C_0^0(\Omega))^2, v_i^{h'}|_{\Omega_k} \in \phi_B v'_{Bi}, v'_{Bi} \in \mathbf{R}^2\} \quad (7)$$

$$\hat{V}_i^{h'} = \{\hat{v}_i^{h'} \in (C_0^0(\Omega))^2, \hat{v}_i^{h'}|_{\Omega_k} \in \varphi_B v'_{Bi}, v'_{Bi} \in \mathbf{R}^2\} \quad (8)$$

$$Q^h = \{q^h \in C_0^0(\Omega), q^h|_{\Omega_k} \in P1(\Omega_k), \int_{\Omega} q^h d\Omega = 0\} \quad (9)$$

ここで、 $\phi_B, \{\varphi_B; \langle \varphi_B, 1 \rangle_{\Omega_k} = 0\}$ は要素領域 Ω_k をコンパクトな台とする気泡関数、安定化気泡関数であり、 $V_i^{h'}, \hat{V}_i^{h'}$ は気泡関数による近似空間に対応している。有限要素空間として速度場に対して $V_i^h = \bar{V}_i^h \oplus V_i^{h'}$ を圧力場に対して Q^h を用いることにより、有限要素近似解 $(u_i^h, p^h) \in V_i^h \times Q^h$ を見いだす次の近似問題が得られる。

$$\langle u_i^h, \hat{v}_i^h \rangle + \langle u_j^h u_{i,j}^h, \hat{v}_i^h \rangle + \langle p_i^h, \hat{v}_i^h \rangle$$

$$-\langle \nu(u_{i,j}^h + u_{j,i}^h)_{,j}, \hat{v}_i^h \rangle = 0 \quad \forall \hat{v}_i^h \in \hat{V}_i^h \quad (10)$$

$$\langle u_{i,i}^h, q^h \rangle = 0 \quad \forall q^h \in Q^h \quad (11)$$

ここで、 $\langle u, v \rangle = \sum_{k=1}^{N_k} \langle u, v \rangle_{\Omega_k} = \sum_{k=1}^{N_k} \int_{\Omega_k} uv \, d\Omega$ であり、 N_k は要素数である。流速場に対して V_i^h に属する近似解 u_i^h と $\hat{v}_i^h = V_i^h \oplus \hat{V}_i^{h'}$ に属する重み関数 $\hat{v}_i^h$ は 1 次要素による補間関数の近似空間の元 $\bar{u}_i^h, \bar{v}_i^h \in \bar{V}_i^h$ および気泡関数による近似空間の元 $u_i^{h'}, v_i^{h'} \in V_i^{h'}$, $\hat{v}_i^{h'} \in \hat{V}_i^{h'}$ を用いて次のように表現できる。

$$u_i^h = \bar{u}_i^h + u_i^{h'}, \quad \hat{v}_i^h = \bar{v}_i^h + v_i^{h'} + \hat{v}_i^{h'} = v_i^h + \hat{v}_i^{h'} \quad (12)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \bar{u}_i^h, \bar{v}_i^h &\in \bar{V}_i^h, \quad u_i^{h'} = \sum_{k=1}^{N_k} \phi_B u_{Bi}' \in V_i^{h'} \\ v_i^{h'} &= \sum_{k=1}^{N_k} \phi_B v_{Bi}' \in V_i^{h'}, \quad \hat{v}_i^{h'} = \sum_{k=1}^{N_k} \varphi_B v_{Bi}' \in \hat{V}_i^{h'} \end{aligned} \quad (13)$$

である。安定化気泡関数要素を適用した有限要素方程式は、以下のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} &\langle \dot{u}_i^h, v_i^h \rangle + \langle u_j^h u_{i,j}^h, v_i^h \rangle \\ &+ \langle p_i^h, v_i^h \rangle - \langle \nu(u_{i,j}^h + u_{j,i}^h)_{,j}, v_i^h \rangle \\ &+ \sum_{k=1}^{N_k} \langle \nu'_{ij}(u_{i,j}^{h'} + u_{j,i}^{h'}), v_{i,j}^{h'} \rangle_{\Omega_k} \\ &= 0 \quad \forall v_i^h \in V_i^h \end{aligned} \quad (14)$$

$$\langle u_{i,i}^h, q^h \rangle = 0 \quad \forall q^h \in Q^h \quad (15)$$

$$\nu'_{ij} := \frac{\langle \dot{u}_i^h + u_j^h u_{i,j}^h + p_i^h - \nu(u_{i,j}^h + u_{j,i}^h)_{,j}, \varphi_B \rangle_{\Omega_k}}{\langle (u_{i,j}^{h'} + u_{j,i}^{h'}), \phi_{B,j} \rangle_{\Omega_k}}$$

