

Lagrange 多項式に基づく三次元弾性問題の EFGM 解析

EFGM Analysis of Three-Dimensional Elastic Problems based on Lagrange Polynomial

末武義崇*, 大須賀淳**, 友田富雄***

Yoshitaka Suetake, June Ohsuka, Tomio Tomoda

*工博, 足利工業大学助教授, 工学部都市環境工学科 (〒326-8558 足利市大前町 268-1)

** 工修, (株) ライテック, (〒160-0004 東京都新宿区四谷 1 丁目)

*** 工修, (株) 富貴沢建設コンサルタンツ, 構造二部 (〒321-0934 宇都宮市築瀬 2-13-26)

The element-free Galerkin method (EFGM) is known as an alternative numerical approach that does not require the finite element sub-division. The authors have been already presented an EFGM, which is based on the Lagrange polynomial, and applied to finite displacement analyses of plates and beams. In this paper, we reformulate our EFGM for the elastic analysis of 3-D bodies. As a numerical example we adopt a bending problem of thick plates. Especially, we investigate the affection of numerical parameters to the 3-D analysis. In order to evaluate the efficiency of the present EFGM, FEM and Fourier analyses are also performed. It follows from numerical results that the present EFGM gives us excellent approximation for the linear elastic analysis of 3-D bodies.

Key Words: EFGM, meshless, Lagrange polynomial, 3-D elastic body, thick plate

キーワード: EFGM, メッシュレス, Lagrange 多項式, 三次元弾性体, 厚板

1. はじめに

メッシュレス法あるいはエレメントフリー法の名前で呼ばれる数値解析手法が, 要素分割を必要としない新たな手法として注目されるようになって久しい。既往のメッシュレス法の中では, Belytchko ら¹⁾によって提案された Element-Free Galerkin Method (EFGM) がもっとも著名である。Belytchko らの EFGM は, 移動最小二乗法²⁾に基づく定式化を行った Nayroles ら³⁾の手法に改良を加えたもので, 変位関数として比較的低次の多項式を用いている。同様に移動最小二乗法の手続きに従いつつ, Taylor 展開と組み合わせ定式化を行ったメッシュレス法には, 杉原・今村の方法⁴⁾や Liszka らの方法⁵⁾がある。この他にも多くのメッシュレス法が考案されているが, 初期の頃のメッシュレス法については, Belytchko ら⁶⁾が総括している。

最近では, 移動最小二乗法によらない定式化に従ったメッシュレス法^{7)~9)}も多く報告されている。筆者らも^{9)~11)}, 移動最小二乗法の手続きに従うのではなく, Lagrange 多項式を変位関数として用いて単純な EFGM を構築し, 梁や薄板の有限変位問題や平面応力問題の解析に適用して, その有用性を示してきた。筆者らの EFGM は重み関数が必要としないため, 既往のメッシュレス法と比べると, 定式化が簡明であると共に, 指数関数型の重み関数を選択した場合に比べ, 解析パラメーターを少なくすることができる。

移動最小二乗法に基づくメッシュレス法の場合には,

“最小二乗法”であるがゆえに, 基本境界条件を満足させることが難しい。この点については, Lagrange 乗数を用いる方法¹²⁾や Penalty 関数を用いる方法^{13), 14)}, 変数変換によって節点物理量を導入する方法¹⁵⁾など, 幾つかの解決策が考案されている。一方, 筆者らの考案した EFGM は, Lagrange 多項式に基づく定式化を採用しているから, 節点上の物理量が変位関数の係数となり, 基本境界条件を直接導入することができる。

三次元問題の解析にメッシュレス法を適用した例としては, 破壊力学における亀裂進展の解析に適用した Krysl らの研究¹⁶⁾や Duarte らの研究¹⁷⁾がある。また, Belytchko ら¹⁸⁾は, sloshing の解析にも EFGM を適用している。その他, 水と土との連成問題に対する EFGM の適用例として, 川端ら¹⁹⁾の研究がある。

本研究では, これまで一次元問題や二次元問題の解析に適用してきた筆者らの EFGM を, 三次元問題への適用が可能となるように再定式化する。また, 具体的な数値解析を通じて, 解析手法としての妥当性や解析パラメーターの数値解に及ぼす影響などについて, 定量的な検討を試みる。数値解析例としては, 平板あるいは直方体の三次元弾性問題を採用した。

まず, 続く第2章で, Lagrange 多項式に基づく EFGM の定式化について詳細に述べる。第3章では, 数値解析の際に比較対象として用いた, 三次元弾性論に従った Fourier 解析, および Reissner-Mindlin 理論に従った厚板の Fourier

解析について概説する。第4章において、解析モデルの形状・材料定数、数値解析の際の諸条件などを示し、第5章で数値計算結果を述べる。その際、比較対象として、前述の Fourier 解析解だけでなく、汎用プログラムを用いた有限要素解析の結果も示す。最後に、本研究によって得られた結論を第6章で述べる。

2. EFGM 定式化

2. 1 Lagrange 多項式

三次元空間内において、格子状に分布する N^3 個の節点 $(x_k, y_l, z_m) (k, l, m = 1 \sim N)$ を考える。各節点に付随して、節点値 f_{klm} が与えられているとすれば、一致条件 $f(x_k, y_l, z_m) = f_{klm}$ を満たす三次元 Lagrange 多項式の表現として、次式が得られる。

$$f(x, y, z) = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N f_{klm} \phi_k(x) \psi_l(y) \chi_m(z) \quad (1)$$

ここで、 $\phi_k(x)$ 、 $\psi_l(y)$ および $\chi_m(z)$ は、一次元の Lagrange 基底であり、例えば $\phi_k(x)$ の場合、次式で定義される。

$$\phi_k(x) = \prod_{m=1}^N X_{m \neq k}(x); X_{m \neq k}(x) = \begin{cases} 1 & (m = k) \\ \frac{x - x_m}{x_k - x_m} & (m \neq k) \end{cases} \quad (2)$$

式 (1) は、一次元 Lagrange 多項式¹¹⁾の単純な拡張になっている。式 (1) を用いれば、評価点 (x, y, z) における解を、近傍の節点値で表現することができる。メッシュレス離散表現の考え方については、文献 11) に示した、一次元および二次元の場合と全く同様である。

