

任意壁面形状及び開境界を有する自由表面流れ解析のための ALE 安定化有限要素法

ALE Stabilized Finite Element Method for Free Surface Flows with an Arbitrary Shape of Wall
and an Outflow Boundary

田中聖三*・榎山和男**

Seizo TANAKA and Kazuo KASHIYAMA

*学生会員 工修 中央大学大学院 理工学研究科土木工学専攻 博士後期課程(〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27)

**正会員 工博 中央大学教授 理工学部土木工学科(〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27)

This paper presents a stabilized finite element method for the non-linear free surface flows with an arbitrary shape of wall and an outflow boundary. The incompressible Navier-Stokes equation based on arbitrary Lagrangian-Eulerian description is used as the governing equation. The SUPG/PSPG formulation is employed for the finite element discretization. The outflow boundary condition and the parallel computing method are also introduced to compute the large-scale free surface flow with an outflow boundary. As numerical examples, the present method is applied to the sloshing problem in a rectangular tank, a trapezoidal tank and the open channel flow of the meandering waterway. The efficiency of the present method is shown by numerical results.

Key Words : *free surface flow, arbitrary shape of wall, outflow boundary condition, stabilized finite element method, ALE method*

1. はじめに

タンクや水理構造物などの設計において、自由表面を有する流れの流体力を正確に評価することは極めて重要である。これらの問題は、時々刻々と変化する界面を取り扱う必要のある移動境界問題の一つであり、自由表面問題と呼ばれる。これまで、この現象を把握するための方法として水理模型実験による方法が多く用いられてきたが、計算機性能及び計算手法・技術の進歩によって数値シミュレーションによる評価も可能となってきており、近年多くの数値解析手法が提案されている。それらの手法は、大きく二つの手法に分類でき、一つは自由表面の表現方法として固定メッシュを用いて自由表面を間接的に表現する界面捕捉法(interface capturing method)であり、もう一方は移動メッシュを用いて自由表面を直接的に表現する境界適合型の界面追跡法(interface tracking method)である。両者の方法には、それぞれに長所と短所があり、問題により手法を適切に選択する必要がある。界面捕捉法としては、VOF (Volume of Fluid) 法^{1),2)}や、Level-Set 法³⁾などが挙げられ、これらの手法の特徴としては、砕波等の複雑な現象を解析することが可能であるが、界面を間接的に表現するため、高精度な結果を得るためには界面追跡法に比べてより細かいメッシュが必要となる。一方、ALE(Arbitrary Lagrangian-Eulerian) 法^{4),5)}やSpace-Time 法^{6),7)}に代表される界面追跡法は、砕波等の自由表面の不連続な挙動を取り扱うことは困難であるが、自

由表面上での粒子の運動にあわせて解析領域を更新することで自由表面を直接的に表現するため、比較的粗いメッシュでも自由表面形状を正確に把握することができ、本研究で重視する自由表面形状と流れ場の正確な評価には有効な手法である。Space-Time 法は時間と空間領域に対して同時に離散化する方法であり、高精度な手法であるが ALE 法に比べて同一メッシュに対して離散化自由度数が 2 倍となることから、計算時間や計算機容量の点で課題が残る。

以上の点から、著者らは、界面追跡法の中でも ALE 法に着目して、メッシュ形状の任意性に優れている有限要素法に基づく手法の構築を行ってきた^{8),9)}。しかし、壁面は直立壁が仮定されており、また、適切な流出境界処理法が考慮されていなかったために、適用できる問題に限られており手法としての汎用性に欠けていた。壁面上の自由表面位置は、壁面の幾何形状に適合させなければならず、任意の壁面形状の場合には壁面の幾何形状を考慮した境界移動手法が必要となる。また、河川等の解析においては、下流方向に連続している領域に対してある有限な解析領域を設定する必要があるが、この場合、下流側流出境界では物理量は基本的に未知量であるため、何らかの合理的な流出境界条件処理を行う必要がある。

