

有限被覆法の弾塑性問題への適用とその性能評価

Application of the finite cover method to elastic-plastic problems and its evaluation

車谷麻緒*・浅井光輝**・寺田賢二郎***

Mao KURUMATANI, Mitsuteru ASAI, Kenjiro TERADA

*学生会員 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

**正会員 工博 Department of Mechanical Engineering, Ohio State University (206 West 18th Avenue Columbus, OH 43210-1107, USA)

***正会員 Ph.D. 東北大学助教授 大学院工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

The finite cover method (FCM) is applied to elastic-plastic problems and its performance is evaluated in comparison with the standard finite element method (FEM). First, we examine the influence of the location of integration points for stress evaluation in the FCM. Next, using the reference solution available in articles, we demonstrate the performance of the FCM to reproduce the mechanical behavior that is typical in elastic-plastic plate with a hole. Then, the performance is also examined for the approximation at the material interfaces of multi-phase materials. Finally, after proposing a new modeling method for FCM with level set function, we realize the capabilities of the FCM to characterize the elastic-plastic mechanical behavior of meso-structures of materials.

Key Words : Elastic-plastic FCM, Augmented Lagrangian Method, Penalty Method, Multi-phase materials, Level set modeling

1. はじめに

近年、計算工学および計算機の性能は目覚ましい発展を遂げており、それに伴って複雑な物理現象の数値シミュレーションが可能となった。また、材料設計分野においても、ミクロ構造やメゾ構造などの微視的構造特性やその非線形挙動を反映した巨視的応答を評価する解析が行われるようになってきている¹⁾。しかし、このような解析技術の発展や需要に付随して、計算の大規模化あるいは解析モデルの複雑化は避けられず、複雑かつ大規模な問題に対して非線形応答までもを念頭に置くと、従来型のモデル化や解析技術も転換を求められている。

これらの問題に対処する手法として、デジタルイメージにおける画素を有限要素と同一視するイメージベース有限要素法 (IB-FEM)²⁾が注目を集めている。しかし、この手法がどれだけ複雑な構造を容易にモデル化できたとしても、物理境界の階段状近似に起因する特異性の発現や解析が大自由度になるといった問題は避けられず、そのままでは材料非線形や幾何学的非線形などの各非線形挙動の追跡には向いていないと言われている。

また、GFEM³⁾やX-FEM⁴⁾に代表される一般化有限要素法も解決策として挙げられるが、これらは境界条件の扱いや領域積分が煩雑であったり、非均質な多相構造に対する各非線形問題への適確な対応は困難なものとなっている。また、大坪ら⁵⁾はFEMの代わりに有限被覆法 (FCM) と呼ばれる新規の解析手法を用いて定形メッシュのみでメッシュフリー的な解析を試みているが、多相材料における微視的構造の力学挙動の正確な評価には至っていない。これに対し、浅井ら⁶⁾はHybrid型変分原理に基づく新規のFCM (Hybrid-FCM) を開発し、Augmented Lagrangian法を適用することにより多相材

料の解析に成功しており、FCMの将来性に大きな期待を持たせた。しかし、材料構成則は線形弾性体に限られており、塑性変形を伴うような一般的な多相材料の解析への適用は十分とは言えない。また、このHybrid-FCMが有する近似性能に関して、参照解やFEMの解との詳細な比較による検討は行われておらず、従来のFCMで用いられていたペナルティ法との比較も連立方程式のソルバーの都合上から暫定解との比較にとどまってお

り、その性能評価は十分とは言えない。そこで本研究では、複雑な幾何学的特性や非均質性を有する構造体のメッシュレス的な解析が可能な有限被覆法 (Hybrid-FCM)⁷⁾を、弾塑性問題の解析手法として拡張し、幾つかの数値実験を行って、その近似性能の評価を行う。FCMの定式化の概要を述べたのちに、弾塑性問題への適用を前提として以下の3項目についての基礎検討・性能評価を行う。

- 要素内に任意形状の物理領域の存在を許すFCMに用いる応力評価点 (ガウス積分点) の影響。
- 円孔穴あき問題に対する参照解を用いた弾塑性FCMの近似性能。
- 非均質構造 (多相材料) に対する弾塑性FCMの近似性能。

また最後に、画像データとレベルセット関数を用いた新規のモデリング手法を提案し、FCMとこれを併用することにより、複雑な幾何形状を有する非均質体メゾ構造の弾塑性解析への応用が可能であることを例示する。

2. Finite Cover Method

本節では、Shi⁸⁾により一般化有限要素法のひとつとして提案されたマニフォールド法の基本概念を継承す

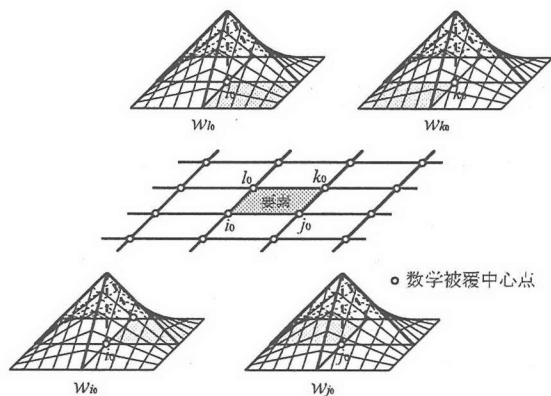


図-1 2次元問題における FCM の重み関数

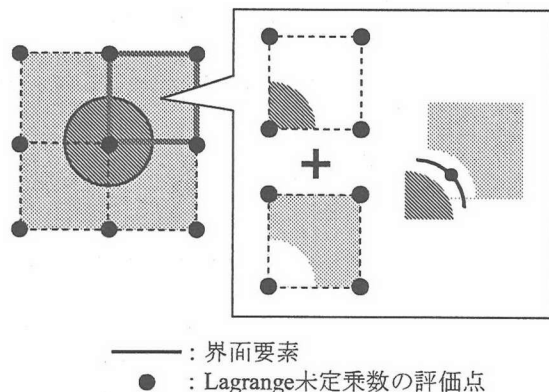


図-2 多相材料における FCM

る有限被覆法 (Finite Cover Method ; FCM) の近似の考え方について概説する。また、多相材料の解析手法として拡張した Hybrid-FCM についても簡単に述べておく。

2.1 FCM の概説

(1) 被覆

FEM は、解析対象を要素という部分領域に分割して近似を導入し、各々の式をその要素の結合情報から、再び全体系への連立代数方程式に組み立てなおすという方法論をとる。これに対し、FCM では、解析対象の分割と再構築という点では FEM と同様であるが、「近似関数が定義される数学的部分領域」と「支配方程式が満たされるべき物理的部分領域」を分離して考えるという点で FEM とは大きく異なる。前者は「数学被覆」と呼ばれ、これを物体領域を余すところなく覆い尽くすよう重ね合わせられ、物体領域と数学被覆が重なり合う領域「物理被覆」において剛性方程式を組み立てることとなる。