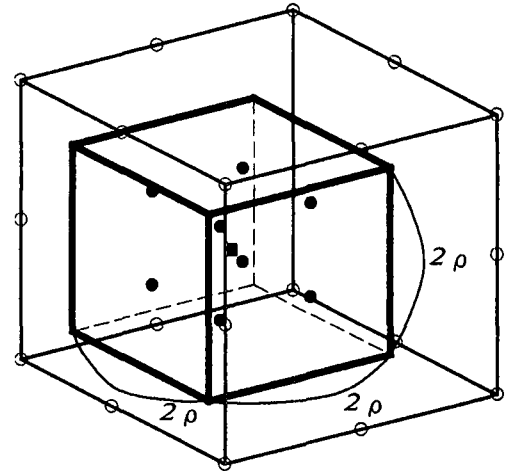
次節における離散化支配方程式の誘導に際しては、式 (1) およびその偏導関数の離散表示を以下のように表記する。

$$\left. \begin{aligned} f(x, y) &= B_0(x, y)^T \cdot f, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = B_1(x, y)^T \cdot f, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= B_2(x, y)^T \cdot f, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = B_3(x, y)^T \cdot f \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここで、 f は節点値ベクトル、 $B_r (r = 0 \sim 3)$ は Lagrange 基底の直積 $\phi_k(x) \psi_l(y) \chi_m(z)$ およびその微分によって構成される演算子ベクトルである。偏微分に対応する演算子ベクトル $B_r (r = 1 \sim 3)$ の誘導についても、二次元問題の場合¹¹⁾と同様である。

三次元問題のメッシュレス解析では、評価点近傍に、図-1に示したような一辺の長さが 2ρ となる立方体の“サポート領域”を設定する。評価点の値を表現する際には、サポート内部に属する節点のみを用いることになる。従って、Lagrange 多項式 (1) において用いられる N^3 個の節点は、あくまで評価点近傍に設けたサポート領域内部の節点であり、解析領域内部の全ての節点ではないことに注意しておく必要がある。図-1に示した概念図の例では、 $N = 2$ すなわち $N^3 = 8$ 個の節点データのみが評価点 (x, y, z) における関数値・微分値の計算に用いられる。

こうした“サポート”という概念を導入した場合の、近似関数の連続性について考察する¹¹⁾。例として、ある評価点の周りに設定したサポート境界上に、節点が存在する場合を考えてみる。これら境界上の節点は、評価点が隣接する点に移動しただけで、新たなサポートに含まれる場合と含まれない場合が生ずる。結果、隣接する評価点であっても、関係する Lagrange 基底が異なり、滑らかな連続性は、区分的にしか保証されないことが予想される。



■ 評価点 ● 内部節点 ○ 外部節点

図-1 サポート領域の概念図

2. 2 離散化支配方程式

三次元弾性問題に対する仮想仕事の原理は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} & \iiint_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z \\ & \quad + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) dx dy dz \\ & - \iiint_V (\bar{X} \delta u + \bar{Y} \delta v + \bar{Z} \delta w) dx dy dz \\ & - \iint_{S_\sigma} (\bar{T}_x \delta u + \bar{T}_y \delta v + \bar{T}_z \delta w) dS = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 V は三次元領域、 S_σ は力学的境界条件が与えられている物体表面、 σ は垂直応力、 ε は垂直ひずみ、 τ はせん断応力、 γ はせん断ひずみ、 $\bar{X}$ 、 $\bar{Y}$ および $\bar{Z}$ はそれぞれ x 、 y 、 z 3方向の物体力、 u 、 v および w は3方向変位、 $\bar{T}$ は表面力であり、添字は作用面や力の方向を示している。また、 δ は変位あるいはひずみの仮想量を表している。

今、 x 、 y 、 z 3方向の節点変位ベクトルをそれぞれ u 、 v および w とすれば、物体内部の任意の評価点における変位およびひずみは、式 (3) に従って、次式のように離散表示することができる。

$$u = B_0^T \cdot u, \quad v = B_0^T \cdot v, \quad w = B_0^T \cdot w \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = B_1^T \cdot u, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = B_2^T \cdot v, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = B_3^T \cdot w \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{xy} &= \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = B_2^T \cdot u + B_1^T \cdot v, \\ \gamma_{yz} &= B_3^T \cdot v + B_2^T \cdot w, \quad \gamma_{zx} = B_1^T \cdot w + B_3^T \cdot u \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

応力成分については、等方弾性体を仮定すれば、Hookeの法則に従って次式のように離散化される。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= C \{ (1-\nu) B_1^T \cdot u + \nu B_2^T \cdot v + \nu B_3^T \cdot w \} \\ \sigma_y &= C \{ \nu B_1^T \cdot u + (1-\nu) B_2^T \cdot v + \nu B_3^T \cdot w \} \\ \sigma_z &= C \{ \nu B_1^T \cdot u + \nu B_2^T \cdot v + (1-\nu) B_3^T \cdot w \} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} (B_2^T \cdot u + B_1^T \cdot v) \\ \tau_{yz} &= \frac{E}{2(1+\nu)} (B_3^T \cdot v + B_2^T \cdot w) \\ \tau_{zx} &= \frac{E}{2(1+\nu)} (B_1^T \cdot w + B_3^T \cdot u) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ここで、 E は Young 率、 ν Poisson 比であり、 $C \equiv E / \{ (1+\nu)(1-2\nu) \}$ と置いた。

式 (5) ~ (9) を式 (4) に代入すれば、仮想仕事の離散表示が得られ、結果として、次式のような離散化された支配方程式を誘導することができる。

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} \quad (10)$$

ここで、係数マトリックスにおける小マトリックスおよび荷重ベクトルは、それぞれ次式のように与えられる。

$$K_{11} = C \iiint_V \left\{ (1-\nu) B_1 \cdot B_1^T + \frac{1-2\nu}{2} B_2 \cdot B_2^T + \frac{1-2\nu}{2} B_3 \cdot B_3^T \right\} dx dy dz \quad (11)$$

$$K_{12} = K_{21}^T = C \iiint_V \left(\nu B_1 \cdot B_2^T + \frac{1-2\nu}{2} B_2 \cdot B_1^T \right) dx dy dz \quad (12)$$

$$K_{13} = K_{31}^T = C \iiint_V \left(\nu B_1 \cdot B_3^T + \frac{1-2\nu}{2} B_3 \cdot B_1^T \right) dx dy dz \quad (13)$$

$$K_{22} = C \iiint_V \left\{ \frac{1-2\nu}{2} B_1 \cdot B_1^T + (1-\nu) B_2 \cdot B_2^T + \frac{1-2\nu}{2} B_3 \cdot B_3^T \right\} dx dy dz \quad (14)$$

$$K_{23} = K_{32}^T = C \iiint_V \left(\nu B_2 \cdot B_3^T + \frac{1-2\nu}{2} B_3 \cdot B_2^T \right) dx dy dz \quad (15)$$

$$K_{33} = C \iiint_V \left\{ \frac{1-2\nu}{2} B_1 \cdot B_1^T + \frac{1-2\nu}{2} B_2 \cdot B_2^T + (1-\nu) B_3 \cdot B_3^T \right\} dx dy dz \quad (16)$$

$$F_x = \iiint_V \bar{X} B_0 dx dy dz + \iint_{S_x} \bar{T}_x B_0 dS \quad (17)$$

$$F_y = \iiint_V \bar{Y} B_0 dx dy dz + \iint_{S_y} \bar{T}_y B_0 dS \quad (18)$$

$$F_z = \iiint_V \bar{Z} B_0 dx dy dz + \iint_{S_z} \bar{T}_z B_0 dS \quad (19)$$