そこで本論文では、任意の壁面境界形状及び流出境界を有する領域での自由表面流れに対して解析可能となるように計算手法の改良を行った。具体的には、壁面の幾

何形状を考慮した自由表面位置の決定方法として、自由表面上の節点移動をコントロールする方向ベクトルを導入した運動学的条件¹⁰⁾を適用した。また下流側流出境界の処理法として、有限要素法の特徴である自然境界条件に着目した Free Outflow Boundary Condition^{11), 12)}を適用した。また、自由表面形状の大変形に対しても計算が安定に行えるように、メッシュの再分割法における節点位置の決定法に弾性方程式を用いる方法を導入した。これらの手法は、いずれも個々の手法としては既存の手法であるが、これらを組み合わせることにより安定で高精度な手法となり得る。基礎方程式の空間方向の離散化手法としては、従来どおり SUPG(Streamline Upwind/Pedrov-Galerkin)/PSPG(Pressure Stabilizing/Pedrov-Galerkin)法に基づく安定化有限要素法¹³⁾を用い、離散化により導かれる非線形方程式に対して Newton-Raphson 法を用いて線形化を施した。なお、要素としては、任意形状への適合性の良い四面体の同次補間要素(圧力・流速ともに1次:P1/P1要素)を用いた。また、時間方向の離散化にはクランク・ニコルソン法を用いた。大規模問題への対応として、領域分割法に基づく並列計算手法を導入している。数値解析例として、3次元矩形及び台形貯槽内のスロッシング解析、3次元蛇行水路流れを取り上げ、本解析手法の有効性を検討した。

2. 数値解析手法

2.1 基礎方程式と境界条件

非圧縮性粘性流体において、流速 $\mathbf{u}$ 及び圧力 p は、それぞれ式(1),(2)の ALE 表記された Navier-Stokes の運動方程式及び連続式に支配される。

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad \text{on } \Omega, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{on } \Omega, \quad (2)$$

Ω は解析領域、 $\bar{\mathbf{u}}$ は節点移動速度を含む相対流速、 ρ は密度、 $\mathbf{f}$ は物体力を表している。ここで、応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}$ は以下の式で表される。

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T), \quad (4)$$

μ は粘性係数である。また、Dirichlet 型、Neumann 型境界条件は、次のように与えられる。

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{on } \Gamma_g, \quad (5)$$

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{h} \quad \text{on } \Gamma_h, \quad (6)$$

ここで、 $\mathbf{g}$, $\mathbf{h}$ はそれぞれ流速、トラクションの既知量を示し、 Γ_g , Γ_h はそれぞれ Dirichlet 型、Neumann 型境界を示す。また、 $\mathbf{n}$ は外向き単位法線ベクトルを示す。

自由表面においては、以下の運動学的条件を満たす

必要がある。

$$\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{on } \Gamma_{fs}, \quad (7)$$

ここで、 Γ_{fs} は自由表面である。また自由表面上では、力学的条件として stress-free 条件が適用される。なお、表面張力は微小量であるとして無視した。

2.2 安定化有限要素法

基礎方程式(1),(2)に対して、Petrov-Galerkin 法による流線風上化法(SUPG法)/圧力安定化法(PSPG法)に基づく安定化有限要素法¹³⁾を適用すると、以下の弱形式が得られる。左辺第1-3項は通常の Galerkin 項、第4項の要素ごとの積分の総和項は移流項の卓越に対して安定化を施す SUPG 項と圧力振動を回避するための安定化項である PSPG 項である。また第5項の要素ごとの積分の総和項は、自由表面の数値不安定性を回避する安定化項である。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) : \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \left\{ \tau_{supg} \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{w} + \tau_{pspg} \frac{1}{\rho} \nabla q \right\} \\ & \cdot \left\{ \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \right\} d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{cont} \nabla \cdot \mathbf{w} \rho \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega = \int_{\Gamma_h} \mathbf{w} \cdot \mathbf{h} d\Gamma, \quad (8) \end{aligned}$$

ここで、 $\mathbf{w}$, q は流速、圧力の重み関数であり、 n_{el} は要素総数を表す。また、 τ_{supg} , τ_{pspg} , τ_{cont} は安定化パラメータである。詳細は文献⁸⁾を参照されたい。

式(8)に対して、P1/P1要素(流速・圧力1次要素)を用いて補間を行うと次のような有限要素方程式を得る。

$$\begin{aligned} & (\mathbf{M} + \mathbf{M}_{\delta}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{K}(\bar{\mathbf{u}}) + \mathbf{K}_{\delta}(\bar{\mathbf{u}})) \mathbf{u} \\ & - (\mathbf{C} - \mathbf{C}_{\delta}) \frac{1}{\rho} p + \nu \mathbf{S} \mathbf{u} - (\mathbf{N} + \mathbf{N}_{\delta}) \mathbf{f} = 0, \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{C}^T \mathbf{u} + \mathbf{M}_{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{K}_{\varepsilon}(\bar{\mathbf{u}}) \mathbf{u} \\ & - \mathbf{N}_{\varepsilon} \mathbf{f} + \mathbf{C}_{\varepsilon} \frac{1}{\rho} p = 0, \quad (10) \end{aligned}$$