(2) 関数の定義

各数学被覆 i において、変位を規定するために次のような 2 つの関数が定義される。

$u_i(x, y)$: 被覆変位関数

$w_i(x, y)$: 重み関数

重み関数としては、数学被覆内ではある値を持ち、数学被覆外では零となるようなものを考える。すなわち、重み関数は数学被覆を M_i とすると以下のように表される。

$$w_i(x, y) \geq 0 \quad (x, y) \in M_i$$

$$w_i(x, y) = 0 \quad (x, y) \notin M_i$$

また、この重み関数は、数学被覆同士の共通領域での総和が 1.0 であるといった制約 (Partition of Unity) が課される (図-1)。

$$\sum_{x, y \in M_i} w_i(x, y) = 1$$

本研究では、この数学被覆の共通領域を数学要素と呼ぶこととする。そして、被覆変位関数を各被覆におい

て定義し、それらを重み付き和として重ね合わせることで全体変位関数が以下のように定義される

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^k w_i(x, y) u_i(x, y)$$

ここで、 k は定義する数学被覆の総数を示す。

FCM では、被覆変位関数 $u_i(x, y)$ 、重み関数 $w_i(x, y)$ を適宜調節することで高次化は可能⁹⁾であるが、本研究では標準的な低次の被覆を用いることとする。具体的には、重み関数として図-1 に示される FEM の双一次の形状関数を使用し、被覆変位関数 $u_i(x, y)$ は区分的な定数関数とする。

また、多相 (二相) 材料における FCM では図-2 に示されるように、各材料ごとに異なる数学被覆を多重に設定する必要があり¹⁰⁾、異種材料界面における物理量は Lagrange 未定乗数を用いて近似することとなる。

2.2 Hybrid-FCM

FCM により多相材料を解析する際には、異種材料間でのひずみの不連続性の表現性に期待できる反面、数学被覆全体で解析自由度を定義する FCM の特性から、FEM とは異なり異種材料界面に節点のような解析自由度が存在するとは限らないため、一般的に異種材料間での変位の連続性を明示的に付加できない。そこで浅井ら⁶⁾は、連続条件緩和型の変分原理¹¹⁾に基づき異種材料界面での変位の連続性を近似的に満足させる Hybrid-FCM を提案している。本節では、弾塑性構成式の導入を前提として、この Hybrid-FCM の基礎となる変分方程式を与える。

(1) 基礎方程式

図-3 に示される二相材料の静的つり合い問題を考える。このとき、つり合い式、適合条件式はそれぞれ次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \sigma^+ + \bar{f}^+ &= 0 & \text{in } \Omega^+ \\ \varepsilon^+ &= \frac{1}{2} \{ \nabla u^+ + (\nabla u^+)^T \} & \text{in } \Omega^+ \end{aligned}$$

ここで、 u, σ, ε は、それぞれ変位、Cauchy 応力、微小ひずみであり、 $\bar{f}$ は物体力を示している。また、 $(\cdot)^+$ は

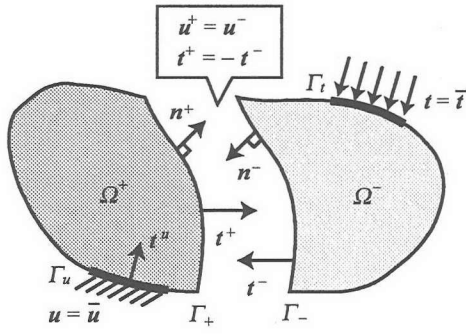


図-3 多相(二相)材料の物理問題

それぞれの領域(Ω⁺あるいはΩ⁻)内で定義される物理量であることを示しており、(・)は既知量を示している。

また、次に示す基本境界条件と異種材料界面における連続条件を満足させる必要がある。

$$u = \bar{u} \quad \text{on } \Gamma_u \quad (1)$$

$$t := \sigma n = \bar{t} \quad \text{on } \Gamma_t$$

$$u^+ = u^- \quad \text{on } \Gamma_\pm \quad (2)$$

$$t^+ = -t^- \quad \text{on } \Gamma_\pm$$

ここで t は外向き単位法線ベクトル n で規定される面における単位面積あたりの表面力を示す。

本研究では弾塑性問題に対して、等方硬化に基づく J_2 流れ則を仮定し、以下の弾塑性構成式を設定する。塑性変形に関する自由エネルギー関数 U は、弾性エネルギー W とひずみ硬化によるポテンシャルエネルギー A を用いて次のように定義される。

$$U(\varepsilon, \varepsilon^p, \alpha) := W(\varepsilon - \varepsilon^p) + A(\alpha)$$

ここで、 ε^p は塑性ひずみ、 α は等方硬化に関する内部変数である。このとき、応力 σ とひずみ ε の関係は

$$\sigma = \frac{\partial W(\varepsilon - \varepsilon^p)}{\partial \varepsilon}$$

で与えられ、内部変数 α と共役な硬化パラメータ q が次のように表される。

$$q = -\frac{\partial A(\alpha)}{\partial \alpha} = -\nabla A(\alpha)$$

また、最大塑性仕事の原理から塑性 consistency パラメータ γ を用いて、流れ則および硬化則は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}^p &= \gamma \frac{\partial f(\sigma, q)}{\partial \sigma} \\ \dot{\alpha} &= \gamma \frac{\partial f(\sigma, q)}{\partial q} \end{aligned}$$

ここで、 $(\dot{\cdot})$ は時間微分を表している。また、 f は Mises の降伏関数であり、初期降伏応力 σ_Y と Cauchy 応力の偏差成分 $\text{dev}(\sigma)$ を用いて次のように表される。

$$f(\sigma, q) := \|\text{dev}(\sigma)\| + q - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_Y$$

この降伏関数 f は、等方硬化係数 H を用いて塑性硬化ポテンシャル A を $A(\alpha) = \frac{1}{2} H \alpha^2$ と仮定することにし、次のように書きかえておく。

$$f(\sigma, \alpha) := \|\text{dev}(\sigma)\| - \left(H \alpha + \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_Y \right)$$

さらに、最大塑性仕事の原理を仮定しているため、この降伏関数の凸性および載荷・除荷条件が Kuhn-Tucker 形式

$$f \leq 0, \quad \gamma \geq 0, \quad \gamma f = 0$$

で与えられ、整合条件は $\gamma \dot{f} = 0$ となる。

(2) 連続条件緩和型変分原理と弱形式のつり合い式

本研究で用いる Hybrid-FCM⁶⁾は、基本境界あるいは異種材料界面において変位に対する拘束条件が与えられる問題について、連続条件緩和型の変分原理を基礎とした解析手法である。図-3の系において、全ポテンシャルエネルギーは次式により与えられる。

$$\Pi_P = \int_{\Omega^\pm} \left(\frac{1}{2} \sigma : \varepsilon - \bar{f} \cdot u \right) d\Omega - \int_{\Gamma_t} \bar{t} \cdot u d\Gamma$$