式 (11) ~ (19) における積分は、Gauss の数値積分公式を用いて評価する。その際、積分点がいわゆる評価点となるから、積分点毎に演算子ベクトル B_i ($i=0 \sim 3$) を算定すれば良い。さらに、数値積分の精度の低下を防ぐために、解析領域全体に対して Gauss 積分公式を適用するのではなく、全体を“セル”と呼ばれる小領域に分割し、各セルにおいて積分公式を適用する。なお、セルは節点配置と独立であり、有限要素法における“要素”ではない点に注意しておく。

こうした、メッシュレス法に従った変分原理の離散化を、Belytchko ら¹⁾は“Element-Free Galerkin Method (EFGM)”と名づけている。メッシュレスあるいはエレメントフリーといった位置付けはなされていないが、Bellman ら²⁰⁾が考案し、水澤ら²¹⁾が扇形 Mindlin 板の振動解析に適用している Differential Quadrature Method (DQM) も一種のメッシュレス法と考えられる。特に、DQM においても Lagrange 多項式のような補間多項式が用いられており、その意味では本研究の EFGM も DQM の一種と見なすこともできる。両者の相違点は、“サポート領域”のような概念を導入しているかどうかという点にあると考えられる。

3. Fourier 解析

3.1 三次元弾性理論

本研究の EFGM の妥当性を検証するために、三次元弾性理論に基づく Fourier 解析を実施する。ここでは、Fourier 解析の概略について説明する。

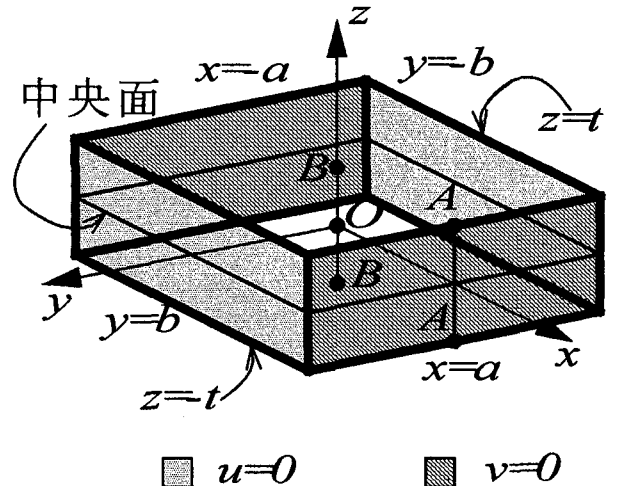


図-2 周辺単純支持された直方体

三次元弾性問題の基礎方程式は、変位法の場合、Navier の式²²⁾で与えられる。本研究では、具体的な解析対象として、図-2に示したような直方体(矩形平板)を想定している。境界条件としては、周辺単純支持された矩形平板に対応するように、周辺の z 方向変位 w を全てゼロとしたほか、図中に明記したように、それぞれの面に平行な方向の変位 u または v をゼロとした。適用した幾何学的境界条件に対応する式表現は、次式の通りである。

$$\left. \begin{aligned} v(\pm a, y, z) = w(\pm a, y, z) = 0 \\ u(x, \pm b, z) = w(x, \pm b, z) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

式(20)を満足する三角級数として次式を用いる。

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N U_{mn}(z) \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2a} \cos \frac{(2n-1)\pi y}{2b} \\ v &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N V_{mn}(z) \cos \frac{(2m-1)\pi x}{2a} \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2b} \\ w &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N W_{mn}(z) \cos \frac{(2m-1)\pi x}{2a} \cos \frac{(2n-1)\pi y}{2b} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

式(21)をNavierの式に代入し、得られた連立常微分方程式を解けば、未定関数 $U_{mn}(z)$ 、 $V_{mn}(z)$ および $W_{mn}(z)$ を求めることができる。さらに、直方体上下面における力学的境界条件を適用すれば、求めた $U_{mn}(z)$ 、 $V_{mn}(z)$ および $W_{mn}(z)$ に含まれる任意定数を決定することができる。本研究では、直方体上面に等分布荷重が作用するものとして、次式の力学的境界条件を適用した。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z(x, y, t) = -p_0, \quad \sigma_z(x, y, -t) = 0 \\ \tau_{xz}(x, y, \pm t) = \tau_{yz}(x, y, \pm t) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

結果的に、 $U_{mn}(z)$ 、 $V_{mn}(z)$ および $W_{mn}(z)$ は次式のように決定される。

$$U_{mn}(z) = -\frac{2m-1}{\lambda_{mn}a} \left\{ (A_{mn} + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{3-4\nu}{\lambda_{mn}} D_{mn} + B_{mn}z) \cosh \frac{\pi}{2} \lambda_{mn} z \right. \quad (23)$$

$$\left. + (C_{mn} + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{3-4\nu}{\lambda_{mn}} B_{mn} + D_{mn}z) \sinh \frac{\pi}{2} \lambda_{mn} z \right\}$$

$$V_{mn}(z) = -\frac{2n-1}{\lambda_{mn}b} \left\{ (A_{mn} + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{3-4\nu}{\lambda_{mn}} D_{mn} + B_{mn}z) \cosh \frac{\pi}{2} \lambda_{mn} z \right. \quad (24)$$

$$\left. + (C_{mn} + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{3-4\nu}{\lambda_{mn}} B_{mn} + D_{mn}z) \sinh \frac{\pi}{2} \lambda_{mn} z \right\}$$

$$W_{mn}(z) = (A_{mn} + B_{mn}z) \sinh \frac{\pi}{2} \lambda_{mn} z + (C_{mn} + D_{mn}z) \cosh \frac{\pi}{2} \lambda_{mn} z \quad (25)$$

ただし、

$$\lambda_{mn} = \sqrt{\frac{(2m-1)^2}{a^2} + \frac{(2n-1)^2}{b^2}} \quad (26)$$

$$A_{mn} = \frac{\pi \lambda_{mn} t \cdot ch + 4(1-\nu)sh}{\lambda_{mn}(\pi \lambda_{mn} t + 2sh \cdot ch)} K_{mn} \quad (27)$$

$$B_{mn} = \frac{\pi \cdot ch}{\pi \lambda_{mn} t - 2sh \cdot ch} K_{mn} \quad (28)$$

$$C_{mn} = -\frac{\pi \lambda_{mn} t \cdot sh + 4(1-\nu)ch}{\lambda_{mn}(\pi \lambda_{mn} t - 2sh \cdot ch)} K_{mn} \quad (29)$$

$$D_{mn} = -\frac{\pi \cdot sh}{\pi \lambda_{mn} t + 2sh \cdot ch} K_{mn} \quad (30)$$

$$sh = \sinh \frac{\pi}{2} \lambda_{mn} t, \quad ch = \cosh \frac{\pi}{2} \lambda_{mn} t \quad (31)$$

$$K_{mn} = (-1)^{m+n} \frac{16 p_0}{\pi^2 (2m-1)(2n-1)} \cdot \frac{1+\nu}{\pi E} \quad (32)$$