ここで、 $\mathbf{M}, \mathbf{K}, \mathbf{C}, \mathbf{S}, \mathbf{N}$ は、係数行列であり、添字 δ, ε は、それぞれ SUPG 項、PSPG 項に起因するものを表わす。時間方向の離散化には2次精度を有するクランク・ニコルソン法を用いる。時間微分 $\partial \mathbf{u} / \partial t$ は次のように表される。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\Delta t}, \quad (11)$$

ここで、 Δt は時刻レベル n と $n+1$ 間の時間ステップサイズである。この時間の離散化において、流速 $\mathbf{u}$, 及び圧力 p は以下のように与えられる。

$$\mathbf{u} = \alpha \mathbf{u}_{n+1} + (1 - \alpha) \mathbf{u}_n, \quad (12)$$

$$p = p_{n+1}, \quad (13)$$

ここに、 α は時間積分の安定性と精度をコントロールするパラメータであり、クランク・ニコルソン法を用いるため $\alpha = 0.5$ を選択する。ただし、連続式は陰的に取り扱う。

2.3 反復解法

前節の離散化過程により導かれた有限要素方程式(9)、(10)は、非線形の連立方程式であり、流体挙動を正確に把握するためには非線形解析を高精度かつ安定に行う必要がある。本研究では、非線形方程式に対してNewton-Raphson法を用いて反復的に解くものとする。非線形方程式(9)、(10)は次式のような連立方程式で表すことができる。

$$\mathbf{R}(\mathbf{d}_{n+1}) = \mathbf{F}, \quad (14)$$

ここで、 $\mathbf{d}_{n+1}$ は時刻レベル $n+1$ での未知節点量($\mathbf{u}$, p)である。式(14)に対してNewton-Raphson法を適用すると、次式のような線形方程式が得られる。

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{d}^k} (\Delta \mathbf{d}_{n+1}^k) = \mathbf{F} - \mathbf{R}(\mathbf{d}_{n+1}^k), \quad (15)$$

ここに、 k はNewton-Raphsonの繰り返し回数を表し、 $\Delta \mathbf{d}_{n+1}^k$ は $\mathbf{d}_{n+1}^k$ に対する増分を表す。式(15)で表される線形方程式は、各時間レベルにおいて収束するまで繰り返すことにより解かれる。この連立1次方程式の解法として、Matrix-Free法¹⁴⁾に基づくGMRES法¹⁵⁾を用いる。

2.4 解析領域の更新

(1) 自由表面位置の求解

自由表面上では、式(7)の運動学的条件を満たす必要がある。この条件は自由表面上の物質粒子は常に自由表面上に留まるという条件である。加えて、壁面上の粒子は常に壁面上に存在することが要求される。解析領域を構成する壁面が鉛直壁である場合、自由表面上の節点は鉛直方向のみに移動させることで解析は可能であるが、壁面が斜面や曲面である場合、鉛直方向のみの移動では解析が困難となる。そこで、境界壁面の幾何形状を考慮するため、式(7)に対して節点移動方向をコントロールする方向ベクトル $\mathbf{e}$ を導入すると、運動学的条件は以下のように表すことができる¹⁰⁾。

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \\ &= \frac{\partial h}{\partial t} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\mathbf{v} = h\mathbf{e}, \quad (17)$$

ここに、 $\mathbf{v}$ は節点変位であり、 h はベクトル $\mathbf{e}$ により規定された方向での水位変動量である。図-1に方向ベクトル $\mathbf{e}$ と節点変位 $\mathbf{v}$ 及び水位変動量 h の関係を示す。また、図-2に斜壁と曲面壁の場合における方向ベクトル $\mathbf{e}$ の設定例を示すが、図中の破線は、方向ベクトル $\mathbf{e}$ に

より移動方向が規定された自由表面上の節点の軌跡を表す。壁面が鉛直壁である場合では、 $\mathbf{e}^T = [0, 0, 1]$ となる。方向ベクトル $\mathbf{e}$ は、境界幾何形状及び現象を考慮して自由表面上の節点どうしが互いに過度に近づいたり離れたりしないように設定する。式(16)をまと