FCM では、数学被覆と物理被覆は独立に定義されるため、物理境界上に FEM における節点のような解析自由度が存在するとは限らない。従って、式(1),(2)の幾何学的境界条件を付帯拘束条件として加えなければならない。この付帯条件は、Lagrange 未定乗数 λ を導入することで取り除くことができ、エネルギー汎関数

$$\begin{aligned} \Pi_{HP}(u, \lambda) &= \Pi_P - \int_{\Gamma_u} \lambda \cdot (u - \bar{u}) d\Gamma \\ &\quad - \int_{\Gamma_\pm} \lambda \cdot (u^+ - u^-) d\Gamma \end{aligned} \quad (3)$$

の停留解は次式に示す弱形式のつり合い方程式の解でもある。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^\pm} \nabla \delta u : \sigma d\Omega - \int_{\Gamma_u} \delta u \cdot \lambda d\Gamma \\ - \int_{\Gamma_\pm} \delta u^+ \cdot \lambda d\Gamma + \int_{\Gamma_\pm} \delta u^- \cdot \lambda d\Gamma \\ = \int_{\Omega^\pm} \delta u \cdot f d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta u \cdot t d\Gamma \end{aligned} \quad (4)$$

$$\int_{\Gamma_\pm} \delta \lambda \cdot (u^+ - u^-) d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \delta \lambda \cdot (u - \bar{u}) d\Gamma = 0 \quad (5)$$

ここで、 δ を付加した変数は斉次の境界条件を満たす変分量である。また、この停留解において Lagrange 未定乗数 λ は次式のように物理境界面での表面力という物理的な意味を有している。

$$\begin{aligned} \lambda &= t'' \quad \text{on } \Gamma_u \\ \lambda &= t^+ = -t^- \quad \text{on } \Gamma_\pm \end{aligned}$$

(3) ペナルティ法と Augmented Lagrangian 法

弱形式のつり合い方程式(4),(5)を離散化して解く際、従来の変位法に準ずる FCM では、変位の境界条件は

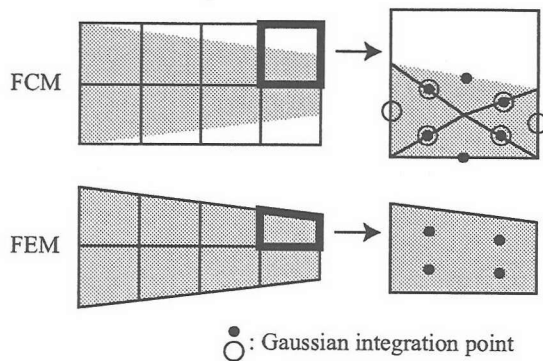


図-4 応力評価点の相違

ペナルティ法により処理されてきた。ペナルティ法は、式(3)におけるLagrange未定乗数がペナルティ係数 p を用いて

$$\lambda = \frac{1}{2}p(u - \bar{u}) \quad \text{on } \Gamma_u$$

$$\lambda = \frac{1}{2}p(u^+ - u^-) \quad \text{on } \Gamma_\pm$$

と近似され、変位のみを独立変数として離散化方程式を解く方法である。ただし、解のパラメータ依存性を回避するため、ペナルティ係数には一般に大きな値が設定される。これに対し、Augmented Lagrangian法(ALM)¹²⁾は、ペナルティ法のような置換は行わず、変位とLagrange未定乗数の両者を独立変数として離散化方程式を反復的に解く手法である。本研究ではALMを適用するが、その定式化についての詳細は文献^{6),12)}を参照されたい。

文献⁶⁾では、連立方程式の解法に共役勾配法(反復法)を用いていたため、ペナルティ法を用いた際に剛性行列の条件数が悪化し、収束解が得られていない。そのため、従来法であるペナルティ法の特長や有効性、欠点等に対する定量的な評価、考察が十分ではなかった。これに対し、本研究では連立方程式の解法に直接法を用いることにより、解法上の不備を解消させ、ペナルティ法を用いた際のFCMの性能評価が可能となっている。また、ALMによる反復計算時においては、剛性行列は修正されることはなく、荷重ベクトルのみが修正される。よって、直接法を用いた際、剛性行列を一度 LDL^T 分解すれば、ALMによる繰返し計算は後退代入だけでよく、計算負荷が反復法に比べて軽減することからALMに対しても相性が良いといえる。

3. 応力評価点に関する検討

一般に、FEMの双一次の四辺形要素に用いる応力評価点(ガウス積分点)は、精度や位置に対して、その保障は十分であると言われている。これに対し、図-4に示されるように、FCMでは支配方程式を満足させる物理被覆、すなわち積分領域は任意形状を許しているため、FEMで一般的に行われる4点ガウス積分は適用できない。そのため、通常は積分領域を三角形に分割し三角形のガウス積分を行うことになる。本節では、変

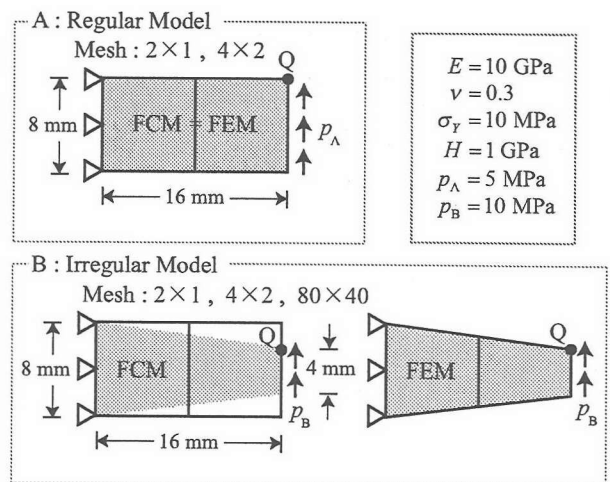


図-5 解析モデルと解析条件

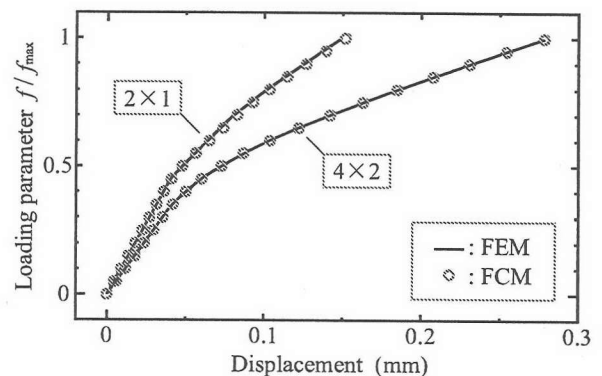


図-6 解析結果：荷重－変位関係 (A)