3. 2 Reissner-Mindlin 理論

解析対象とする直方体の幅厚比 $\mu \equiv t/a$ を種々変化させて解析した場合、 $\mu \leq 0.3$ 程度の範囲については、平板理論に基づく解析結果と比較することにも意義がある。ここでは、比較対象とする平板理論として、Reissner-Mindlin 理論²²⁾を選択する。静的問題に対するReissner-Mindlin 理論の基礎方程式²²⁾を、周辺単純支持条件、すなわち次式で表される境界条件の下に解くことを考える。

$$w(\pm a, y) = w(x, \pm b) = 0 \quad (33)$$

$$M_x(\pm a, y) = -D \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) \Big|_{x=\pm a} = 0 \quad (34)$$

$$M_y(x, \pm b) = -D \left(\nu \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) \Big|_{y=\pm b} = 0 \quad (35)$$

ここで、 w はたわみ、 ψ_x および ψ_y は断面回転角、 M_x および M_y は板の曲げモーメントである。

式(33)～(35)を満足する三角級数として次式を用いる。

$$\left. \begin{aligned} \psi_x &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \Phi_{mn} \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2a} \cos \frac{(2n-1)\pi y}{2b} \\ \psi_y &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \Psi_{mn} \cos \frac{(2m-1)\pi x}{2a} \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2b} \\ w &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N W_{mn} \cos \frac{(2m-1)\pi x}{2a} \cos \frac{(2n-1)\pi y}{2b} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

式(36)を基礎方程式に代入し、得られた連立一次方程

式を解けば、未定係数 Φ_{mn} , Ψ_{mn} および W_{mn} を求めることができる。特に、荷重条件として等分布荷重 $p(x, y) = p_0$ を想定し、せん断補正係数を $5/6$ とすれば、未定係数 Φ_{mn} , Ψ_{mn} および W_{mn} は、次式のように決定される。

$$\Phi_{mn} = -\frac{16}{\pi^4} \cdot \frac{(2m-1)\pi}{2a} \cdot \frac{P_{mn}}{D\lambda_{mn}^4} \quad (37)$$

$$\Psi_{mn} = -\frac{16}{\pi^4} \cdot \frac{(2n-1)\pi}{2b} \cdot \frac{P_{mn}}{D\lambda_{mn}^4} \quad (38)$$

$$W_{mn} = \frac{16}{\pi^4} \cdot \frac{P_{mn}}{D\lambda_{mn}^4} \left\{ 1 + \frac{\pi^2 t^2}{5(1-\nu)} \lambda_{mn}^2 \right\} \quad (39)$$

ただし、

$$D = \frac{2Et^3}{3(1-\nu^2)}, \quad P_{mn} = \frac{(-1)^{m+n} 16 p_0}{\pi^2 (2m-1)(2n-1)} \quad (40)$$

4. 解析モデル

本研究で解析対象とするモデルは、前述のように、図-2に示したような、周辺単純支持された直方体である。周辺単純支持に対応する境界条件は、式(20)に示したとおりである。荷重条件については、式(22)で示したように、直方体上面に等分布荷重が作用するものとした。荷重については、次式で定義される無次元化荷重 Λ に換算し、常に $\Lambda = 1$ となるように与えた。

$$\Lambda = \frac{12(1-\nu^2)}{E\mu^4} p_0 \quad (41)$$

解析モデルの形状は、縦横比を $b/a = 1$ で一定とし、幅厚比を $\mu = 0.001 \sim 1.0$ の範囲で種々変化させて解析を行った。材料定数については、Poisson 比を $\nu = 0.3$ とした。

解析結果の表示にあたっては、変位・荷重・応力など、全ての物理量を無次元化して表した。従って、直方体(矩形平板)の領域 $[-a, a] \times [-b, b] \times [-t, t]$ についても、座標軸方向の長さ a , b および t でそれぞれ割り、領域が $[-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ となるように正規化した。サポートは、この正規化した領域で設定するため、常に、図-1に示したような、一辺の長さが 2ρ ($0 < \rho \leq 2.0$) の立方体となる。

EFGM 解析に際しては、サポート領域の大きさを表すサポートパラメータを $\rho = 0.3 \sim 2.0$ の範囲、Gauss 積分次数を $L_G = 2 \sim 10$ の範囲でそれぞれ変化させたほか、セル総数を $5 \times 5 \times 5 = 125$ あるいは $10 \times 10 \times 10 = 1000$ として解析を行った。また、節点数については、 $5 \times 5 \times 5 = 125$ および $11 \times 11 \times 11 = 1331$ の2通りとし、全て均等に配置した。境界条件については、直方体の周辺に位置する節点に関し、式(20)に従って変位を拘束した。

比較対象とした Fourier 解析については、級数の項数を $M = N = 100$ として計算した。この場合、直方体中央点のたわみについて、有効数字6桁以上の精度で解の収束が確認されている。なお、一部の解析結果については、Fourier

解析だけでなく、有限要素解析との比較も実施した。有限要素解析に際しては、汎用プログラム MARC を使用し、要素は8節点立体要素を用いて解析を行った。節点数、境界条件については EFGM 解析と同一としたほか、構造の対称性を利用して、全体の4分の1領域に対して解析を行った。

5. 解析結果および考察

5.1 たわみ (z 方向変位)

まず、直方体のたわみ (z 方向変位) に関する解析結果について述べる。解析結果を図-3~図-8に示す。

図-3および図-4は、直方体中央点の z 方向変位に関し、解析精度に及ぼす幅厚比の影響を示したものである。図中、横軸には直方体の幅厚比 μ を、縦軸には三次元弾性論に基づく Fourier 解析解を基準としたときの誤差 ε をそれぞれとって示した。また、図-3には、参考のために、Reissner-Mindlin 理論に基づく、Fourier 解析結果の誤差についても実線で示した。EFGM 解析の際には、サポートパラメータ $\rho = 1.0$, Gauss 積分次数を $L_G = 5$, セル総数を $5 \times 5 \times 5 = 125$ とした。

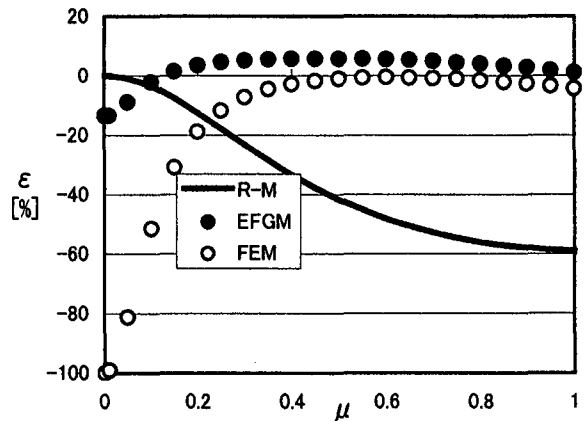


図-3 原点 O におけるたわみの解析誤差 (125 節点)

