

FEM- β — 破壊現象の解析に適した FEMFEM- β — FEM as good as DEM for failure behavior of deformable body

岩井俊英*・小国健二**・堀 宗朗***

Toshihide IWAI, Kenji OGUNI and Muneo HORI

*正会員 修士 (工学) 大成建設株式会社 (〒 163-0606 東京都新宿区西新宿 1-25-1 新宿センタービル)

**正会員 Ph.D. 東京大学助手 東京大学地震研究所 (〒 113-0032 東京都文京区弥生 1-1-1)

***正会員 Ph.D. 東京大学教授 東京大学地震研究所 (〒 113-0032 東京都文京区弥生 1-1-1)

In the analysis of the mechanical behavior of deformable body, FEM is reliably and extensively used since FEM is based on well-established continuum modeling and numerical analysis method for BVP. However, when it comes to the analysis on failure behavior, interpolation by overlapping smooth shape function used in FEM makes the situation difficult. Tedious techniques such as remeshing or joint elements are needed. On the other hand, DEM is known to be an efficient numerical computation method for failure-related problems. However, lack of rigorous method to determine spring constants prevents DEM to be a popular method for analysis on failure behavior of deformable body.

To cover the above mentioned problems on FEM and DEM, a new method for numerical simulation for failure behavior of continuum has been developed. The new method proposed here, namely, FEM- β , provides a rigorous block-spring model for deformable body with easy treatment of failure. This model can be regarded as i) reformulation of DEM in the framework of FEM, or ii) introduction of non-overlapping discontinuous shape function to FEM.

Key Words : failure phenomena, FEM, DEM, FEM- β

1. はじめに

破壊を伴う力学現象（亀裂の進展・圧縮応力下での変形の局所化など）は、数学的には連続変位場の中に不連続変位場が発生する境界値問題である。このような連続変位場と不連続変位場が混在する境界値問題を既存の数値解析手法を用いて解析することは極めて困難である。連続体モデルに基づく境界値問題を数値的に解く有限要素法 (Finite Element Method - FEM) では、不連続性を扱うための手法として、破壊面に沿って要素を作り変えるリメッシュ、前もって不連続面を設定するジョイント要素などが導入されてきた。しかし、リメッシュに関しては (特に三次元計算の場合) 膨大な計算コストが、ジョイント要素に関しては、一般性の欠如 (前もって破壊面を設定する必要性) が問題点として挙げられる。

一方、実験で観察される破壊パターンの再現性に優れており、破壊現象の解析に適しているとされてきた手法に個別要素法 (Distinct Element Method - DEM) がある¹⁾。これは、物体を剛体・バネモデルに置き換え、破壊を剛体間のバネの切断により表現する手法であるが、剛体間のバネのバネ定数を一意に与える理論的裏づけに乏しく、もとの物理現象との等価性が必ずしも明確ではない。

そこで本研究では、FEM の観点から DEM を定式化

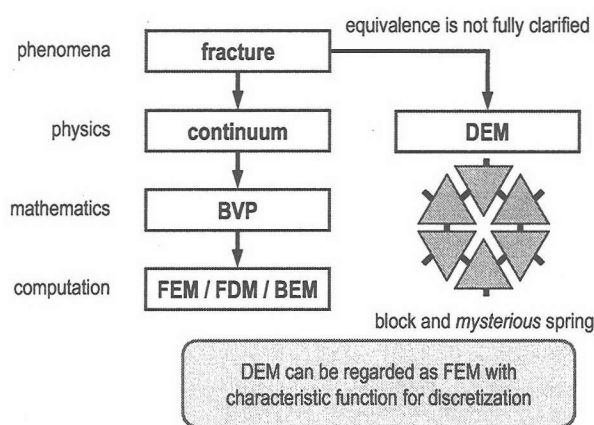


図-1 力学問題の考え方の中での FEM と DEM の位置づけ

しなおすことにより、破壊現象の解析に適した数値シミュレーション手法を開発することを目的とする。具体的課題は、もとの物理現象との等価性を保証するバネ定数を一意に決定する理論を DEM に提供すること、また、FEM に対しては、いたるところ不連続かつ重ならない形状関数を導入することにより連続変位場と不連続変位場が混在する問題を簡便に解析する仕組みを与えることである。

力学問題を解く流れは、現象を物理問題 (連続体モデル) として捉え、それを数理問題 (境界値問題) に置き

換え、最後に、関数を離散化して近似解を求める、という流れである(図-1)。この流れに沿って解く手法の代表的なものが FEM である。一方、DEM はこのようなステップを踏んでいないため、モデルの等価性に問題があるが、破壊問題を扱いやすいという長所を持っている。

DEM を図-1 の連続体モデルの解析の枠組みに入れて考えると、FEM では離散化に際し、微分可能かつ要素内で重なりのある関数による補間を用いているのに対し、DEM では微分不可能かつ重なりのない関数を導入しているとみなすことが出来る。この点が破壊現象の解析に DEM が適している理由のひとつと考えられる。

そこで、境界値問題と等価な変分問題による定式化までを連続体モデルの解析の流れに沿って行い、最後に汎関数の数値的評価のために変位場を離散化する際に、微分不可能かつ重なりのない関数を導入する。これが本研究で提案する解析手法、FEM- β のかぎとなる概念である。