式 (14) の $\sum_{k=1}^{N_k} \langle \nu'_{ij}(u_{i,j}^{h'} + u_{j,i}^{h'}), v_{i,j}^{h'} \rangle_{\Omega_k}$ は安定化気泡関数による安定化作用を制御する項である。有限要素方程式 (14),(15) の弱形式を適用した有限要素方程式は式 (16),(17) のように表すことができる。

$$\langle \dot{u}_i^h, v_i^h \rangle + \langle u_j^h u_{i,j}^h, v_i^h \rangle - \langle p_i^h, v_{i,i}^h \rangle$$

$$\begin{aligned} &+ \langle \nu(\bar{u}_{i,j}^h + \bar{u}_{j,i}^h), v_{i,j}^h \rangle + \langle \nu(u_{i,j}^{h'} + u_{j,i}^{h'}), v_{i,j}^h \rangle \\ &+ \sum_{k=1}^{N_k} \langle \nu'_{ij}(u_{i,j}^{h'} + u_{j,i}^{h'}), v_{i,j}^{h'} \rangle_{\Omega_k} \\ &= \langle t_i, v_i^h \rangle_{\Gamma} \quad \forall v_i^h \in V_i^h \end{aligned} \quad (16)$$

$$\langle u_{i,i}^h, q^h \rangle = 0 \quad \forall q^h \in Q^h \quad (17)$$

また、以下のような関係式が成り立つ。

$$\langle \bar{u}_{i,j}^h, v_{i,j}^{h'} \rangle = 0, \quad \langle u_{i,j}^{h'}, \bar{v}_{i,j}^h \rangle = 0 \quad (18)$$

$$\langle \bar{u}_{j,i}^h, v_{i,j}^{h'} \rangle = 0, \quad \langle u_{j,i}^{h'}, \bar{v}_{i,j}^h \rangle = 0 \quad (19)$$

式 (18),(19) を式 (16) に代入することにより、有限要素方程式 (16),(17) は、次のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} &\langle \dot{u}_i^h, v_i^h \rangle + \langle u_j^h u_{i,j}^h, v_i^h \rangle - \langle p_i^h, v_{i,i}^h \rangle \\ &+ \langle \nu(\bar{u}_{i,j}^h + \bar{u}_{j,i}^h), \bar{v}_{i,j}^h \rangle \\ &+ \sum_{k=1}^{N_k} \langle (\nu + \nu'_{ij})(u_{i,j}^{h'} + u_{j,i}^{h'}), v_{i,j}^{h'} \rangle_{\Omega_k} \\ &= \langle t_i, v_i^h \rangle_{\Gamma} \quad \forall v_i^h \in V_i^h \end{aligned} \quad (20)$$

$$\langle u_{i,i}^h, q^h \rangle = 0 \quad \forall q^h \in Q^h \quad (21)$$

ここで、

$$\langle (\nu + \nu'_{ij})(u_{i,j}^{h'} + u_{j,i}^{h'}), v_{i,j}^{h'} \rangle_{\Omega_k} = \frac{\langle \phi_B, 1 \rangle_{\Omega_k}^2}{A_k} \tau_{eS}^{-1} u_{Bi}' v_{Bi}' \quad (22)$$

$$\tau_{eS} = \left[\left(\frac{2|u_i|}{h_k} \right)^2 + \left(\frac{4\nu}{h_k^2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

h_k : 各要素の代表長さ, A_k : 各要素の面積

である。一般的に、非圧縮 Navier-Stokes 方程式などの移流拡散方程式系の方程式は、その計算を安定にかつ高精度に行うために安定化項の考慮が必要である。式 (20),(21) をみるとこの安定化項は式 (20) の左辺第 5 項の重心点の項のみである。これは、計算を安定にかつ高精度に行うための安定化項の考慮を行う手法である SUPG/PSPG 法¹²⁾, BTDD 法¹³⁾などの安定化項に比べてその数が極端に少なくかつ、非常にその項が簡単なものである。また、安定化気泡関数法は気泡関数の形状は固定して、その代わりに安定化気泡関数を導入し、式 (22) によって安定化の適切な作用を制御するのみで良いので、気泡関数の形状を変化させて精度の向上を図る気泡関数の方法¹⁴⁾¹⁵⁾¹⁶⁾と比較しても定式化が簡便になる。

4. 形状同定解析

4.1 評価関数

有限要素方程式 (20),(21) を、以下のように書き表す。

$$v_i^T (\bar{M} \dot{u}_i + S(\bar{u}_j) u_i - Bp - M_{\Gamma} t_i) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (23)$$

$$q^T (B^T u_i) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (24)$$

$$u_{i(t_0)} = \hat{u}_{i0} \quad \text{on } \Omega \quad (25)$$

ここで、 $\bar{M}$ は集中質量行列、 $S(\bar{u}_j)$ は移流項（移流速度 $\bar{u}_j$ は要素内 3 点平均値）と粘性項の行列、 B は勾

配行列, $M_{\Gamma} t_i$ は境界積分の項である. 本研究で定義される形状同定とは, 以下に示すような, 流体力を用いた評価関数を最小にする最適移動量を決定する問題である.

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (e_{\Gamma_B}^T M_{\Gamma} t_i - D_i)^T Q_i (e_{\Gamma_B}^T M_{\Gamma} t_i - D_i) dt \quad (26)$$

ここで,

$$e_{\Gamma_B}^T M_{\Gamma} t_i = - \int_{\Gamma_B} t_i d\Gamma \quad (27)$$

$$e_{\Gamma_B}^T = [0, 0, 0, 1, 1, 1, \dots, 0, 0, 0]$$

である. $e_{\Gamma_B}^T M_{\Gamma} t_i$ および D_i は, 物体表面上における流体力の計算値と目的値を表す. $e_{\Gamma_B}^T$ ベクトル成分は, 境界上の節点において対象とする物体 B 上の節点では 1, その他の部分では 0 とする.