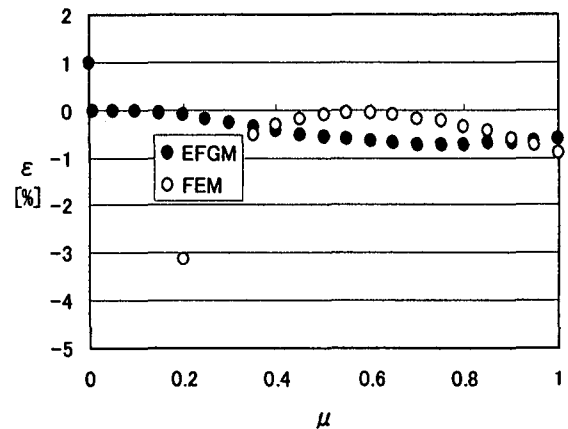


図-4 原点 O におけるたわみの解析誤差 (1331 節点)

両図から明らかなように、本研究のEFGM解析の場合、幅厚比 μ の値によらず、全体として比較的良好な近似解を与えていることが分かる。特に、節点数を1331節点に増加させた場合、誤差の絶対値が全て1.0[%]以内に収まっている。有限要素解析結果(FEM)と比較すると、幅厚比が $\mu < 0.1$ 程度の小さな領域では、FEMの場合、いわゆるshear lockingを起こし誤差が著しく増大しているのに対し、EFGMではlockingの発生がかなり低いレベルに抑えられている。ただし、Reissner-Mindlin理論に基づくFourier解析結果と比較すると、薄板と見なすことができる $\mu \leq 0.01$ の領域で、若干shear lockingを生じていることも分かる。

有限要素解析の場合、良く知られているように、高次要素を用いることで、shear lockingに伴う精度低下をある程度回避することができる²³⁾。今回、比較対象とした有限要素解析は、最も低次の要素を用いた結果である。一方、EFGM解析の場合、節点数とサポートの大きさにもよるが、一つの方向について2~8次程度の多項式で近似したことになり、高次要素を用いた有限要素解析と同等の解析結果が期待できる。この結果、図-3および図-4における、shear locking発生の差異が生じたものと考えられる。

一方、比較的幅厚比の大きな領域においては、 $0.4 \leq \mu \leq 0.9$ の範囲で、FEMの方がより良好な近似解を与えている。この点については、検討の余地が残るものの、幅厚比の大きさから考えて、両者の差異がlocking現象に起因するものとは考えられない。いずれにしても、誤差のレベルは両者とも低く、計算例が限られていることもあり、現時点で両者の優劣を議論することは困難である。

図-5および図-6は、直方体中央面($z=0$)における、たわみの誤差分布を表した図である。縦軸に誤差の絶対値をとって示した。解析モデルの幅厚比は $\mu=0.5$ である。幅厚比以外のパラメータについては、前述のとおり設定した。2つの図から明らかなように、特定の点だけでなく、全体的に見ても誤差が数パーセント以内に抑えら

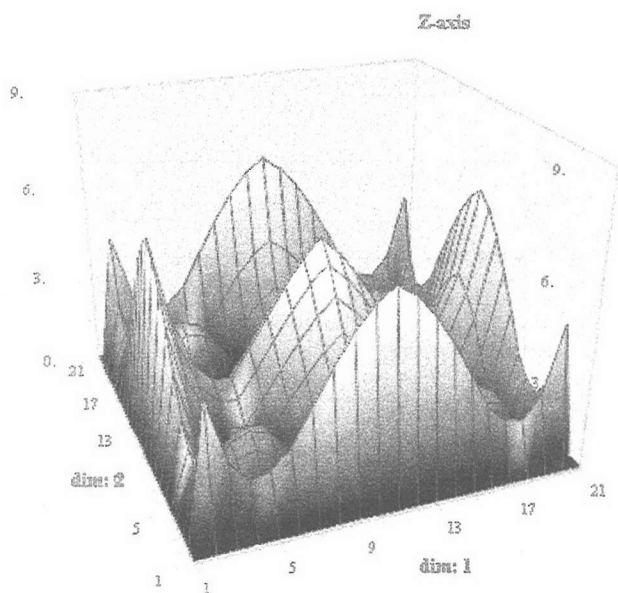


図-5 中央面におけるたわみの誤差分布 (125 節点)

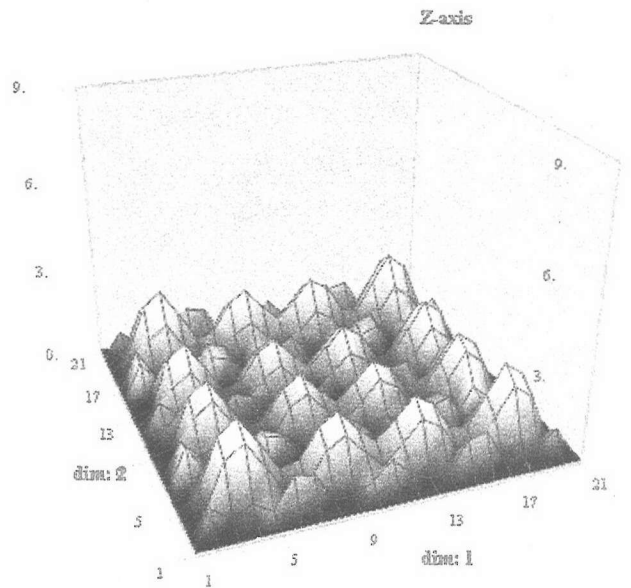


図-6 中央面におけるたわみの誤差分布 (1331 節点)

れていることが分かる。節点数を125から1331に増大させると、さらに誤差が低下し、全て3.0[%]未満に収まっている。また、節点数を増加させると、誤差分布の凹凸も増加する様子が見られる。

次に、EFGM解析結果に対する、各種パラメータ設定の影響について検討する。結果は、図-7および図-8に示した通りである。図-7および図-8は、いずれも原点Oにおけるたわみの解析誤差を示したものであるが、横軸にサポートパラメータ ρ およびGauss積分次数 L_G をそれぞれとって表した図である。両図共に、幅厚比 $\mu=0.5$ のモデルについての結果であり、セル総数125と1000の2つの結果を示した。なお、図-7は $L_G=5$ 、図-8は $\rho=1.0$ とした場合の解析結果である。

図-7を見ると、サポートパラメータ ρ の変化に伴って、解析誤差の大きく変動する様子が認められる。また、必ずしも ρ の増大に伴って誤差が減少するわけではなく、 $\rho=0.5, 1.0, 1.5, 2.0$ の付近において誤差が小さくなる一方で、中間の ρ に対しては、逆に誤差が大きくなっている。従って、サポートパラメータ ρ は、EFGM解析