2. FEM- β の定式化

2.1 問題設定

連続体の最も簡単なモデルとして二次元均一弾性体 V を考える。変位境界条件 $\bar{u}$ が与えられたとき、解くべき境界値問題は

$$\begin{cases} c_{ijkl}u_{k,l} = 0 & \text{in } V \\ u_i = \bar{u}_i & \text{on } \partial V \end{cases} \quad (1)$$

となる。ここで、 u_i は変位場を、 c_{ijkl} は弾性係数を表す。この境界値問題は以下の変分問題と等価である。

$$\begin{aligned} J(\mathbf{u}) &= \int_V e(\epsilon) dV \\ \text{Minimize } J(\mathbf{u}) \text{ s.t. } u_i &= \bar{u}_i \text{ on } \partial V \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 e はひずみ $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ に対応するひずみエネルギー密度で、

$$e(\epsilon) = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} c_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (3)$$

である。

なお、式(1)の支配方程式に慣性項を導入して通常の DEM のように動的問題を解くことも可能である。FEM- β は連続体のパーティクル・フィジックスシミュレーション手法としての展開を強く意識した手法であり、当然の流れとして動的問題の解析への拡張は進行中であるが、以下では FEM- β の概念の説明の簡単化のため、特に静的問題を例題として用いる。

2.2 変位場の離散化

汎関数 $J(\mathbf{u})$ を数値的に評価するための変位場の離散化に FEM- β の最大の特徴がある。解析領域 V 内に分散させた点群 $\{\mathbf{x}^\alpha\}$ に、Voronoi 分割を施す²⁾。このとき、各点 $\mathbf{x}^\alpha$ に対応する Voronoi ブロック Ω^α がそれぞれ剛体変位するような変位場を考える。つまり、変位場は Ω^α 上に立つ特性関数

$$\phi^\alpha(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{for } \mathbf{x} \in \Omega^\alpha \\ 0 & \text{for } \mathbf{x} \notin \Omega^\alpha \end{cases}$$

を用いて以下のように離散化される。

$$u_i(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^N u_i^\alpha \phi^\alpha(\mathbf{x}). \quad (4)$$

ここで N は Voronoi ブロックの数を、 u^α は α 番目の Voronoi ブロックの中心 $\mathbf{x}^\alpha$ の変位を表す。

式(4)の特性関数を用いた変位場の離散化により、FEM- β では通常の FEM あるいはメッシュレス法と異なり、形状関数に重なりがない。したがって、DEM で通常用いられるように、ブロック間をつなぐバネのバネ定数の変化として破壊を表現することが可能となる。これが FEM- β で破壊現象を簡便に取り扱うための仕組みとなる。

2.3 平均ひずみの計算方法

式(4)の不連続な関数での変位場の離散化に対応するひずみ場を直接計算すると、Voronoi ブロックの境界に沿って δ -関数が立ち上がるような特異な場となる。FEM- β ではこのような空間微分によって定義されるひずみ場を直接用いることはせず、ガウスの発散定理を適用し、ある領域 A 内での平均ひずみを評価する。

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2A} \int_{\partial A} (u_i n_j + u_j n_i) d\ell. \quad (5)$$

ここで n_i は領域 A の外向き法線ベクトルの i 成分を表す。式(5)の平均ひずみを用いて汎関数 $J(\mathbf{u})$ の数値的評価を行う。

FEM- β におけるひずみの平均化の最小領域 A は、3つの隣接する Voronoi ブロック $\Omega^1, \Omega^2, \Omega^3$ の一部からなる領域である。この領域の取り方の違いによって、(1) FEM と等価な平均ひずみ、(2) 局所的乱れを含む平均ひずみ、の2つの異なった平均ひずみが計算される。

なお、以下の説明では簡単のため、式(4)で示される剛体ブロックの並進に伴って生じるひずみ場に論を絞るが、FEM- β に剛体ブロックの回転の影響を入れることは簡単な拡張であり、後に第4章に示す解析例は回転の自由度も含めた解析の結果である。

(1) FEM と等価な平均ひずみ

ひずみの平均化の最小領域 A として、3つの隣接 Voronoi ブロック $\Omega^1, \Omega^2, \Omega^3$ それぞれの中心 x^1, x^2, x^3 を直線で結んだ線分に囲まれる三角形領域をとる。この三角形 (Delaunay 三角形) による領域分割は、変位場の離散化の際に導入した Voronoi 分割と 1 対 1 対応する共役な平面分割である (図-2 参照)。

このとき、領域 A の頂点のひとつ x^1 の変位 u^1 の平均ひずみへの寄与を式 (5) の定義に従って計算すると以下ようになる。

$$\begin{bmatrix} \bar{\epsilon}_{11} \\ \bar{\epsilon}_{22} \\ 2\bar{\epsilon}_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_2^2 - x_2^3 & 0 \\ 0 & x_1^3 - x_1^2 \\ x_1^3 - x_1^2 & x_2^2 - x_2^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