4.2 随伴方程式

有限要素方程式を考慮して, 評価関数 J を以下のように拡張する.

$$J^* = J + \int_{t_0}^{t_f} \lambda_{u_i}^T (-S(\bar{u}_j) u_i + Bp + M_{\Gamma} t_i - \bar{M} \dot{u}_i) dt + \int_{t_0}^{t_f} \lambda_p^T (B^T u_i) dt = \int_{t_0}^{t_f} \{H - \lambda_{u_i}^T (\bar{M} \dot{u}_i)\} dt \quad (28)$$

ここで,

$$H = \frac{1}{2} (e_{\Gamma_B}^T M_{\Gamma} t_i - D_i)^T Q_i (e_{\Gamma_B}^T M_{\Gamma} t_i - D_i) + \lambda_{u_i}^T (-S(\bar{u}_j) u_i + Bp + M_{\Gamma} t_i) + \lambda_p^T (B^T u_i) \quad (29)$$

である. λ_{u_i} , λ_p はそれぞれ流速, 圧力に対するラグランジュ乗数を表す. すなわち, 拡張された評価関数 J^* において拘束条件として有限要素方程式を満足し, かつ評価関数 J が全時間で最小化されることになる最適移動量 x_j を求めることになる. 次式のように J^* の第一変分をとり,

$$\begin{aligned} \delta J^* = & \delta \lambda_{u_i}^T(t_0) \bar{M} u_i(t_0) + \lambda_{u_i}^T(t_0) \delta \bar{M} u_i(t_0) \\ & + \lambda_{u_i}^T(t_0) \bar{M} \delta u_i(t_0) - \delta \lambda_{u_i}^T(t_f) \bar{M} u_i(t_f) \\ & - \lambda_{u_i}^T(t_f) \delta \bar{M} u_i(t_f) - \delta \lambda_{u_i}^T(t_f) \bar{M} \delta u_i(t_f) \\ & + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left(\frac{\partial H}{\partial u_i} \right)^T \delta u_i + \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)^T \delta p \right. \\ & + \left(\frac{\partial H}{\partial t_i} \right)^T \delta t_i + \left(\frac{\partial H}{\partial x_j} \right)^T \delta x_j \\ & + \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda_{u_i}} \right)^T \delta \lambda_{u_i} + \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda_p} \right)^T \delta \lambda_p \\ & + \delta \dot{\lambda}_{u_i}^T(t_0) \bar{M} u_i(t_0) + \dot{\lambda}_{u_i}^T(t_0) \delta \bar{M} u_i(t_0) \\ & \left. + \dot{\lambda}_{u_i}^T(t_0) \bar{M} \delta u_i(t_0) \right\} dt \quad (30) \end{aligned}$$

評価関数 J^* の最小値を求める.

$$\delta J^* = 0 \quad (31)$$

上式の条件 (必要条件) により, ラグランジュ乗数に対する随伴方程式が得られる.

$$\bar{M} \dot{\lambda}_{u_i} - \tilde{S}(u_j)^T \lambda_{u_i} + B \lambda_p = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (32)$$

$$B^T \lambda_{u_i} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (33)$$

$$\lambda_{u_i}(t_f) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (34)$$

$$\lambda_{u_i} = -e_{\Gamma_B} Q_i (e_{\Gamma_B}^T M_{\Gamma} t_i - D_i) \quad \text{on } \Gamma \quad (35)$$

式 (35) は,

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t_i} &= (e_{\Gamma_B}^T M_{\Gamma})^T Q_i (e_{\Gamma_B}^T M_{\Gamma} t_i - D_i) + \lambda_{u_i}^T M_{\Gamma} \\ &= M_{\Gamma}^T e_{\Gamma_B} Q_i (e_{\Gamma_B}^T M_{\Gamma} t_i - D_i) + M_{\Gamma}^T \lambda_{u_i} \\ &= M_{\Gamma}^T [e_{\Gamma_B} Q_i (e_{\Gamma_B}^T M_{\Gamma} t_i - D_i) + \lambda_{u_i}] = 0 \quad (36) \end{aligned}$$

より,

$$e_{\Gamma_B} Q_i (e_{\Gamma_B}^T M_{\Gamma} t_i - D_i) + \lambda_{u_i} = 0 \quad (37)$$

となる.