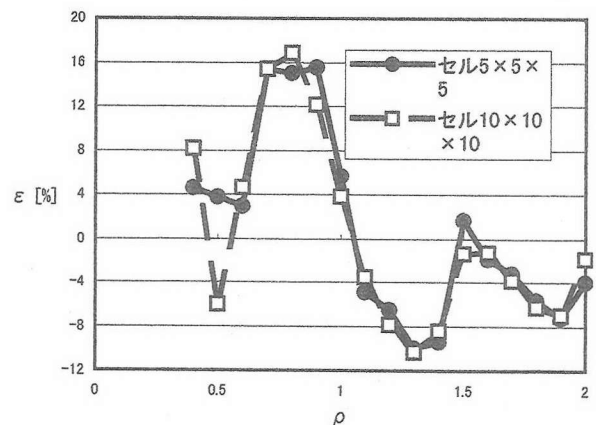


図-7サポートパラメータの影響 (たわみ)

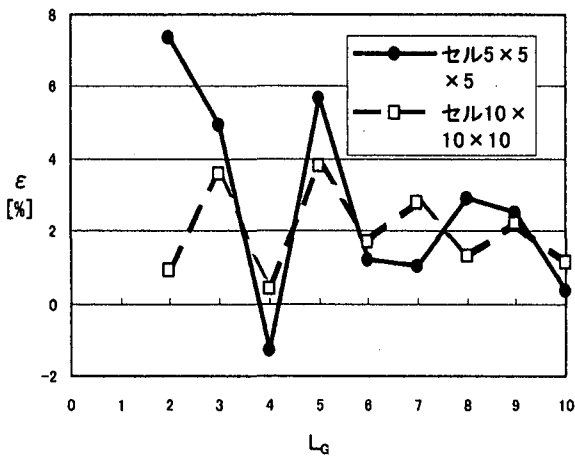


図-8 Gauss 積分次数の影響 (たわみ)

の結果に大きな影響を及ぼすことになる。適切な ρ の設定方法は必ずしも明確ではないが、筆者らのこれまでの研究成果^{9)・11)}を踏まえ、節点配置との兼ね合いもあるが、 $\rho=1.0$ 程度に設定すると、比較的広範囲の問題に対して良好な近似解が得られるようである。

図-8を見ると、Gauss 積分次数 L_g の変化に伴って、やはり解析誤差の変動する様子が認められるものの、 ρ の場合と異なり、 $L_g=2$ としない限り、誤差は比較的小さなレベルに止まっている。従って、サポートパラメータに比べれば、Gauss 積分次数が EFGM 解析の結果に及ぼす影響は小さいと考えられる。さらに、図-7および図-8の2つの図から、セル総数の影響について考察すると、必ずしも大きな影響は認められないものの、Gauss 積分次数を変化させた時に、セル総数の相違による若干の差異が見られた。

5. 2 面内変位分布

この節では、図-2における鉛直方向断面 A-A に沿った、x 方向の面内変位分布に関する解析結果について述べる。図-9～図-12に結果を示す。いずれの図も、幅厚比 $\mu=1.0$ の解析モデルに関する結果である。図中、横軸には無次元化変位 $\alpha=u/a$ を、縦軸には無次元化座標 $\zeta=z/t$ をそれぞれとって示した。

図-9および図-10は、FEM 解析との比較結果であり、EFGM 解析の際に設定したパラメータは、 $\rho=1.0$ 、 $L_g=5$ 、セル総数125である。図-9は125節点、図-10は1331節点のモデルにそれぞれ対応している。

図から明らかなように、 $\mu=1.0$ となるような幅厚比の大きな解析モデルについては、断面保持の仮定は最早成立せず、断面にゆがみを生じていることが分かる。EFGM 解析と FEM 解析とを比べると、節点数が125と少ない場合、FEM 解析結果が三次元 Fourier 解析結果との間に大きな差異を生じているのに対し、EFGM 解析についてはそれほど大きな差異は認められない。一方、節点数を1331に増大させれば、三者はほぼ同一の解析結果を与えていることが分かる。

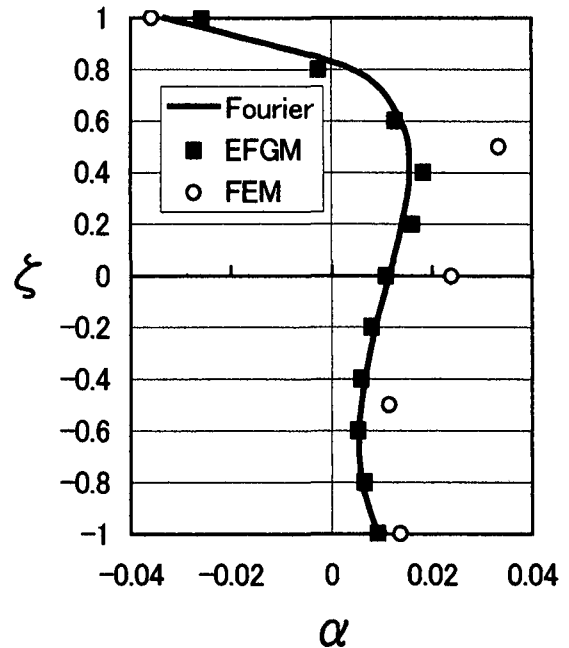


図-9 断面 A-A における面内変位分布 (125 節点)

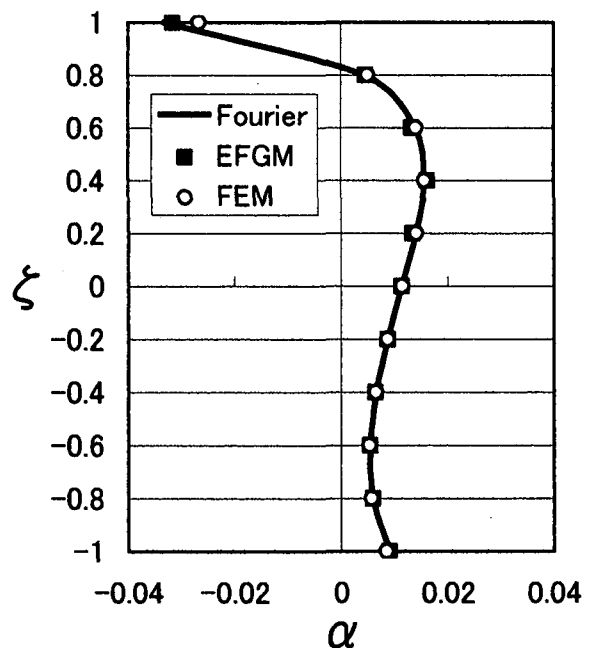


図-10 断面 A-A における面内変位分布 (1331 節点)