位法に基づく双一次の四辺形要素によるFEMとの比較を通して、この三角形のガウス積分がもたらす精度への影響や応力評価について基礎検討を行う。

3.1 解析モデル

検討に際し、図-5に示されるような2種類の解析モデルを用意する。A: Regular ModelではFCMとFEMのメッシュ形態が一致する。すなわち、このモデルにおいては応力評価点のみの相違に限定した比較・検討を行う。また、B: Irregular Modelでは実際にFCMで物理境界上において起こりうる任意多角形の物理領域(積分領域)に関する影響を調べる。なお、材料パラメータやメッシュ分割数は同図の通りとし、ヤング率を E 、ポアソン比を ν 、降伏応力を σ_Y 、硬化パラメータを H としている。

3.2 解析結果と考察

まず、図-5の●印Q点における荷重－変位関係をモデルAについては図-6に、モデルBについては図-7にそれぞれ示す。まずモデルAでは、荷重最終ステップ時におけるFEMとFCMの変位の差が 2×1 の場合で 2.52×10^{-3} 、 4×2 の場合で 6.05×10^{-4} であり、メッシュ分割の相違に依らずFEMとFCMの結果はほとんど一

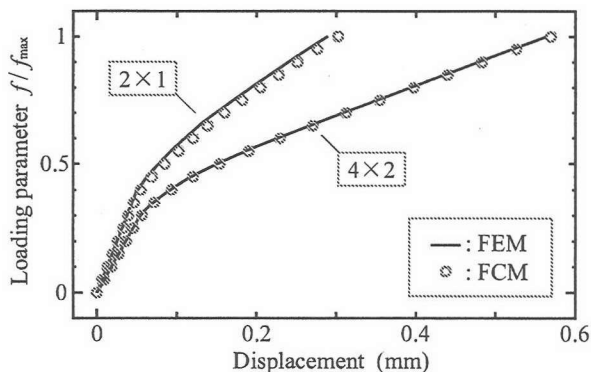


図-7 解析結果：荷重－変位関係 (B)

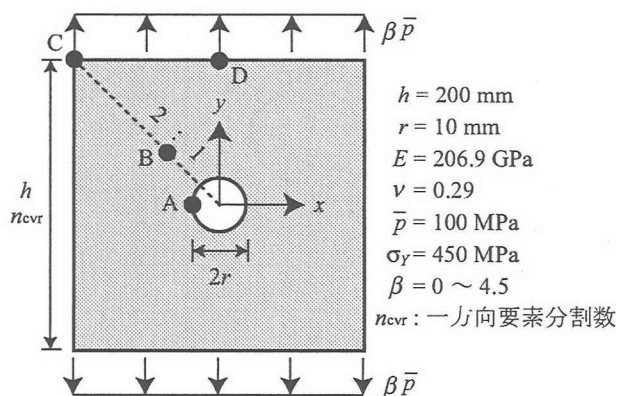


図-9 円孔穴あき問題

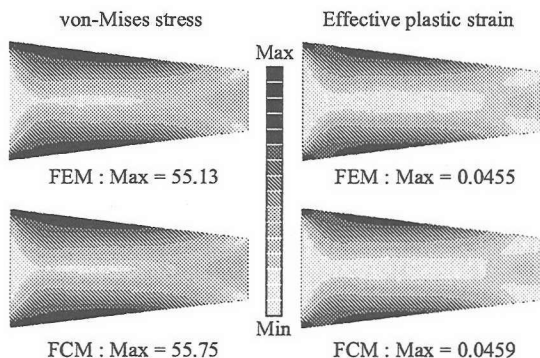


図-8 解析結果：応力・ひずみ分布 (B: 80×40)

致したものとなっている。これに対して、モデル B のメッシュ分割が 2×1 の場合には、荷重最終ステップ時における変位の差が 1.33×10^{-2} となり両者の結果に差が生じている。これはガウス点の相違の影響と見ることもできるが、FCM と FEM の要素が有する近似性能の相違が解析結果に影響していると見る方が適切である。その証拠に、メッシュ分割をもう一段階細かくした 4×2 の場合では、FCM と FEM の結果はほとんど一致したものとなっており、荷重最終ステップ時における変位の差も 5.58×10^{-3} に減少している。従って、実際のメッシュ分割を考えると、荷重－変位関係において、ガウス点の相違による影響は無視できるほど小さいといえる。

次に、モデル B のメッシュ分割 80×40 に対する最終荷重ステップ時の von-Mises 応力分布と相当塑性ひずみ分布を図-8 に示す。この図から分かるように、応力およびひずみ分布に関して、局所的な値は各々 1% 程度の差異があるものの全体としての分布には特に目立った違いはない。

以上の解析結果から、弾塑性問題に FCM を適用するに際して、三角形のガウス積分を用いることの悪影響は軽微であると結論付けられる。

4. 円孔穴あき問題に対する参照解との比較

本節では、弾塑性 FCM が有する近似性能あるいはその解の表現能力、信頼性を確かめるべく、特徴的な弾塑性挙動を示す円孔穴あき問題を対象に、既存の参照解¹³⁾との比較を行う。

多相材料の解析において、FCM では一般に異種材料界面に解析自由度が存在しないことから母材と介在物の物理問題を独立に定義し、これらを Lagrange 未定乗数で結びつけるということは 2 節で述べた。これによると、母材では穴あき問題となることから多相材料の解析においても本節で行う検討は弾塑性 FCM の性能評価として不可欠なものである。

4.1 比較対象解析諸元と比較項目

図-9 に示すような中心に円孔を含む正方形板の 2 次元平面ひずみ問題を考える。材料構成関係は完全弾塑性を仮定しており、各材料パラメータは同図中に与えた。図中の E はヤング率、 ν はポアソン比、 σ_Y は降伏応力、 β は荷重パラメータであり、 n_{cvr} は 30, 50, 100 の 3 ケースとする。この円孔穴あき問題に対する参照解としては、19 次の高次要素による有限要素解を採用している¹³⁾。

参照解と弾塑性 FCM の解との比較項目は図-9 の点 A の u_x 、点 B の σ_{xx} 、点 C の u_x 、点 D の u_y とする。

4.2 解析結果と考察

点 A の u_x について参照解と弾塑性 FCM の解を比較した図を図-10 に示す。点 A の参照解では、塑性変形が始まると局所的な負荷効果が観察されるのが、FCM の解でも自由度の増加に伴い同様の傾向が十分に表れている。