ここで、 A はひずみの平均化の最小領域 A の面積として用いられている。

領域 A の平均ひずみに対する各頂点の寄与を式 (6) の添字を適切に換えることにより評価すると、 $[\bar{\epsilon}] = [B][u]$ の形で変位ベクトルとひずみベクトル ($[\bar{\epsilon}] = [\bar{\epsilon}_{11}, \bar{\epsilon}_{22}, 2\bar{\epsilon}_{12}]$, $[u] = [u_1^1, u_2^1, \dots, u_2^3]$) の関係を表す 3 行 6 列の行列 $[B]$ を定義できる。この行列 $[B]$ が一次三角形要素を用いた FEM での B-matrix と完全に一致する。

なお、式 (6) には Voronoi ブロック境界と領域 A の境界の交点 y^1, y^2, y^3 は陽には表れていないが、それぞれが領域 A の対応する境界の midpoint に一致しない場合、平均ひずみと節点変位の関係は式 (6) の形にはならず、FEM との等価性も損なわれる。ただし、Voronoi ブロックの三重接合点 y^0 の座標は、領域 A での平均ひずみに影響を与えない。したがって、ブロック境界が y^1, y^2, y^3 を通過する限り、 y^0 の位置は任意にとることが出来る。更に、 y^0 と y^1, y^2, y^3 を結ぶ線は直線である必要もない。これは、FEM- β における破壊面の選択には自由度があることを示している。ただし、本稿では簡単のため、 y^0 の位置は通常の Voronoi 分割による三重接合点とし、破壊は y^0 と y^1, y^2, y^3 をそれぞれ結ぶ直線上で起こりうるものとする。

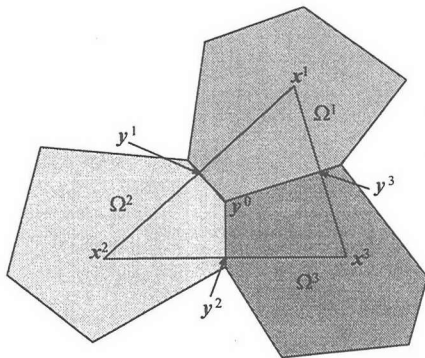


図-2 FEM と等価な平均ひずみを与える平均化領域 A

(2) 局所的乱れを含む平均ひずみ

ひずみの平均化の最小領域 A として、3つの隣接 Voronoi ブロック $\Omega^1, \Omega^2, \Omega^3$ それぞれの中心 x^1, x^2, x^3 と Voronoi ブロックの辺の midpoint を結んだ線分で囲まれる領域をとる。この領域は x^1, x^2, x^3 が正三角形配置される場合を除き、一般に六角形となる (図-3 参照)。

このとき、領域 A の頂点のひとつ x^1 の変位 u^1 の平均ひずみへの寄与を式 (5) の定義に従って計算すると以下ようになる。

$$\begin{bmatrix} \bar{\epsilon}_{11} \\ \bar{\epsilon}_{22} \\ 2\bar{\epsilon}_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{A} \begin{bmatrix} y_2^1 - y_2^3 & 0 \\ 0 & y_1^3 - y_1^1 \\ y_1^3 - y_1^1 & y_2^1 - y_2^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

ここで、 A はひずみの平均化の最小領域 A の面積として用いられている。

前小節と同様に式 (7) の添字を適切に換えることにより、 $[\bar{\epsilon}] = [B][u]$ の形で変位ベクトルとひずみベクトルの関係を表す 3 行 6 列の行列 $[B]$ を定義できる。式 (7) に基づく $[B]$ が式 (6) に基づく $[B]$ と一致するのは、Voronoi ブロックの辺の midpoint が x^1, x^2, x^3 を結ぶ線分の midpoint と一致するとき、すなわち x^1, x^2, x^3 が正三角形配置される場合のみである。

式 (6) に基づき計算される平均ひずみ、すなわち一次三角形要素を用いた FEM で得られる平均ひずみと式 (7) に基づき計算される平均ひずみとの差は、離散化に際して分散させる点群 $\{x^\alpha\}$ の配置によってのみ規定される。すなわち、領域分割に用いる点群の配置によって、その大きさ・空間分布をコントロール可能な「局所的乱れ」が平均ひずみに導入されている。これは解の精度を低下させるという意味で、境界値問題を解く手法としての FEM- β の欠点とみなすことも出来る。しかし、「局所的乱れ」の存在は、i) 一樣ひずみ場で発生する破壊現象における「破壊の核」となる、ii) 亀裂進展問題における分岐解 (例: ブランチング) を見つけやすくする、という意味で、FEM- β の本来の目的である破壊現象の簡便な解析のためには望ましいものであると考えられる。

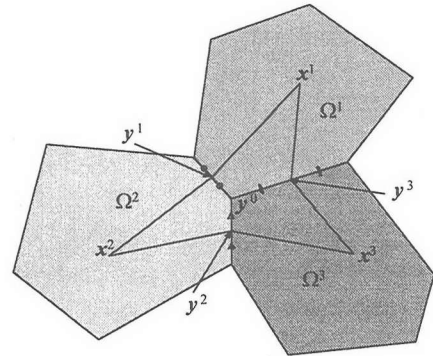


図-3 局所的乱れを含む平均ひずみを与える平均化領域 A

なお、式(7)に基づく平均ひずみの計算においても、Voronoi ブロックの三重接合点 y^0 の座標の影響はない。したがって、 $x^1, x^2, x^3, y^1, y^2, y^3$ の位置を変えない限り、任意の y^0 の位置に対して平均ひずみは変化しない。これは、前小節同様、破壊面の選択には自由度があることを示している。