図-11および図-12は、面内変位分布に対する、サポートパラメータおよび Gauss 積分次数の影響を示す解析結果である。図-11は、Gauss 積分次数を $L_g=5$ で一定とし、サポートパラメータを $\rho=0.5, 0.8, 1.0$ の3通りに変化させた結果である。一方、図-12においては、サポートパラメータを $\rho=1.0$ で一定とし、Gauss 積分次数を $L_g=2, 5, 10$ の3通りに変化した。両者共に、節点数およびセル総数は125である。

図-11において、サポートパラメータの影響を比較すると、全体的な変形モードについては、概ね同様な形状

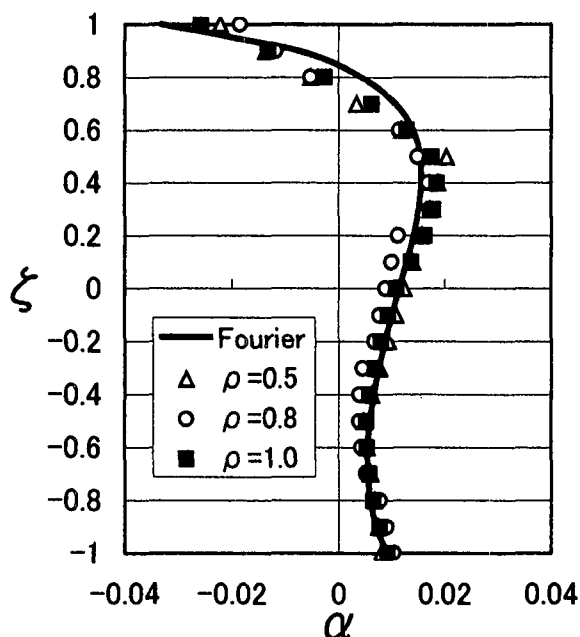


図-1 1 サポートパラメーターの影響 (面内変位分布)

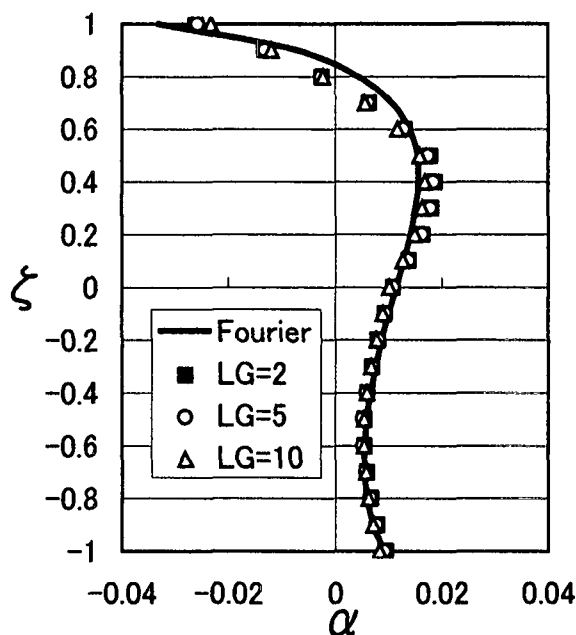


図-1 2 Gauss 積分次数 L_G の影響 (面内変位分布)

を示している様子が見られる。変形モードをやや細かく比較すると、断面の変形が大きくなる $\zeta > 0.5$ の領域において、 $\rho = 0.5$ および $\rho = 0.8$ の変位分布が、Fourier 解から若干乖離していることが分かる。また、 $\rho = 0.8$ の場合については、変形の小さな $\zeta < 0.2$ の領域においても差異が目立っている。前節で述べた、たわみに関する解析誤差の大きなパラメーター設定、すなわち $\rho = 0.8$ の場合には、面内変位分布についても良好な近似解は得られていない。

次に、図-1 2 において Gauss 積分次数の影響を比較すると、サポートパラメーターを $\rho = 1.0$ に設定する限り、面内変位分布に及ぼす Gauss 積分次数の影響はほとんど見られない。

たわみおよび面内変位分布におよぼす解析パラメーターの影響を総括すると、サポートパラメーターの影響がもっとも卓越しており、Gauss 積分次数やセル総数の影響は必ずしも大きくない。こうした傾向は、筆者らがこれまで行ってきた一次元問題や二次元問題の解析^{9)・11)}においても同様に認められ、線形解析の場合に共通した結果と考えることができる。

5. 3 垂直応力分布

ここでは、図-2 における鉛直方向断面 $B-B$ に沿った、 x 方向の垂直応力分布に関する解析結果について述べる。図-1 3 および図-1 4 に結果を示す。図-1 3 は、幅厚比 $\mu = 0.5$ の解析モデルに関する EFGM 解析の結果であり、図-1 4 は幅厚比 $\mu = 1.0$ の結果である。EFGM 解析の際に設定したパラメーターは、 $\rho = 1.0$ 、 $L_G = 5$ 、セル総数 125 である。図中、縦軸は無次元化座標 $\zeta = z/t$ であるが、横軸には次式で定義される無次元化垂直応力 σ_ξ をとった。

$$\sigma_\xi = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} \sigma_x = (1-\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y + \nu\varepsilon_z \quad (42)$$

2つの図から明らかなように、垂直応力の分布については、たわみや面内変位分布と異なり、EFGM 解析と Fourier 解析との間に差異が認められる。この傾向は、幅厚比 μ が大きなモデルについてより顕著であり、節点数が 125 の場

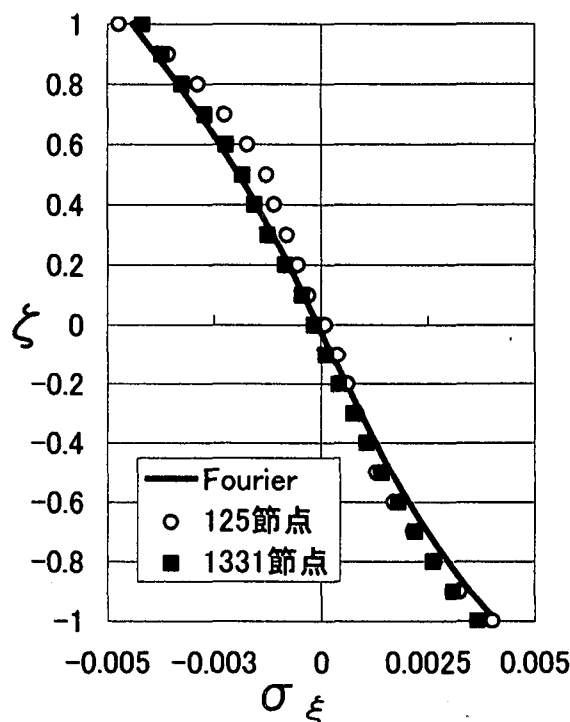


図-1 3 断面 $B-B$ における垂直応力分布 ($\mu = 0.5$)