次に、点 B の σ_{xx} について参照解と弾塑性 FCM の解を比較した図を図-11 に示す。点 B の参照解では、最後にスナップバックが発生するが、これについても FCM の解は同様の挙動を表現している。

また、点 C の u_x と点 D の u_y については、荷重ステップ最終段階 $\beta = 4.5$ のときの参照解と FCM の解の誤差を表した図を図-12 に示す。この図では、自由度の増加に伴い誤差が零に漸近していく傾向が表現されている。

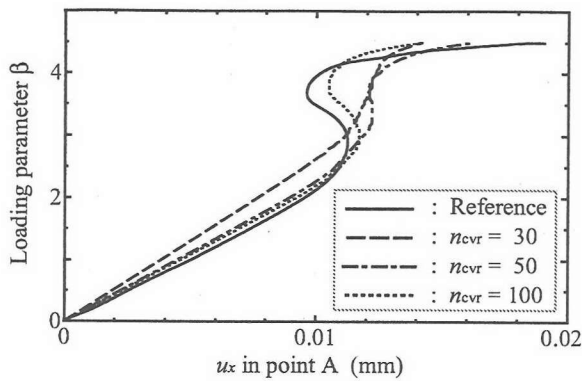


図-10 点 A における u_x の比較

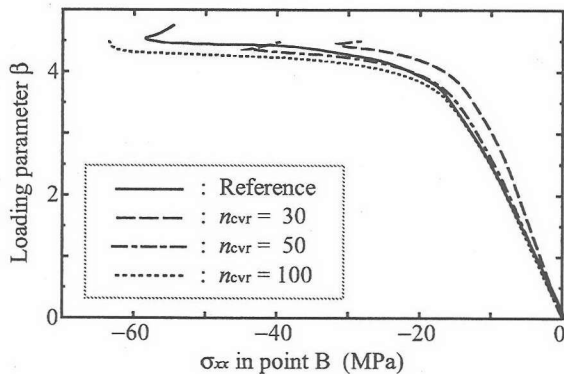


図-11 点 B における σ_{xx} の比較

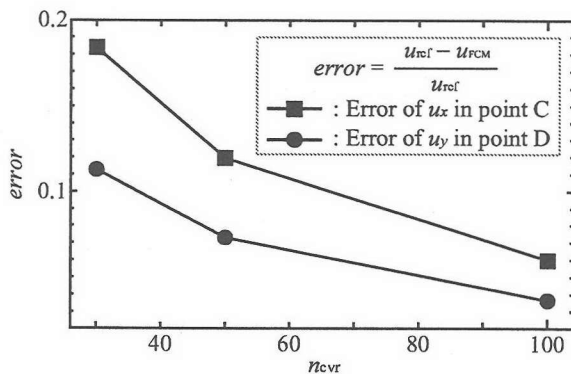


図-12 点 C, D における u_x, u_y の比較

以上の結果から、弾塑性 FCM は妥当な近似解を与えているといえる。

5. 多相材料における解の検討

本節では、多相材料を解析する際の、特に異種材料界面での弾塑性 FCM の近似性能およびその解の信頼性について、変位法に基づく双一次四辺形要素による FEM の解との比較を通じて検討する。また、異種材料界面での境界条件処理法に用いるペナルティ法および Augmented Lagrangian 法 (ALM) の近似特性についても

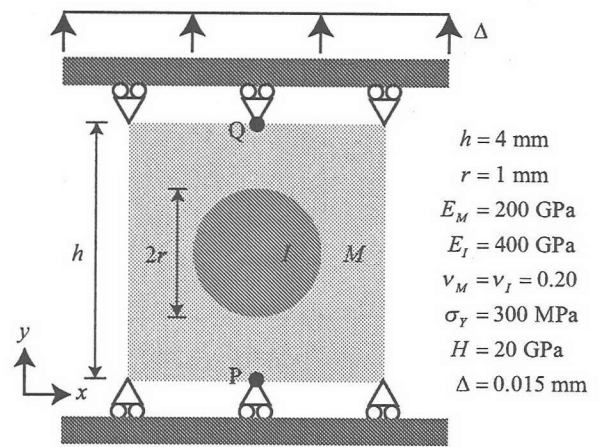


図-13 比較対象解析モデル

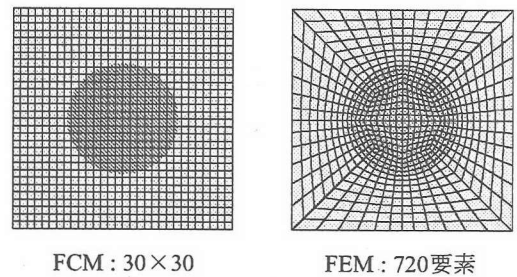


図-14 FCM と FEM のメッシュ分割

検討を行う。

5.1 解析モデル

2 次元平面ひずみ状態を仮定して、図-13 に示されるような正方形母材 (M) に円形介在物 (I) を有する簡易な二相材料からなる解析モデルを設定し、図中の y 軸方向に変位制御で引張りを与える。母材を弾塑性体、介在物を線形弾性体と仮定し、材料パラメータは同図に与えた通りである。ここで、 E はヤング率、 ν はポアソン比、 σ_Y は初期降伏応力、 H は硬化パラメータである。また、ペナルティ法を用いて計算する際のペナルティ係数は

$$\hat{p} = E_M \times 10^5$$

としている。

この解析モデルに対し、要素数は図-14 に示されるように、FEM では 720 要素、FCM では定形 30×30 の 900 要素とする。一般的にこのような解析対象に対し、FEM では図-14 に示されるように、内側から外側に広がるような放射状のメッシュ分割となるため、FEM と FCM の全自由度数を一致させることは困難である。よって、ここでは FEM の要素数とほぼ同程度となり、さらに異種材料界面付近の要素サイズもほぼ同程度となるように FCM のメッシュ分割を 30×30 と決定した。なお、異種材料界面での境界条件処理法としてのペナルティ法と ALM の近似特性の比較を詳細に行うため、変位の基本境界条件は FEM、FCM とともに自由度消去