5. 時間方向の離散化

5.1 状態方程式

時間方向の離散化には, 安定性に優れ時間増分を大きくとれる陰的解法を適用し, 連続式 (24) は完全陰的に表す.

$$\bar{M} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + S(\bar{u}_i^*) u_i^{n+1/2} - B p^{n+1} = M_{\Gamma_2} t_i \quad (38)$$

$$B^T u_i^{n+1} = 0 \quad (39)$$

ここで,

$$\bar{u}_i^* = \frac{1}{2} (3\bar{u}_i^n - \bar{u}_i^{n-1}), \quad u_i^{n+1/2} = \frac{1}{2} (u_i^{n+1} + u_i^n)$$

である. 圧力 Poisson 方程式の導出については, 運動方程式 (38) と連続式 (39) に対して, 連続式 (39) を完全に満足しない中間流速を導入してから圧力 Poisson 方程式を導くことによって流速場と圧力場を分離して解くことのできる分離型法を適用する. 前時間ステップの圧力 p^n を近似的な圧力として, 運動方程式 (38) の圧力を p^n に置き換えると, 運動方程式 (38) は, 未知流速 u_i^{n+1} を中間流速 $\bar{u}_i^{n+1}$ に置き換えた次式になる.

$$\bar{M} \frac{\bar{u}_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + S(\bar{u}_i^*) \bar{u}_i^{n+1/2} - B p^n = M_{\Gamma_2} t_i \quad (40)$$

ここで,

$$\tilde{u}_i^{n+1/2} = \frac{1}{2}(\tilde{u}_i^{n+1} + u_i^n)$$

である. 式 (38) と式 (40) の差をとると, 次式が得られる.

$$\bar{M} \frac{u_i^{n+1} - \tilde{u}_i^{n+1}}{\Delta t} + \frac{1}{2} S(\tilde{u}_i^*) (u_i^{n+1} - \tilde{u}_i^{n+1}) - B(p^{n+1} - p^n) = 0 \quad (41)$$

式 (41) に $B^T \bar{M}^{-1}$ をかけ, 式 (39) を代入することによって圧力 Poisson 方程式が得られる. ただし, $u_i^{n+1} \simeq \tilde{u}_i^{n+1}$ と仮定し, ここでは, 式 (41) の右辺における $B^T \tilde{u}^{n+1}$ 以外の項は省略している.

$$B^T \bar{M}^{-1} B \Delta t (p^{n+1} - p^n) = -B^T \tilde{u}_i^{n+1} \quad (42)$$

本手法のアルゴリズムは, 式 (40) $\Rightarrow$ 式 (42) $\Rightarrow$ 式 (41) となる.

5.2 随伴方程式

状態方程式の時間方向の離散化と同様に, 安定性に優れ時間増分を大きくとれる陰的解法を適用し, 随伴方程式に対する連続式 (33) は完全陰的に表す.

$$\bar{M} \frac{\lambda_{u_i}^{n-1} - \lambda_{u_i}^n}{\Delta t} + \tilde{S}^T(u_j) \lambda_{u_i}^{n-1/2} - B \lambda_p^{n-1} = 0 \quad (43)$$

$$B^T \lambda_{u_i}^{n-1} = 0 \quad (44)$$

ここで,

$$\lambda_{u_i}^{n-1/2} = \frac{1}{2}(\lambda_{u_i}^{n-1} + \lambda_{u_i}^n)$$

である. 圧力のラグランジュ乗数に対する Poisson 方程式の導出については, 運動方程式 (43) と連続式 (44) に対して, 連続式 (44) を完全に満足しない中間流速を導入してから圧力のラグランジュ乗数に対する Poisson 方程式を導くことによって流速場と圧力場を分離して解くことのできる分離型法を適用する. 本手法のアルゴリズムは以下になる.

$$\bar{M} \frac{\tilde{\lambda}_{u_i}^{n-1} - \lambda_{u_i}^n}{\Delta t} + \tilde{S}^T(u_j) \tilde{\lambda}_{u_i}^{n-1/2} - B \lambda_p^n = 0 \quad (45)$$

$$B^T \bar{M}^{-1} B \Delta t (\lambda_p^{n-1} - \lambda_p^n) = -B^T \tilde{\lambda}_{u_i}^{n-1} \quad (46)$$

$$\bar{M} \frac{\lambda_{u_i}^{n-1} - \tilde{\lambda}_{u_i}^{n-1}}{\Delta t} + \frac{1}{2} \tilde{S}^T(u_j) (\lambda_{u_i}^{n-1} - \tilde{\lambda}_{u_i}^{n-1}) - B(\lambda_p^{n-1} - \lambda_p^n) = 0 \quad (47)$$

ここで,

$$\tilde{\lambda}_{u_i}^{n-1/2} = \frac{1}{2}(\tilde{\lambda}_{u_i}^{n-1} + \lambda_{u_i}^n)$$

である.

6. Sakawa-Shindo 法

最小化手法として, Sakawa-Shindo 法¹⁷⁾を用いる. この方法は, 評価関数 J において, 以下に示すようなペナルティ項を導入した修正評価関数を用いて最小化をはかるものである.

$$K^{(l)} = J^{*(l)} + \frac{1}{2} (x_j^{(l+1)} - x_j^{(l)})^T c^{(l)} (x_j^{(l+1)} - x_j^{(l)}) \quad (48)$$

ここで, (l) は反復回数, $c^{(l)}$ は重み (対角) 行列である. また, 式 (48) の右辺第二項, すなわち, ペナルティ項 $\frac{1}{2} (x_j^{(l+1)} - x_j^{(l)})^T c^{(l)} (x_j^{(l+1)} - x_j^{(l)})$ は, 繰り返し計算の初期における計算が不安定になるのを防ぐために用いられるものである. この修正評価関数において停留条件 $\frac{\partial K^{(l)}}{\partial x_j^{(l)}} = 0$

$$\left[\int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial H}{\partial x_j^{(l)}} \right\}^T dt - c^{(l)} (x_j^{(l+1)} - x_j^{(l)}) \right]^T \delta x_j^{(l)} = 0$$