2.4 ひずみエネルギー・剛性マトリクス・境界条件

式(6)あるいは式(7)で計算される平均ひずみ $[\bar{\epsilon}]$ と、弾性係数 c_{ijkl} から決められる 3 行 3 列の行列 $[c]$ とを用いて、平均ひずみエネルギー $\bar{e}$ を

$$\bar{e} = \frac{1}{2} [u]^T ([B]^T [c] [B]) [u] \quad (8)$$

で定義する。この定義は、i) 領域 A 内での平均応力 $([\bar{\sigma}] = [\bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{22}, \bar{\sigma}_{12}])$ は $[\bar{\sigma}] = [c][\bar{\epsilon}]$ で表され、ii) 平均ひずみエネルギーは $\bar{e} = \frac{1}{2} [\bar{\sigma}]^T [\bar{\epsilon}]$ で表されるという仮定に基づくものである。

式(8)を用いて式(2)の J を評価し、停留させる条件を求めると、式(8)中の $[B]^T [c] [B]$ は、領域 A を通常の FEM における三角形要素とみなした場合の要素剛性マトリクスに対応する。実際、式(6)に基づいて決定される $[B]$ を用いると、 $[B]^T [c] [B]$ は通常の FEM において一次三角形要素を用いた場合の要素剛性マトリクスと完全に一致する。

境界条件は、変位・トラクションともに通常の FEM と同様の方法で境界上の点に与えられる。したがって、境界上にある Voronoi ブロックはその中心を境界上に持ち、境界の外側の領域を切り落としたものとなる。

3. 既存手法との比較

3.1 FEM との比較

前述のように、解析対象を Voronoi 分割し、ひずみの平均化の最小領域 A を図 2 に示す Delaunay 三角形

にとった場合、FEM- β と一次三角形要素 (一様ひずみ要素) を用いた通常の FEM の要素剛性マトリクスは、完全に一致する。したがって、線型弾性体の節点変位の計算精度に関して、FEM- β は一次三角形要素を用いた通常の FEM と同等である。ただし、節点間の変位が線型補間される通常の FEM に対して、FEM- β では節点間の変位は Voronoi ブロック内で一定値をとり、ブロック境界で階段状に変化する。したがって、FEM- β で解析領域全体にわたって通常の FEM と同等の精度を確保するためには、FEM- β で得られた節点変位を解析のポスト処理などで線型補間する必要がある。

FEM- β と一次三角形要素を用いた通常の FEM の要素剛性マトリクスの一致は、Voronoi 分割に基づく特性関数での変位場の離散化と Delaunay 三角形上でのひずみの平均化を前提とする。Voronoi 分割以外での離散化により、図-2 の y^1, y^2, y^3 がブロック中心間の垂直二等分線上から外れたり、図-3 のようにブロック中心間を結ぶ線分上に y^1, y^2, y^3 が不在の場合には、FEM- β の平均ひずみ・要素剛性マトリクスは FEM のそれと一致しない。その結果、FEM- β で計算される節点変位の精度は低下する。このように、連続変位場の問題に対する解析精度の低下と引き換えに、「局所的乱れ」を FEM に導入することも可能である点は、分岐解を見つけやすくするという意味で、破壊現象の解析ツールとしての FEM- β の顕著な特徴のひとつに挙げることができる。

Voronoi ブロック内で一定値をとり、ブロック境界で階段状に変化する FEM- β の変位場は、不連続かつ重なりのない形状関数を FEM に導入したことに相当する (図-4)。この変位場に対して FEM と同等の精度で連続体の問題を解くことが出来る点も、FEM- β の特徴のひとつである。さらに、FEM- β では要素剛性マトリクスから作られる全体剛性マトリクスを、Voronoi ブロック間をつなぐバネのバネ定数とみなすことが出来る。したがって、FEM- β は連続体に対する厳密な剛体・バネモデルを与える理論的枠組を与える。このような解釈は、形状関数に重なりがある通常の FEM では不可能である。この解釈に基づき、FEM- β では破壊を「ブロック間をつなぐバネの切断 (軟化)」として表現することが出来る。この、バネの切断による破壊の取り扱いについては後に述べる。

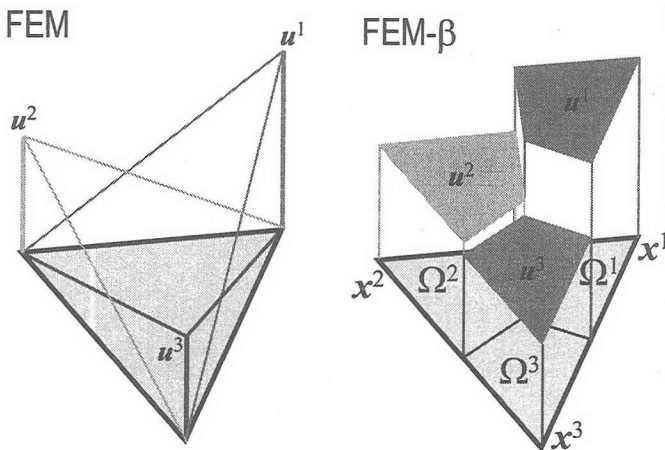


図-4 FEM と FEM- β の形状関数の違い

3.2 DEM との比較

FEM- β は DEM と同様に、破壊をブロック間のバネの切断（軟化）として表現できる。したがって、破壊現象の解析ツールとしては DEM と同程度のパフォーマンスが期待できる。