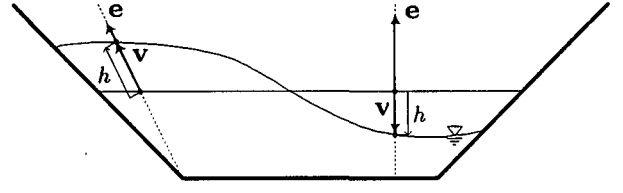
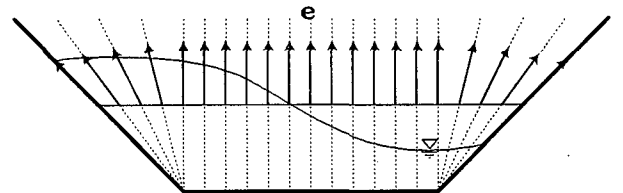
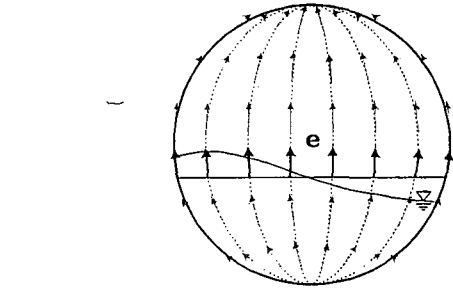


図-1 方向ベクトル $\mathbf{e}$ と節点変位 $\mathbf{v}$ 及び水位変動量 h



(a) 斜壁の場合



(b) 曲面壁の場合

図-2 方向ベクトル $\mathbf{e}$ の設定例

めると、3次元の場合では最終的に以下のような水位変動量に関する幾何学条件が得られる。

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{u_x n_x + u_y n_y + u_z n_z}{e_x n_x + e_y n_y + e_z n_z}, \quad (18)$$

ここで、 u_x, u_y, u_z は流速 $\mathbf{u}$ の各成分であり、 e_x, e_y, e_z 、及び n_x, n_y, n_z は、それぞれ方向ベクトル $\mathbf{e}$ 、外向き単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ の各成分である。式(18)に対して陽的オイラー法を適用することにより、水位変動量 h が求まり、それにより自由表面での節点変位 $\mathbf{v}$ が定まる。

(2) 節点変位の求解

解析領域内部の節点変位は、領域境界の変位を境界値とした線形弾性方程式を解くことにより求める。基礎方程式は以下ようになる。

$$\nabla \cdot \sigma_m(\mathbf{v}) = 0 \quad \text{on } \Omega, \quad (19)$$

ここで、構成方程式は以下のように定義される。

$$\begin{aligned} \sigma_m(\mathbf{v}) &= \lambda_m (\text{tr } \varepsilon_m(\mathbf{v})) \mathbf{I} + 2\mu_m \varepsilon_m(\mathbf{v}), \\ \varepsilon_m(\mathbf{v}) &= \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T), \end{aligned} \quad (20)$$

ここで、 λ_m, μ_m は要素の歪みを制御するパラメータであり、以下のように定義する¹⁶⁾.

$$\lambda_m = \frac{\Delta_{max} - \Delta_{min}}{\Delta_e}, \quad (21)$$

$$\mu_m = 1, \quad (22)$$

ここで、 $\Delta_{max}, \Delta_{min}, \Delta_e$ はそれぞれ最大、最小、評価対象の要素体積を表している。このパラメータは、小さな要素に対しては強い拘束を課して変形を少なくし、一方で大きな要素に関しては変形許容を与えて要素の過度の歪みを抑制するものである。

また、境界条件は以下のように与えられる.

$$\mathbf{v} = \mathbf{g}_m \quad \text{on } \Gamma_{g_m}, \quad (23)$$

$$\mathbf{n} \cdot \sigma_m = h_m \quad \text{on } \Gamma_{h_m}. \quad (24)$$

式(19)に対して Galerkin 法を用い、重み付き残差方程式を導くと以下の式が得られる。

$$\int_{\Omega} \varepsilon_m(\mathbf{w}) : \sigma_m(\mathbf{v}) d\Omega = \int_{\Gamma_{h_m}} \mathbf{w} \cdot \mathbf{h}_m d\Gamma. \quad (25)$$

式(25)を各時間ステップにおいて解くことにより節点変位を求め解析領域を更新する。

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \mathbf{v}. \quad (26)$$

式(25)の解法として, Element-by-Element SCG法¹⁷⁾を用いる.