を適用することにより次式を得る.

$$x_j^{(l+1)} = x_j^{(l)} + c^{(l)} \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \lambda_{u_i}^T \left[- \left\{ \frac{\partial S(\tilde{u}_j)}{\partial x_j^{(l)}} \right\} u_i + \left\{ \frac{\partial B}{\partial x_j^{(l)}} \right\} p \right] + \lambda_p^T \left\{ \frac{\partial B^T}{\partial x_j^{(l)}} \right\} u_i \right\} dt \quad (49)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x_j^{(l)}} &= \lambda_{u_i}^T \left[- \left\{ \frac{\partial S(\tilde{u}_j)}{\partial x_j^{(l)}} \right\} u_i + \left\{ \frac{\partial B}{\partial x_j^{(l)}} \right\} p \right] \\ &\quad + \left\{ \frac{\partial M_L}{\partial x_j^{(l)}} \right\} t_i + \lambda_p^T \left\{ \frac{\partial B^T}{\partial x_j^{(l)}} \right\} u_i \\ &\quad + \left(e_L^T \left\{ \frac{\partial M_L}{\partial x_j^{(l)}} \right\} t_i \right)^T Q_i (e_L^T M_L t_i - D_i) \\ &= \lambda_{u_i}^T \left[- \left\{ \frac{\partial S(\tilde{u}_j)}{\partial x_j^{(l)}} \right\} u_i + \left\{ \frac{\partial B}{\partial x_j^{(l)}} \right\} p \right] \\ &\quad + \lambda_p^T \left\{ \frac{\partial B^T}{\partial x_j^{(l)}} \right\} u_i \\ &\quad + t_i^T \left\{ \frac{\partial M_L}{\partial x_j^{(l)}} \right\}^T [\lambda_{u_i} + e_L Q_i (e_L^T M_L t_i - D_i)] \\ &= \lambda_{u_i}^T \left[- \left\{ \frac{\partial S(\tilde{u}_j)}{\partial x_j^{(l)}} \right\} u_i + \left\{ \frac{\partial B}{\partial x_j^{(l)}} \right\} p \right] \\ &\quad + \lambda_p^T \left\{ \frac{\partial B^T}{\partial x_j^{(l)}} \right\} u_i \end{aligned} \quad (50)$$

である。式 (49) が、同定すべき形状座標を求める式となる。ここで、重み行列 $c^{(0)}$ は、以下のように定める。

$$c^{(0)} = (\pm) I \cdot \left\| \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \lambda_{u_i}^T \left[- \left\{ \frac{\partial S(\bar{u}_j)}{\partial x_j^{(0)}} \right\} u_i + \left\{ \frac{\partial B}{\partial x_j^{(0)}} \right\} p \right] + \lambda_p^T \left\{ \frac{\partial B^T}{\partial x_j^{(0)}} \right\} u_i \right\}^T dt \right\|_{\infty} / \Delta \hat{x}_j^{(1)} \max \quad (51)$$

ここで、 $\|\cdot\|_{\infty}$ は最大ノルム、 I は単位行列、 $\Delta \hat{x}_j^{(1)} \max$ は $l=1$ 回目の最大移動量であり、 $c^{(0)}$ の符号は $J^{(1)} \leq J^{(0)}$ となるように指定する。また、修正評価関数のペナルティ項の影響は、同定形状座標 $x_j^{(l+1)}$ が収束する $x_j^{(l+1)} \simeq x_j^{(l)}$ につれて、少なくなるものである。よって、同定形状座標 $x_j^{(l+1)}$ が収束するときは、修正評価関数は評価関数と同値となる。このアルゴリズムは以下ようになる。

1. $l=0$ とし初期形状 $x_j^{(0)}$ を設定する。
2. 式 (23),(24) を用いて状態量 $u_i^{(l)}, p^{(l)}$ を求める。
3. 式 (26) を用いて評価関数 $J^{(l)}$ を求める。
4. 式 (32),(33) を用いて随伴量 $\lambda_{u_i}^{(l)}, \lambda_p^{(l)}$ を求める。
5. 式 (49) を用いて同定形状座標 $x_j^{(l+1)}$ を求める。
6. 誤差ノルム $e = \|x_j^{(l+1)} - x_j^{(l)}\|_{\infty}$ を計算し、 $e < \varepsilon$ なら計算を終了する。そうでなければ、次のステップに進む。
7. 式 (23),(24) を用いて状態量 $u_i^{(l+1)}, p^{(l+1)}$ を求める。
8. 式 (26) を用いて評価関数 $J^{(l+1)}$ を求める。
9. 重み行列 $c^{(l)}$ を次のように修正する。
 $J^{(l+1)} \leq J^{(l)}$ ならば $c^{(l+1)} = 0.9c^{(l)}$, $l+1 \rightarrow l$ としステップ 4 へ、そのほかは $c^{(l)} = 2.0c^{(l)}$ としステップ 5 へ。