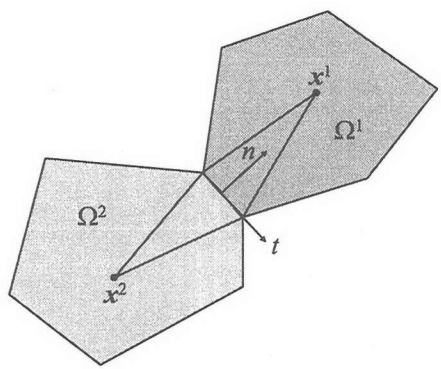


図-5 DEM におけるひずみの平均化領域

一方、FEM- β と DEM との最大の相違点はひずみの平均化の最小領域 A のとりかたにある。通常、DEM では隣接する 2 つのブロックの相対変位に基づいて変形が記述される。隣接する 2 つのブロックの相対変位により生じる平均ひずみを評価するために、図-5 に示すブロック中心 x^1, x^2 を頂点にもつ四角形で囲まれる領域を平均化領域としてとるのは自然である。このとき、ブロック境界の接線方向を t 、法線方向を n とすると、 Ω^1 と Ω^2 の間にどのような相対変位が生じても接線方向の平均直ひずみ $\bar{\epsilon}_{tt}$ は 0 となる。つまり、DEM の定式化においてはひずみの表現が退化している。ひずみの表現の退化の結果として、DEM ではポアソン比の影響をうまく再現することが出来ない。これを調整するために、DEM を用いた連続体の解析では出自の明らかでないバネを剛体間に導入する必要がある。

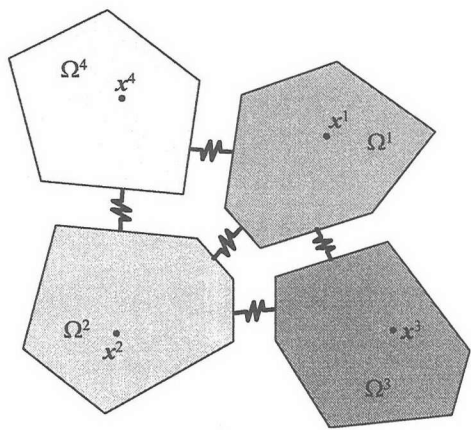


図-6 DEM 的解釈による剛体・バネモデル

これに対し、FEM- β では前述のように隣接する 3 つのブロックの相対変位に基づいて変形が記述される。その結果、式 (6) に示すように全てのひずみ成分を表現することができる。この平均ひずみに基づく定式化により、FEM- β が FEM と等価な要素剛性マトリクス、ひいては連続体と等価な変形挙動を示す剛体・バネモデルを与えることは前に述べた。この意味で、FEM- β は DEM に連続体との等価性を保証するバネ定数を一意に決定する理論を提供するものである。

3.3 破壊の取り扱い

FEM- β で与えられる連続体の厳密な剛体・バネモデルでは、破壊を「ブロック間をつなぐバネの切断（軟化）」として表現することが出来る。バネの切断による破壊の取り扱いには、2 つの方法をとり得る。

DEM と同様の手順を踏む場合、破壊を隣接ブロック間の相互作用の完全な消失とみなし、 Ω^1 と Ω^2 の変位に対応する全体剛性マトリクスを 0 にすることで、破壊は表現される。これは、剛体・バネモデルを設定するために用いた連続体モデルを完全に捨て、図-6 のように、隣接する 2 つの剛体ブロックは 1 本のバネでつながれていると考えることに対応する。

一方、FEM- β で与えられるモデルを、局所的に相互作用を遮断できる仕組みを持つ連続体モデルとみなす場合、DEM と同様の手順での破壊の取り扱いには問題がある。連続体モデルでは、要素剛性マトリクスに対応して、図-7 のように隣接する 2 つの剛体ブロック Ω^1 と Ω^2 は、ひずみの平均化領域 A の中で、両者を直接つなぐ 1 本のバネと Ω^3 を介して両者を間接的につなぐ 2 本のバネ、合計 3 本のバネでつながれているとみなすことができる。