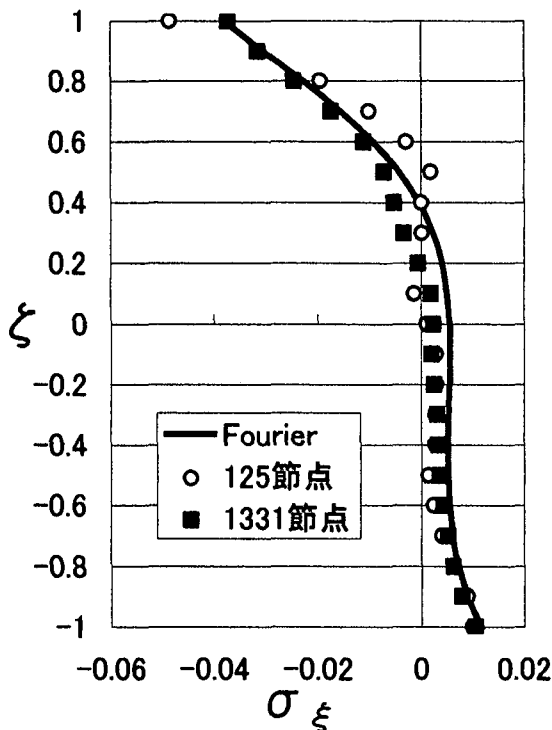


図-1 4 断面B-Bにおける垂直応力分布 ($\mu = 1.0$)

合には、滑らかな応力分布曲線が得られていない。節点数を125から1331に増大させた場合であっても、直方体中央部における差異が残存する。一方、幅厚比 μ が小さなモデルについては、節点数を増大させることで、かなり良好な解析結果を求めることができる。

本研究では、2.3節で述べたように、仮想仕事の原理に従って定式化を行っているため、解析手法としては変位法に分類される。このため、応力の解析結果に関する精度の低下は、ある程度予想される結果である。こうした問題点は、仮想仕事の原理に代えて混合型の変分原理を用いることで、克服することが可能であると考えられる。また、図-1 3における今回の解析結果が示すように、幅厚比が“厚板”程度の直方体については、本研究で述べた単純なEFGM解析であっても、節点数を増加させるだけで充分良好な近似解を求めることができる。

6. 結論

本研究の解析結果から、以下の結論が得られた。

- 1) Lagrange 多項式に基づく EFGM 解析は、三次元弾性問題に対しても、充分適用可能である。
- 2) 本研究で提案した EFGM を平板の曲げ解析に適用した場合、広範囲の幅厚比に対応することができる。特に、幅厚比が小さな薄板を解析対象とした場合であっても、shear locking の発生をある程度回避することができる。
- 3) 本研究の EFGM における3つの解析パラメーター、すなわち、サポートパラメーター、Gauss 積分次数およびセル総数の中では、サポートパラメーターが数値

参考文献

- 1) Belytchko, T., Lu, Y. Y., and Gu, L.: Element-free Galerkin methods, Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol.37, pp.229-256, 1994.
- 2) Lancaster, P., and Salkauskas, K.: Surfaces generated by moving least-squares methods, Math. Comput., Vol.37, pp.141-158, 1981.
- 3) Nayroles, B., Touzot, G., and Villon, P.: Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements, Computational Mech., Vol.10, pp.307-318, 1992.
- 4) 杉原健児, 今村純也: 不等距離差分法による応力解析(その4), 日本建築学会論文報告集, 第178号, pp.17-25, 1970.
- 5) Liszka, T. J., Duarte, C. A. M., and Tworzydło, W. W.: hp-meshless cloud method, Comput. Meth. Appl. Mech. & Eng., Vol.139, pp.263-288, 1996.
- 6) Belytchko, T., Krongauz, Y., Organ, D., Fleming, M., and Krysl, P.: Meshless methods: An overview and recent developments, Comput. Meth. Appl. Mech. & Eng., Vol.139, pp.3-47, 1996.
- 7) Atluri, S. N., and Zhu, T.: New concepts in meshless methods, Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol.47, pp.537-556, 2000.
- 8) Aluru, N. R., and Gang, Li: Finite cloud method: a true meshless technique based on a fixed reproducing kernel approximation, Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol.50, pp.2373-2410, 2001.
- 9) Suetake, Y.: Simple element free method based on Taylor expansion, Finite Elem. Appl., ASME(PVP), Vol.370, pp.89-94, 1998.
- 10) Suetake, Y., and Uchida, S.: Two-dimensional analysis by using element-free method based on Lagrange polynomial, Proc. JSSB-JK6, pp.75-82, 2001.
- 11) Suetake, Y.: Element-free method based on Lagrange polynomial, J. Eng. Mech., ASCE, Vol.128, No.2, pp.231-239, 2002.
- 12) Krongauz, Y., and Belytchko, T.: Enforcement of essential boundary conditions in meshless approximations using finite elements, Vol.131, pp.133-145, 1996.
- 13) 長嶋利夫, 奥田洋司, 矢川元基: エレメントフリーガラキン法に関する基礎的検討(第2報, 二次元ポテンシャル問題への適用), 日本機械学会論文集(A編), 62巻, 599号, pp.218-225, 1996.
- 14) Gavete, L., Benito, J. J., Falco, S., and Ruiz, S.: Implementation of essential boundary conditions in a meshless method, Commun. Numer. Meth. Engng., Vol.16, pp.409-421, 2000.
- 15) 井浦雅司, 庭山孝史: Element Free Galerkin Methodにおける基本境界条件の処理, 構造工学論文集, Vol.43A, pp.355-364, 1997.

- 16) Krysl, P. and Belytchko: The element free Galerkin method for dynamic propagation of arbitrary 3-D cracks, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.44, pp.767-800, 1999.
- 17) Duarte, C. A. M., Hamzeh, O. N., Liszka, T. J., and Tworzydło, W. W.: A generalized finite element method for the simulation of three-dimensional dynamic crack propagation, *Comput. Meth. Appl. Mech. & Eng.*, Vol.190, pp.2227-2262, 2001.
- 18) Belytchko, T., Krysl, P., and Krongauz, Y.: A three-dimensional explicit element-free Galerkin method, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol.24, pp.1253-1270, 1997.
- 19) 川端浩司, 村上章, 青山咸康: EFGM による水～土連成解析, *応用力学論文集*, Vol.2, pp.295-302, 1999.
- 20) Bellman, R. E., and Casti, J.: Differential quadrature and long-term integration, *J. Math. Analysis Appl.*, Vol.34, pp.235-238, 1971.
- 21) 水澤富作, 近藤八重: Differential Quadrature 法を用いた扇形 Mindlin 板の振動解析, *土木学会論文集*, No.661/I-53, pp.221-230, 2000.
- 22) 土木学会: 構造力学公式集, 第2版, 1999.
- 23) Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L.: *The Finite Element Method*, 4th ed., Vol. 2, 1991.

(2003 年 4 月 18 日 受付)