7. 解析例

形状同定解析の検証問題として流体力を評価関数に用いた円柱周りの解析を行う。この解析は、目的とする流体力（抗力）の値を評価関数に設定し、円形状から逆解析を開始して、評価関数が最小となるような形状を求める問題である。解析領域および有限要素メッシュを図-3,4に示す。図-4の有限要素メッシュの節点数、要素数は1834、3500であり円柱の周りを56分割している。形状同定解析を行うための円柱の初期形状の直径 D は1.0を設定した。解析例としては、レイノルズ数0.1(Stokes流れとなる領域)、20(カルマン渦の発生しない領域)、250(カルマン渦が発生する領域)

の3ケースを行った。時間増分量は0.4を用い、評価関数で用いる始端時間、終端時間は $t_0 = 200, t_f = 300$ としている。始端時間を $t_0 = 200$ とした理由は、非定常解析であるので、現象が十分に定常解または周期解に移行した時間からの抗力をコントロールすることを考慮したためである。また、Sakawa-Shindo法で使用する初期設定量 $\Delta \hat{x}_j^{(1)} \max$, ε はそれぞれ $10^{-2}, 10^{-5}$ とした。

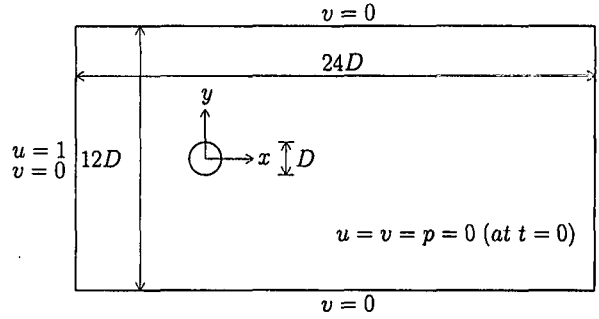


図-3 解析領域

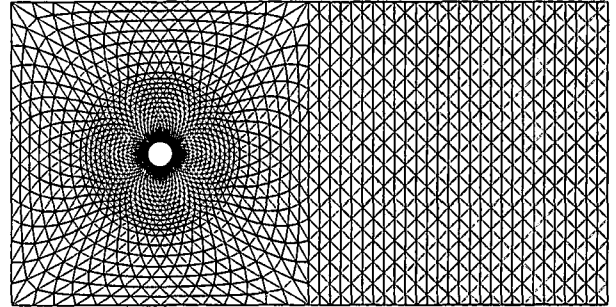


図-4 有限要素メッシュ

7.1 解析例 1(Re=0.1)

図-5にレイノルズ数0.1(Stokes流れとなる領域)を用いた場合の同定された抗力、形状を示す。同定形状を求めるために要した反復回数は36であった。図-5を見ると同定された形状における抗力の値が非常によく目的値の抗力に一致している。考察としては、本解析は形状同定問題であるので最適形状問題ではないが、得られた形状は最適形状問題で得られている Ganesh⁷⁾, 片峯⁸⁾の形状と類似した楕円形状になっている。

7.2 解析例 2(Re=20)

図-6にレイノルズ数20を用いた場合の同定された抗力、形状を示す。同定形状を求めるために要した反復回数は28であった。レイノルズ数20の領域では、

円柱周りの解析においてカルマン渦は発生しないので定常解となり、抗力は図-6のように一定値に収束する。図-6を見ると同定された形状における抗力の値が非常によく目的値の抗力に一致している。同定された形状をみると、レイノルズ数 0.1 の場合と同様に最適形状問題で得られている Ganesh⁷⁾、片峯⁸⁾の結果と類似した形状となっており流れに向かって少し尖った卵形になっている。

7.3 解析例 3(Re=250)

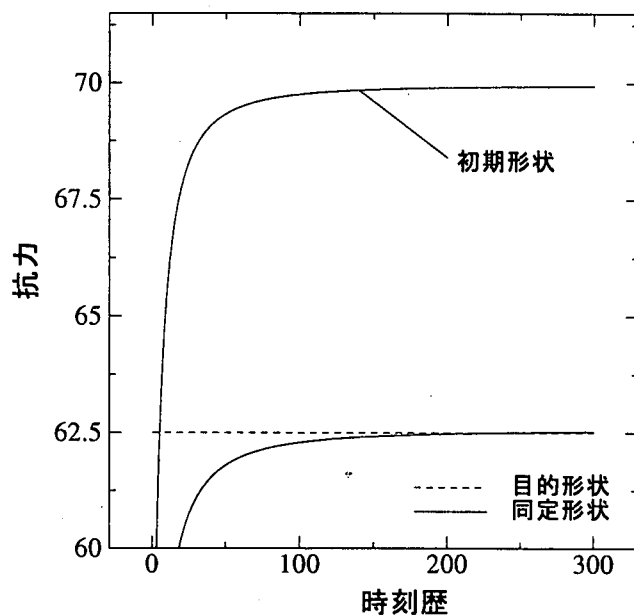
図-7 にレイノルズ数 250 を用いた場合の同定された抗力、形状を示す。同定形状を求めるために要した反復回数は 37 であった。レイノルズ数 250 の領域では、円柱周りの解析においてカルマン渦が発生し周期解となるので、抗力は図-7 のようにある周期をもった振動した値となる。図-7 を見ると同定された形状における抗力の値が目的値の抗力の付近で振動していることが解る。同定された形状をみると、レイノルズ数 20 で得られた形状を角ばらしたような形になっている。