2.5 下流側流出境界処理

数値解析において、解析領域は有限なものであり、その領域境界には境界条件として何らかの物理量を課す必要がある。河川などのような連続した物理領域を解析対象とする場合、解析領域は物理的に連続した領域を有限な領域に区切ったものとなり、その上流側には流入境界条件が、下流側には流出境界条件が必要となる。流入境界条件には、実験値などにより物理量を Dirichlet 型境界条件として課することができる。しかしながら、下流側流出境界での物理量は基本的に未知量であるため、境界条件を与えることは通常困難であり、様々な議論がなされており、各種の流出境界処理が提案されている。その中でも、本研究で用いる Free Outflow Boundary Condition^{11), 12)}は、有限要素法の特徴である自然境界条件に着目した流出境界条件である。運動方程式(1)に対して Galerkin 法を適用し、弱形式を導くと以下のようになる。

$$\int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{w}) : \sigma d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{w} \cdot \sigma \cdot \mathbf{n} d\Gamma, \quad (27)$$

通常の有限要素法解析においては、式(27)の右辺境界積分項はNeumann型境界条件として応力が規定され、既知量として取り扱われる。一方、Free Outflow Boundary Conditionでは図-3に示す概念図のように、この境界積分項を流出境界上で未知量として取り扱う。

これにより弱形式は流出境界まで拡張されたこととなる。よって、式(15)の時間進行における既知量をまとめた右辺は以下の式ようになる。

$$RHS \rightarrow RHS + \int_{\Gamma_{out}} \mathbf{w} \cdot (-p_{n+1}^k \mathbf{I} + 2\mu \epsilon(\mathbf{u}_{n+1}^k)) \cdot \mathbf{n} d\Gamma (28)$$

また、未知量をまとめた左辺項は以下のようになる。

$$LHS \rightarrow LHS + \int_{\Gamma_{out}} \mathbf{w} \cdot \Delta p_{n+1}^k \mathbf{n} d\Gamma, \quad (29)$$

ここで、 Γ_{out} は流出境界を表す。以上の付加項を領域 Ω に重ね合わせるにより流出領域上で応力を釣り合わせ、流出境界条件を考慮することが可能となる。Free Outflow Boundary Conditionによる付加項を考慮した式(15)は、2.3節で述べたアルゴリズムを変更すること無しに解くことができる。なお、式(28)の流速に関する項は、最小二乗法により評価している。

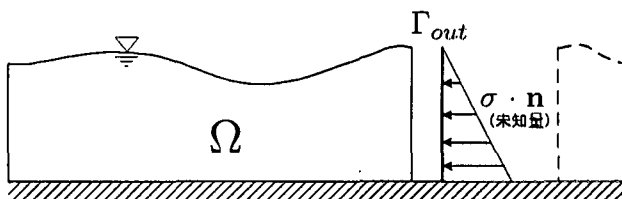


图-3 Free Outflow Boundary Condition 概念图

2.6 並列計算手法

本解析手法における並列計算手法として、分散メモリ型並列計算機を対象とした領域分割法に基づく手法を採用する⁸⁾。領域分割法に基づく並列計算では、各プロセッサは自らに割り当てられた部分領域のみのデータしか持っておらず、省メモリに並列計算を行うことが可能である。ただし、プロセッサ間の通信を行う必要があり、要素ごとのベクトルを全体系のベクトルに重ね合わせる際には隣接するプロセッサ間通信、部分領域でのベクトルの内積計算を全体領域で行う際には全プロセッサ間通信を行う。これらの通信には、MPI(Message Passing Interface)を用いる。なお、プロセッサ間通信の方法については文献²⁰⁾に詳しい。本手法では、連立一次方程式の解法に Matrix-Free 及び Element-by-Element 処理に基づく反復解法を用いているので、その並列化は容易であるとともに高い並列化性能が期待できる。また、領域分割法には Greedy アルゴリズムに基づく自動領域分割法¹⁸⁾, ¹⁹⁾を用い、並列計算機として、8 台の PC(Personal Computer) を Ethernet で接続した PC クラスタ型並列計算機を使用した。PC クラスタ型並列計算機の仕様を表-1 に示す。

2.7 解析アルゴリズム

前述の解析手法による計算の流れをまとめると、図-4に示すフローチャートのようになる。以下にその手順

表-1 並列計算機仕様

PC cluster parallel computer	
CPU	Pentium 4
Clock cycle	2.4GHz
Cache size	512KB
Memory size	1GB
O.S.	Red Hat Linux 7.2
Network	100Base-Tx