破壊は、個々のバネを破壊基準に達したものから順番に切断し、それに応じて全体剛性マトリクスを変化させるという形で表現される。例えば、 Ω^1 と Ω^2 の境

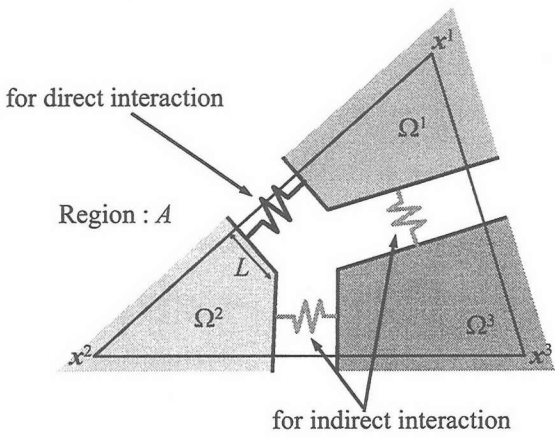


図-7 連続体モデルにおいて Ω^1 と Ω^2 をつなぐ 3 つのバネ

界 L にはたらくトラクションが破壊基準に達した場合、 L での変位のギャップが領域 A の要素剛性マトリクスに与える影響を除くことにより、 Ω^1 と Ω^2 を直接つなぐバネ、 Ω^1 と Ω^3 を間接的につなぐバネ、 Ω^2 と Ω^3 を間接的につなぐバネの合計 3 本のバネのバネ定数を変化させることになる。

DEM と同様の解釈では、領域 A の内部と、 $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2$ を領域 A と共有する領域内部とでそれぞれ定義される直接 1 本、間接 2 本、合計 6 本のバネの影響を全て足し合わせたものを、 Ω^1 と Ω^2 をつなぐ 1 本のバネとみなしている。そして、 L にはたらくトラクションが破壊基準に達したときに全てのバネを同時に切ることによって破壊が表現される。

ただし、DEM と連続体モデル、いずれの解釈に従った場合でも、破壊発生後に生じる自由表面での境界条件は全体剛性マトリクスの成分の変化では表しきれていない。また、Voronoi ブロックの三重接合点 $\mathbf{y}^0$ の位置による破壊面の選択の自由度もあるため、適切な破壊基準を設定すればよりうまく破壊現象を扱える可能性もある。FEM- β における破壊の取り扱いには更なる考察の余地・必要がある。

4. 解析例

4.1 精度の検証

ここでは、図-8に示す線型弾性体 ($E = 1.0, \nu = 0.25$) の板 (辺長 2 の正方形) の水平方向への一軸引張 (0.1) の問題を解析対象とし、FEM- β による線型弾性体の変形の解析精度を、一次三角形要素を用いた通常の FEM との比較に基づき検証する。ここでの解析対象に対して、一次三角形要素を用いた通常の FEM は最低限の離散化で厳密解を与える。

まず、図-2に示すひずみの平均化領域をとり、式 (6) に基づいて計算した場合の解析精度について述べる。この場合、FEM- β は通常の FEM と同じ要素剛性マトリクスを与えるため、節点変位・ひずみ成分に

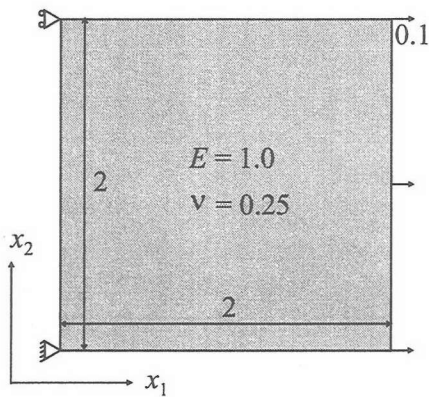


図-8 解析対象：線型弾性体の板の一軸引張

ついて FEM と同じ解、すなわち厳密解を与えることは自明である。ただし、図-4のように FEM- β の変位場は Voronoi ブロック内で一定値をとり、ブロック境界で階段状に変化するため、解析対象領域全体において厳密解と一致するわけではない。

そこで、FEM- β での解析結果の厳密解への収束性を検証する。ここでの解析精度の指標としては、変位の誤差 $\mathbf{e} = \mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}$ ($\mathbf{u}$ は厳密解、 $\hat{\mathbf{u}}$ は計算値) の L_2 -ノルム、

$$\|\mathbf{e}\|_{L_2} = \left(\int_{\Omega} (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}})^T (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

を変位場の L_2 -ノルム $\|\mathbf{u}\|_{L_2} = \left(\int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{u} d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}$ で正規化した、 $\eta = \|\mathbf{e}\|_{L_2} / \|\mathbf{u}\|_{L_2}$ を用いる。