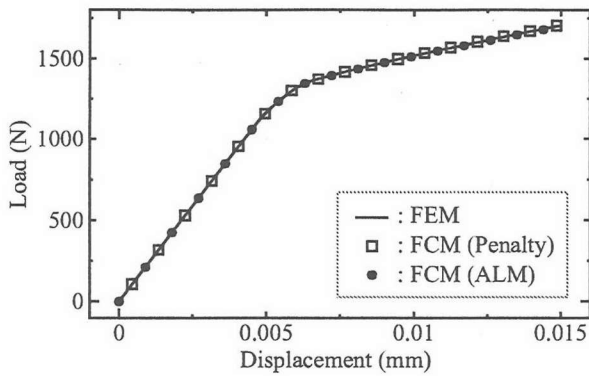


図-15 荷重－変位関係

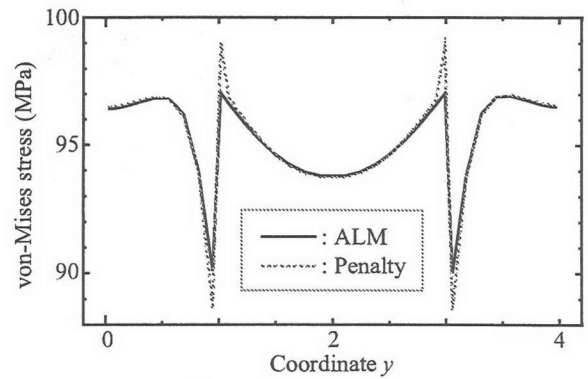


図-17 線分 PQ における応力分布

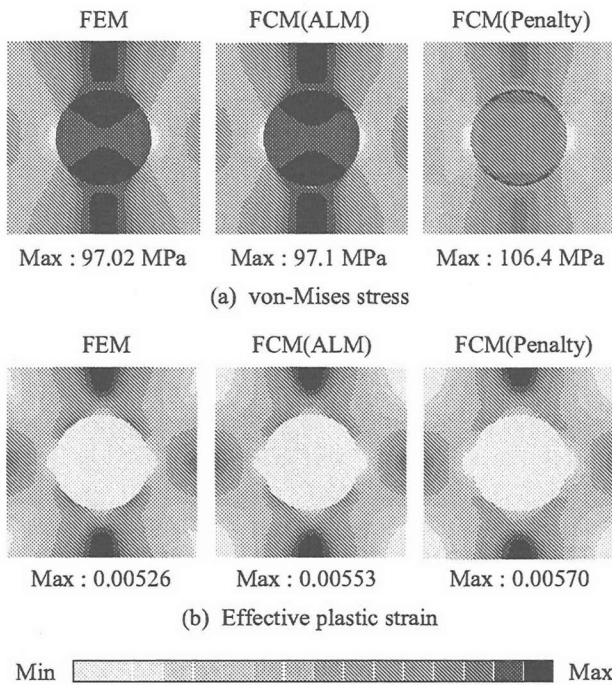


図-16 (a) von-Mises 応力分布, (b) 相当塑性ひずみ分布

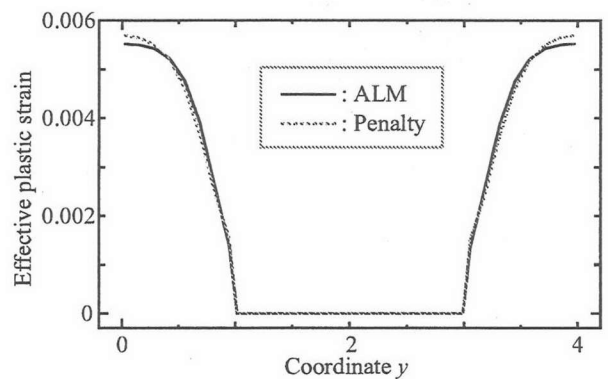


図-18 線分 PQ におけるひずみ分布

法を用いている。

5.2 解析結果

(1) 荷重－変位関係

上端の荷重作用面 (辺) での荷重－変位関係を図-15 に示す。この図において、横軸は y 軸方向の変位、縦軸は荷重作用面での等価節点内力の総和を表している。なお、FCM の解析結果については表示の都合上、全データを表示せずに、ある一定の荷重ステップ間隔で表示している。図-15 から分かるように、3 者の荷重－変位関係はほぼ一致しており、構造全体としての挙動は弾性域、塑性域に関わらず大きな問題なく近似されていると考えられる。

(2) 応力分布と相当塑性ひずみ分布

次に、応力分布と相当塑性ひずみ分布について比較および検討を行う。まず、荷重作用面での強制変位が 0.0015 mm (弾性域) のときの von-Mises 応力分布を図-

16(a) に示す。このとき、ALM による FCM の解析結果では、異種材料間で滑らかな応力分布が再現されており、FEM における応力分布と定性的にも定量的にもほとんど一致したものとなっている。これは、Lagrange 未定乗数が異種材料間で表面力という物理的な意味を有しており、変位場とは独立に近似されることから、表面力の連続性を近似的に満足することができている現れである。これに対して、異種材料間での表面力の連続性を特に意識しないペナルティ法による FCM の解析結果では、異種材料界面付近に特異な応力分布が見られる。また、図-13 の線分 PQ での von-Mises 応力分布を表す図-17 を見ても同様の所見が得られる。これにより、弾塑性 FCM において従来型の境界条件処理法であったペナルティ法を異種材料界面での境界条件処理法として用いることは不十分であると結論付けられる。

続いて、荷重作用面での強制変位が最終状態の 0.015 mm (塑性域) のときの相当塑性ひずみ分布を図-16(b) に、さらに線分 PQ での相当塑性ひずみ分布を図-18 に示す。先に述べたように、ペナルティ法を用いた際の応力値には、異種材料界面付近に特異性が見られた。しかし、ここでは介在物を線形弾性体と仮定しているため、相当塑性ひずみ分布に関しては、3 者ともにほぼ同様の傾向を示す結果となっている。