をまとめる。

- 1) 与えられた有限要素分割に対して領域分割法を用い、使用するプロセッサ数の部分領域データと部分領域境界上の節点データを得る。
- 2) 各プロセッサは担当する部分領域に関するデータを入力する。
- 3) GMRES法により線形の連立方程式(15)を解き、流速及び圧力の近似解を求解する。GMRES反復内では、データを補完するために隣接プロセッサ間通信と全プロセッサ間通信を行う。
- 4) 水位変動量に関する幾何学条件式(18)により自由表面位置を求解する。要素ごとのベクトルの重ね合わせが必要であるため、隣接プロセッサ間通信を行う。
- 5) 4) で求まった自由表面位置を境界条件として弾性方程式(25)をE-By-E SCG法により解き、節点変位量を求める。SCG法の反復内では、隣接プロセッサ間通信と全プロセッサ間通信を行う。
- 6) 解が収束するまでNewton-Raphson法の反復3)~5)を繰り返す。
- 7) 時間進行を行い、時間ステップが終了するまで3)~6)を繰り返す。

3. 数値解析例

3.1 矩形貯槽内スロッシング解析

提案した本移動境界手法の計算精度を検討するため、数値解析例として3次元矩形貯槽内スロッシング解析を取り上げる。解析条件として、図-5に示すような幅1.0[m]、奥行0.1[m]、高さ1.0[m]の貯水槽に50%貯まった流体に式(30)で表わされる水平加速度を与える。振幅Aは0.0093[m]、角速度 ω は5.311[rad/s]である。

$$f = A\omega^2 \sin \omega t. \quad (30)$$

解析領域を構成する壁面は全て鉛直壁であるため、自由表面上の節点の方向ベクトルは $\mathbf{e}^T = [0, 0, 1]$ とした。流体は水とするため密度 ρ 及び動粘性係数 ν はそれぞれ、 $1.0 \times 10^3 [\text{kg}/\text{m}^3]$ 、 $1.0 \times 10^{-6} [\text{m}^2/\text{s}]$ となる。壁面上の境界条件は、壁面上の節点移動を考慮するためfree-slip条件を与えた。有限要素として四面体要素を用いる。有