図-9に解析対象の自由度に対する η の変化を示す。離散化の度合いを上げるに依り、FEM- β での解析結果が厳密解へ収束していくことが分かる。

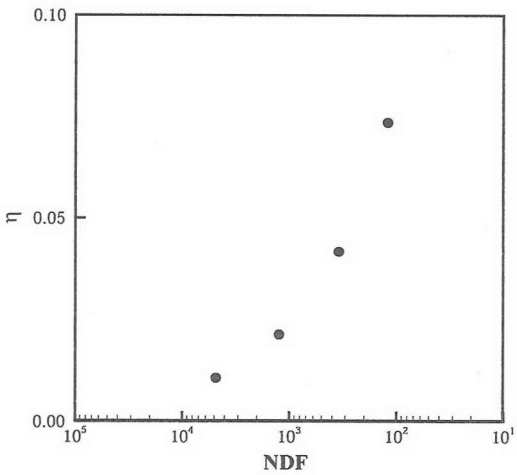


図-9 式 (6) を用いた FEM- β の変位ノルムの相対誤差

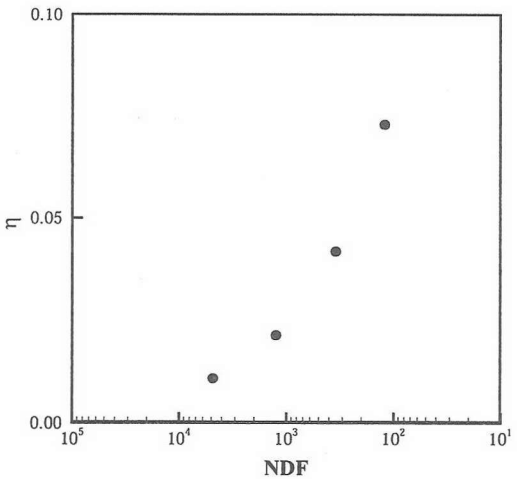


図-10 式 (7) を用いた FEM- β の変位ノルムの相対誤差

次に、図－3に示すひずみの平均化領域をとり、式(7)に基づいて計算した場合の解析精度について述べる。この場合、FEM- β は通常のFEMの要素剛性マトリクスに乱れを入れた要素剛性マトリクスを与えるため、節点変位・ひずみ成分についてFEMの厳密解に乱れが導入された解を与える。

図－10に解析対象の自由度に対する η の変化を示す。図－9(FEMと等価なひずみ場を用いた場合)とほぼ同じ速さで厳密解へ収束していくことが分かる。ただし、ここでの収束挙動の最大の支配要因は、変位を線型補間するかブロック内で一定とするかの違いである。式(7)に基づいて計算した場合の節点変位の解析精度自体を議論するためには、乱れを含む解析の結果得られた節点変位を線型補間した変位場の厳密解への収束を議論する必要がある。

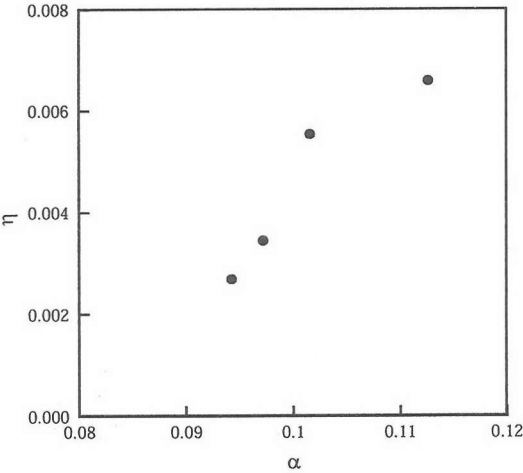
詳細の説明は省略するが、このときの収束挙動を支配するのは離散化の度合いではなく、領域分割の質である(FEMと等価なひずみ場を用いた場合、FEM- β

も最低限の離散化で節点変位の厳密解を与えることに注意)。ひずみの平均化領域の形の崩れが誤差を生じさせる。式(7)が式(6)と一致するのはひずみの平均化領域が正三角形のときのみである。領域分割の質の指標として、ひずみの平均化領域の内角の $\pi/3$ からの平均二乗誤差を $\pi/3$ で正規化した量 α を用い、 α と変位ノルムの関係を図－11に示す。 α が減少(節点が正三角形配置に接近)するにつれて変位ノルムの相対誤差が減少し、節点変位の計算値が厳密解に近づく。

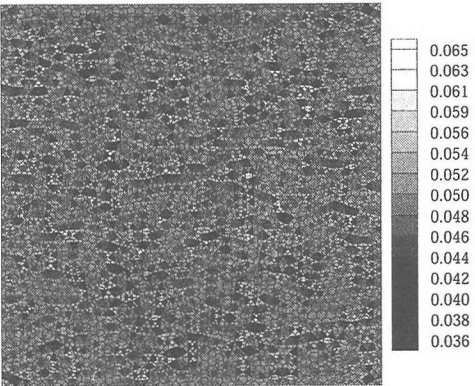
図－12に、図－8の解析対象にFEM- β が与える平均ひずみ場のうち、 $\bar{\epsilon}_{11}$ 成分の分布を表す。厳密解は解析領域全体にわたって一様なひずみ場 $\bar{\epsilon}_{11} = 0.05$ であるため、FEM- β が与える平均ひずみ場は局所的な乱れを含んでいることが分かる。変位の L_2 -ノルムの場合と同様に、エネルギーノルム・エネルギーノルムの誤差・正規化されたエネルギーノルムの誤差をそれぞれ

$$\begin{aligned} \|u\| &= \left(\int_{\Omega} \epsilon^T C \epsilon \, d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \|e\| &= \left(\int_{\Omega} (\epsilon - \bar{\epsilon})^T C (\epsilon - \bar{\epsilon}) \, d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \eta &= \frac{\|e\|}{\|u\|} \end{aligned}$$