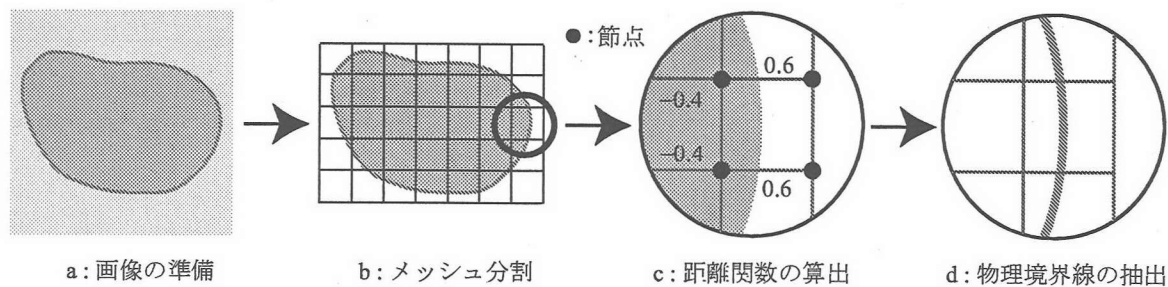


図-19 レベルセットモデリング

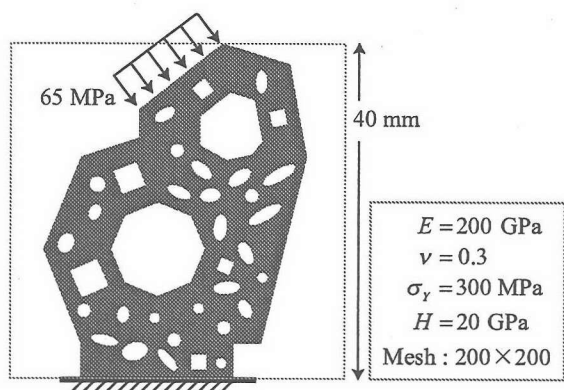


図-20 複雑な幾何形状を有する構造

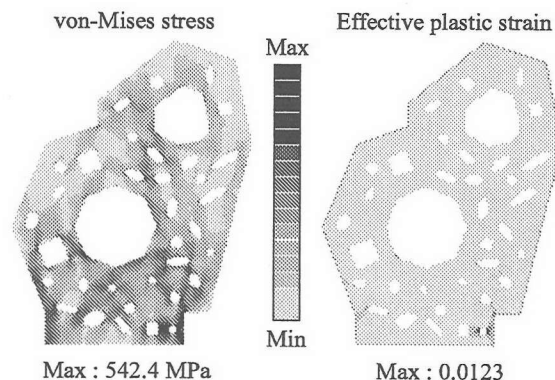


図-21 von-Mises 応力分布と相当塑性ひずみ分布

6. 非均質体メゾ構造への適用

本節では、非均質体メゾ構造を対象に弾塑性 FCM を適用することを試みる。これ際し、本研究ではまず、実際的な非均質性を FCM の解析に取り込むための新規のモデリング手法(メッシュ生成法)を提示する。そして、複雑な幾何形状を有する構造や非均質体メゾ構造を想定した数値解析例を通して、モデリングから弾塑性解析までを総合的に示す。

6.1 レベルセットモデリング

FEM では通常、解析対象に対して物理境界に解析自由度(節点)を配置し、メッシュ生成を汎用プリプロセッサ等を用いて行う。しかし、マニフォールド法を継承する FCM では、物理境界は線(面)で定義され、その領域を定形メッシュからなる数学被覆で覆うことにより、解析モデルが生成される。本研究では、この物理境界線の探索法として、イメージベース工学に基づき画像データを基盤としたレベルセット関数(符号付き距離関数)を用いる。

$$f_{\text{level}} = \min_{\bar{x} \in \Gamma} |x - \bar{x}| \text{sign} \{n(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})\} \quad (6)$$

ここに、 x は定形メッシュの節点の座標、 $\bar{x}$ は物体領域の座標、 Γ は物理境界、 n は $\bar{x}$ に関する外向き単位法線ベクトルである。本研究で実際にやっている具体的なモデリング手順を図-19 を参照しながら以下に述べる。

まず解析の対象とする画像を用意し、数値データに変換する。そして、各画素値に位置情報(座標)を持たせ

定形メッシュをその座標に合わせて設定する(図-19b)。次に全節点について、式(6)を用いて符号付き距離関数を算出する(図-19c)。最後に、この距離関数が零となる位置を双一次の形状関数を用いて算出し、物理境界線の抽出を行う(図-19d)。これにより、常識的な範囲において、ほぼ任意の構造をモデル化することが可能となる。また、距離関数を求めておけば、境界上の点を容易かつ自由に抽出できることから、単純に境界を模索する方法よりも応用がきく。

このレベルセット関数を用いたモデリング技術は、物理形状に任意の形状を許す FCM の特性に合致したものであり、FCM に限らずその他の分野での活用も十分に期待できる手法であると考えられる。また、X-FEM^{14),15)}でもこのレベルセット関数が用いられる場合があるが、本研究ではプリプロセスとしてのみ用いており活用意義が異なる。

6.2 数値解析例

(1) 複雑な幾何形状を有する構造

まず、本研究で構築したレベルセットモデリングの実用性を示すために、図-20 に示されるような複雑な幾何形状を有する穴あきモデルを用意した。同図は文献³⁾で実際に用いられている解析モデルを模擬したものである。解析条件等は同図の通りであり、メッシュ分割は縦横それぞれ 40 mm の正方形領域を 200×200 としている。

最終荷重ステップ時の von-Mises 応力分布と相当塑性ひずみ分布を図-21 に示す。この図から分かるよう

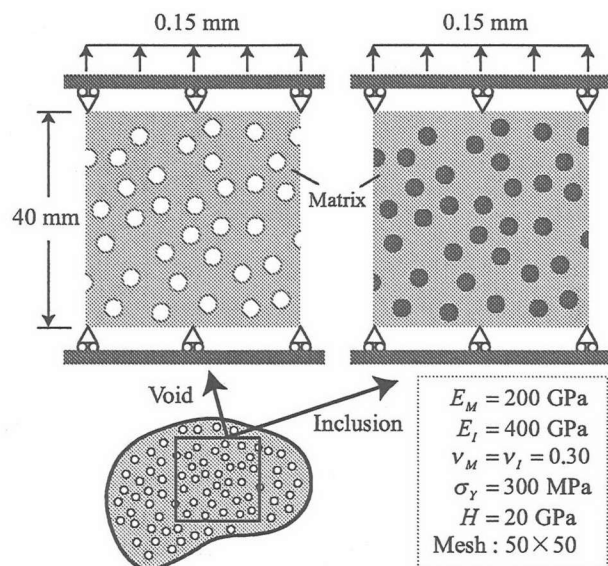


図-22 非均質体メゾ構造モデル

に、レベルセットモデリングが所定の幾何形状を十分に表現したことにより、応力・ひずみ分布も問題の特徴を十分に捉えた結果が得られている。

(2) 非均質体メゾ構造

図-22 に示されるように、ある微視的に非均質性を有する構造体の一部分を取り出したような非均質体メゾ構造を想定し、変位制御で上下方向に引張りを与える。ここでは同図に示されるようにボイドを有するモデルと介在物を有するモデルの2通りを想定する。これらの解析モデルに対し、母材 (M) を弾塑性体、介在物 (I) を線形弾性体と仮定し、各材料パラメータは同図に示す通りとする。なお、介在物モデルの異種材料界面での境界条件処理法としては Augmented Lagrangian 法を適用している。

解析結果として、まずボイドモデルについての相当塑性ひずみ分布の進展を図-23 に示す。この図から分かるように、ボイド(穴あき)を有する場合では、各ボイドから斜め方向に応力が集中し塑性変形が卓越するといった経験的に妥当な結果が得られている。次に、介在物モデルについての相当塑性ひずみ分布の進展を図-24 に示す。介在物を有する場合では、ボイドモデルとは逆に主に荷重載荷方向に介在物同士をつなぐ領域で応力が集中することにより塑性変形が卓越するといった経験的な洞察と合致した結果が得られている。