8. 結言

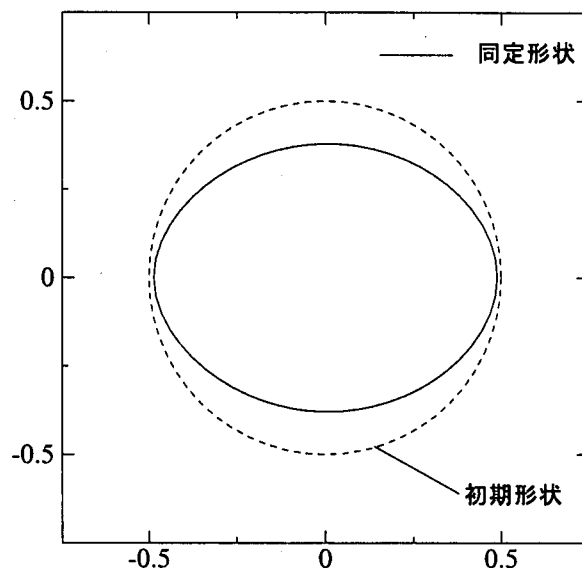
本研究では、従来の安定化手法に比べて定式化が極めて簡便な安定化気泡関数要素を用いた非定常問題における形状同定解析を提案した。また、評価関数に流体力を用いた非圧縮 Navier-Stokes 方程式における形状同定解析の適用を検討した。検証の問題として、レイノルズ数 0.1(Stokes 流れとなる領域)、20 (カルマン渦の発生しない領域)、250 (カルマン渦が発生する領域) の 3 ケースの抗力の同定形状解析を行った。3 ケースいずれの場合においても目的とした抗力を得るできる同定形状を解析することができた。考察として、同定解析で得られた同定形状は最適形状問題で得られている形状と類似した形状になっている。今後は、より高いレイノルズ数における形状同定解析の検討を行っていく所存である。

参考文献

- 1) O.Pironneau :On optimum profiles in Stokes flow, *J. Fluid Mech.*, **59**, Part 1, pp.117, 1973.
- 2) O.Pironneau :On optimum design in fluid mechanics, *J. Fluid Mech.*, **64**, Part 1, pp.97, 1974.
- 3) J.M.Bourot :On the numerical computation of the optimum profile in Stokes flow, *J. Fluid Mech.*, **65**, Part 3, pp.513, 1975.
- 4) 佐野, 酒井 :Stokes 流中における最小抗力物体形状の数値的決定 (二次元有限領域で断面積一定の場合), 日本航空宇宙学会誌, **30**, 339, pp.207, 1982.



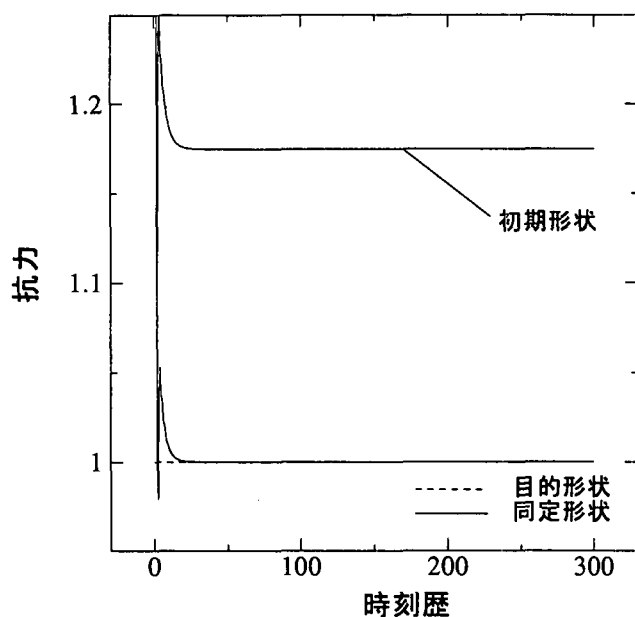
(a) 抗力



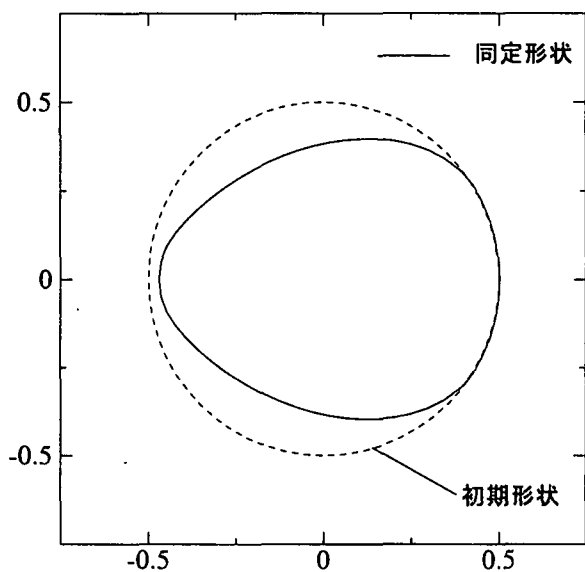
(b) 形状

図-5 同定された抗力と形状 (Re=0.1)