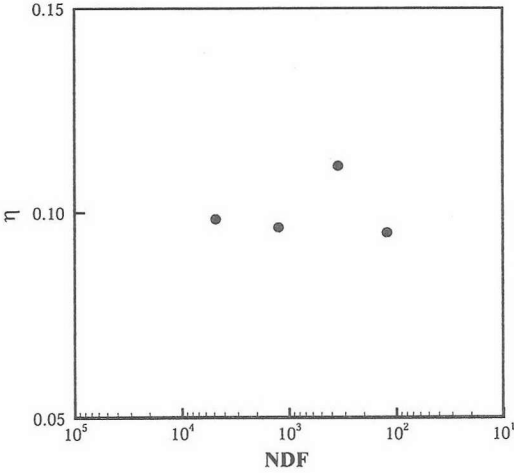
とし、離散化の度合いによる η の変化を図－13に示す。離散化の度合いを上げてもエネルギーノルムの誤差は収束しない。これは、節点変位同様、ひずみ場の計算精度も領域分割の質の影響を受けるからである。ただし、ひずみに関しては、前述の節点変位の誤差に加えて、式(7)によるひずみの計算も領域分割の質の影響を強く受ける。したがって、FEM- β で得られる数値解の収束性の指標としてエネルギーノルムは妥当ではない。



図－11 領域分割の質と変位ノルムの相対誤差



図－12 式(7)を用いたFEM- β が与える平均ひずみ分布



図－13 式(7)を用いたFEM- β のエネルギーノルムの相対誤差

4.2 破壊現象の解析

ここでは、破壊現象の簡単な解析例として、図-14、図-15それぞれの最上段に示す、配置の異なる円孔の空いた板を鉛直方向に一軸引張した場合の破壊面の進展を解析した結果を示す。ここで平均ひずみは式(7)の乱れを含んだ定義に剛体ブロックの回転の自由度を考慮に入れたものを用いた。破壊基準は、ブロック中心間の距離が変形前の距離から30%増加した時点でブロックをつなぐバネを切断するというもので、DEMと同様の解釈に基づく破壊の表現を用いた。非常に単純な破壊基準を用い、リメッシュなどの技巧を施していないにもかかわらず、孔の配置の微妙な違いによる破壊パターンの変化がうまく捉えられている。なお、図中のコンターは、鉛直方向の直ひずみ分布を表している。

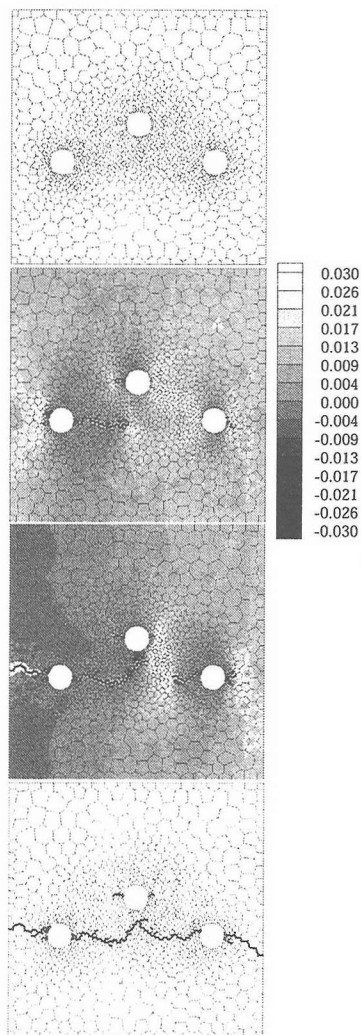


図-14 円孔を有する板の破壊パターン
(直線配置された2つの円孔を結ぶ破壊面)

5. まとめ

本研究では、破壊現象を簡便に解析することを目的とし、新しい数値解析手法 FEM- β を提案し、その特徴・精度・破壊現象の解析への適用性について述べた。FEM- β は、FEM に不連続かつ重なりのない形状関数を導入することにより、連続体の問題と等価な剛体・バネモデルを与える手法である。これは、DEM に厳密なバネ定数を決める理論を提供することに相当する。

参考文献

- 1) 伯野元彦, 破壊のシミュレーション—拡張個別要素法で破壊を追う—, 森北出版, 1997
- 2) 杉原幸吉, 計算幾何工学, 培風館, 1994

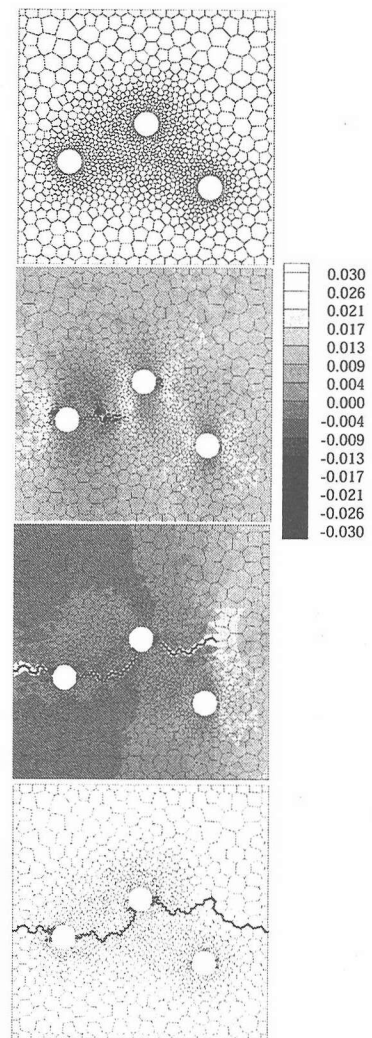


図-15 円孔を有する板の破壊パターン
(円孔の配置の違いにより曲がった破壊面)

(2003年4月18日受付)