これらの結果から、本研究で構築したモデリング技術と FCM を併用することにより、対象とする構造の画像を入手するか、あるいはそれを模擬した画像を準備するだけでメッシュ生成と弾塑性解析の両方を容易に行える。

7. おわりに

本研究では、メッシュレス法的な解析が可能な FCM を複雑な幾何学的特性や非均質性を有する構造体の弾塑性問題のための解析手法に拡張し、その近似精度に

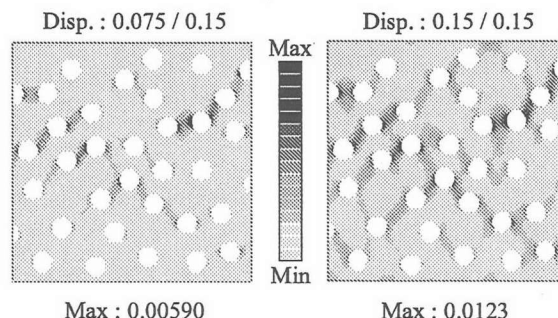


図-23 相当塑性ひずみの進展 (ボイドモデル)

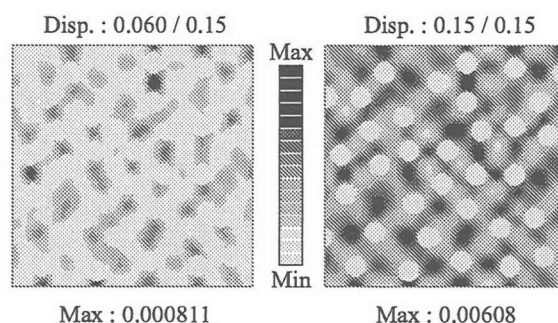


図-24 相当塑性ひずみの進展 (介在物モデル)

ついていくつかの基礎検討を行った。また、画像データとレベルセット関数を用いた新規のモデリング手法を提示し、これを併用した FCM による非均質体メゾ構造の弾塑性解析を試みた。以下に、本研究の成果と数値解析結果から得られた知見を簡単にまとめる。

- FCM では、要素内に任意形状の物理領域を有するため、双一次の四辺形要素による FEM とは異なる応力評価点を選定せざるを得ないが、その評価点の相違に起因する悪影響は軽微である。
- 円孔穴あき問題に対して、その特徴的な弾塑性挙動を十分に表現しうる。
- 多相材料の解析に対する弾塑性 FCM は、異種材料界面での境界条件処理法に Augmented Lagrangian 法 (ALM) を用いることにより、FEM と同程度の精度の近似解を与えうる。
- 異種材料界面での境界条件処理法にペナルティ法を用いた場合、その界面付近には特異な応力分布が発現するなどの不都合が生ずる。
- レベルセットモデリングと FCM を併用することにより、解析対象の画像情報から容易に複雑な幾何形状を有する構造や非均質体メゾ構造の弾塑性解析が行える。

また、今後の課題として、3次元問題への拡張や、あるいはコンクリート材料に代表される(準)脆性材料を対象とした際のクラック等の強不連続性の考慮や損傷モデルの導入などが挙げられる。

参考文献

- 1) 松井和己, 寺田賢二郎, 秋山雅義, 久保木孝, 日下桂一, 及川兼司: 炭素鋼の微視構造が巨視的な降伏・加工硬化特性に与える影響, 応用力学論文集, Vol.5, pp.175-183, 2002.
- 2) Hollister, S.J. and Kikuchi, N. : Homogenization theory and digital imaging : a basis for the mechanics and design principles of bone tissue, *Biothech. Bioengineering*, Vol.32, No.1, pp.27-62, 1994
- 3) Strouboulis, T., Copps, K. and Babuska, I. : The generalized finite element method, *Comput. Meths. Appl. Mech. and Engrg.*, Vol.190, pp.4081-4193, 2001.
- 4) Sukumar, N., Moes, N., Moran, B. and Belytschko, T. : Extended Finite Element Method for Three-Dimensional Crack Modeling, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.48, No.11, pp.1549-1570, 2000.
- 5) 大坪英臣, 鈴木克幸, 寺田賢二郎, 中西克嘉: 被覆単位で精度をコントロールするマニフォールド法 (FCM), 計算工学講演会論文集, Vol.2, pp.399-402, 1997.
- 6) 浅井光輝, 寺田賢二郎, 池田清宏, 山岸道弘: Hybrid-FCM の開発とその多相材料の界面破壊解析への適用, 応用力学論文集 Vol.4, pp.85-94, 2001.
- 7) Terada, K. , Asai, M., and Yamagishi, M. : Finite cover method for linear and nonlinear analyses of heterogeneous solids, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, in press.
- 8) Shi, G.H. : Manifold method of material analysis, *Transactions of the 9th Army Conference On Applied Mathematics and Computing, Report, No.92-1*, U.S. Army Research Office, 1991.
- 9) 鈴木克幸, 大坪英臣, 寺田賢二郎, 関勝哉, 金伝栄, 中西克嘉: ボクセル被覆による 3 次元ソリッドのメッシュレス解析, 応用力学論文集, Vol.1, pp.215-222, 1998.
- 10) 山岸道弘, 浅井光輝, 寺田賢二郎: 多重被覆を用いたイメージベース有限被覆法, 計算工学会講演論文集, Vol.7, pp.541-544, 2002.
- 11) 竹内則雄, 草深守人, 武田洋, 佐藤一雄, 川井忠彦: ベナルティ法を用いたハイブリッド型モデルによる離散化極限解析, 土木学会構造工学論文集, Vol.46A, pp.261-270, 2000.
- 12) Simo, J.C. and Laursen, T.A. : An Augmented Lagrangian treatment of contact problems involving friction, *Comput. Struct.*, Vol.42, No.1, pp.97-116, 1992.
- 13) Stein, E., Ramm, E., Rank, E., Rannacher, R., Schweizerhof, K., Wendland, W., Wittum, G., Wriggers, P., and Wunderlich, W. : Error-controlled Adaptive Finite Elements in Solid Mechanics, *John Wiley & Sons, Ltd.*
- 14) Sukumar, N., Chopp, D.L., Moes, N., and Belytschko, T. : Modeling Holes and Inclusions by Level Sets in the eXtended Finite Element Method, *Comput. Meths. Appl. Mech. and Engrg.*, Vol.190, pp.6183-6200, 2000.
- 15) Stolarska, M., Chopp, D.L., Moes, N. and Belytschko, T. : Modelling Crack Growth by Level Sets and the Extended Finite Element Method, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.51, pp.943-960, 2001.

(2003 年 4 月 18 日受付)