- 5) 別所, 姫野 :2 次元 Stokes 流れにおける最適形状について, 関西造船協会誌, **193**, pp.115, 1985.
- 6) 畔上 :領域最適化問題の一解法, 日本機械学会論文集 A, **60**, 574, pp.165, 1994.
- 7) R.K.Ganesh :The minimum drag profile in laminar flow: a numerical, *Transaction of the ASME, J. Fluids Engng.*, **116**, pp.456-462, 1994.
- 8) 片峯, 津幡, 畔上 :粘性流れ場における形状最適化問題の解法, 日本応用数理学会, 平成 14 年度年会, 2002.
- 9) J.Matsumoto and M.Kawahara :Shape identification for fluid-structure interaction problem using improved bubble element, *Int. J. Comput. Fluid Dynamics*, **15**, pp.33-45, 2001.
- 10) 松本, 梅津, 川原 :線形型気泡関数を用いた非圧縮性粘性流体解析と適応型有限要素法, 応用力学論文集, **2**,

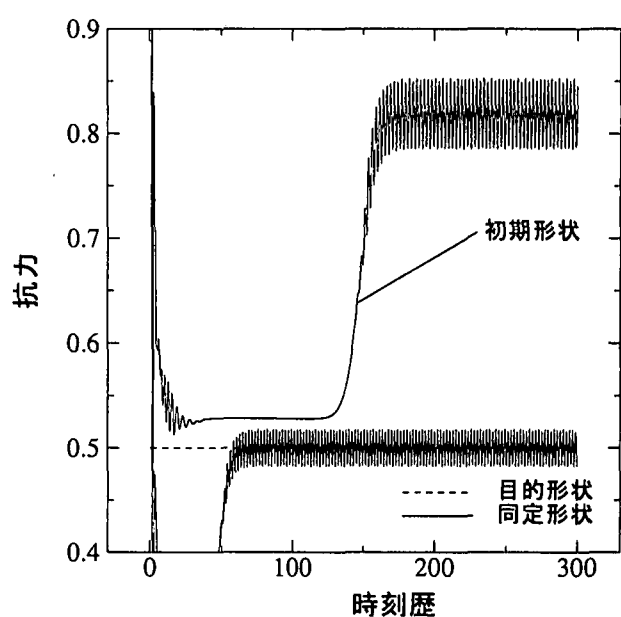


(a) 抵抗力

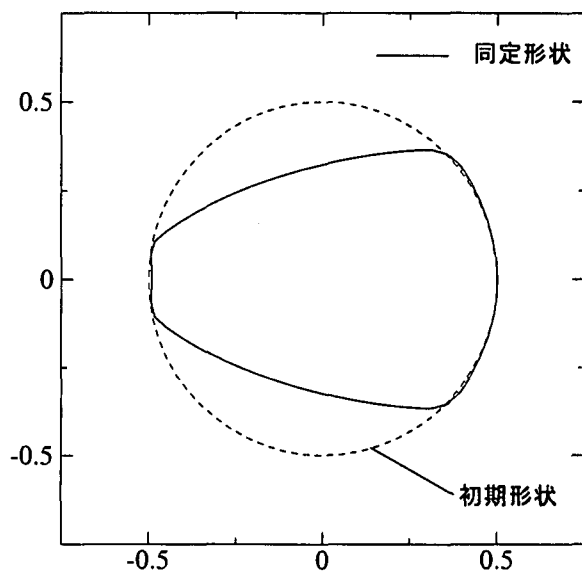


(b) 形状

図-6 同定された抵抗力と形状 ($Re=20$)



(a) 抵抗力



(b) 形状

図-7 同定された抵抗力と形状 ($Re=250$)

pp.223-232, 1999.

- 11) 松本純一：安定化気泡関数有限要素法による流体問題の順・逆解析に関する計算力学的研究，中央大学博士論文，2003.
- 12) T.E.Tezduyar et al. :Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure element, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, **95**, pp.221-242, 1992.
- 13) 丸岡，太田，平野，川原：同次補間を用いた陰的有限要素法による非圧縮粘性流れの解析，構造工学論文集，**43A**，pp.383-394, 1997.
- 14) J.C.Simo, F.Armero, and C.A.Taylor :Stable and time-dissipative finite element methods for the incompressible Navier-Stokes equations in advection dominated flows, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **38**, pp.1475-

1506, 1995.

- 15) T.Yamada :A bubble element for inviscid flow, *Finite Elements in Fluids*, **9**, pp.1567-1576, 1995.
- 16) 奥村，川原：気泡関数要素を用いた非圧縮 Navier-Stokes 方程式に対する Petrov-Galerkin 有限要素法，応用力学論文集，**4**，pp.121-126, 2001.
- 17) Y.Sakawa and Y.Shindo :On global convergence of an algorithm for optimal control, *Transactions on Automatic Control, IEEE, AC-25*(6), pp.1149-1153, 1980.

(2003 年 4 月 18 日 受付)