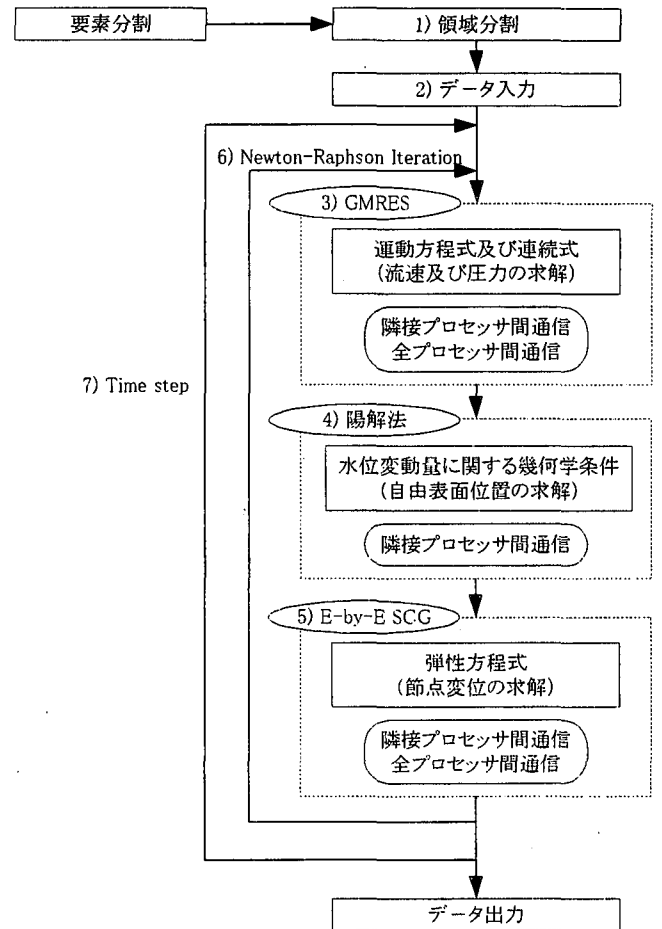


図-4 フローチャート

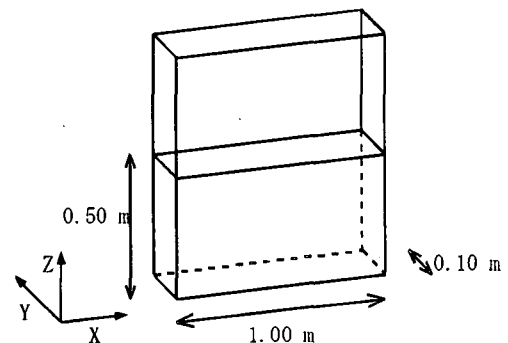


図-5 解析モデル

限要素分割は $40 \times 4 \times 20$ ($x \times y \times z$ 方向)分割とし、総節点数、総要素数はそれぞれ4,305, 19,200となっている。図-6に貯槽内左壁における水位の時刻歴を示す。この図より、解析結果は実験値⁴⁾と良い一致を示しており、本移動境界手法は鉛直壁を有する領域に対しても適応可能であると共に高精度な結果を与えることが確認できた。

3.2 3次元台形貯槽内スロッシング解析

本手法の斜壁を有する領域での有効性を検討するた

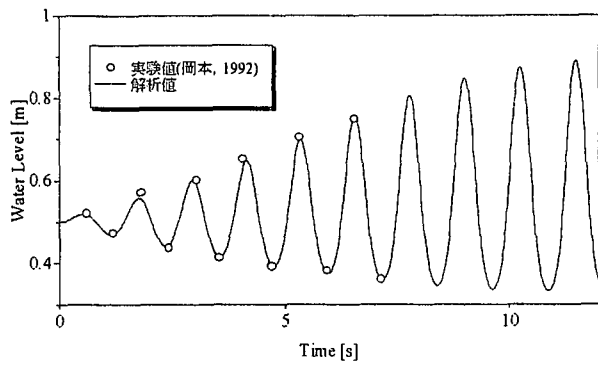


図-6 左壁での水位の時刻歴

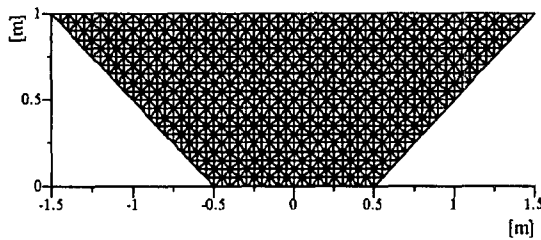


図-7 解析モデル

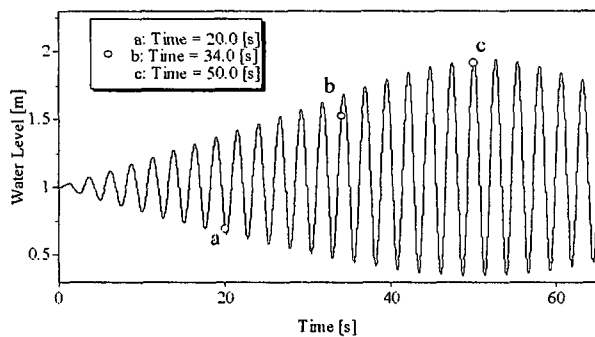


図-8 左壁での水位の時刻歴

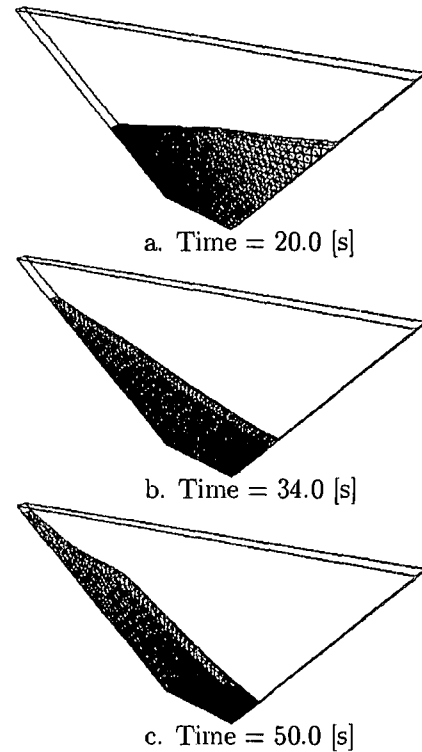


図-9 流体領域形状

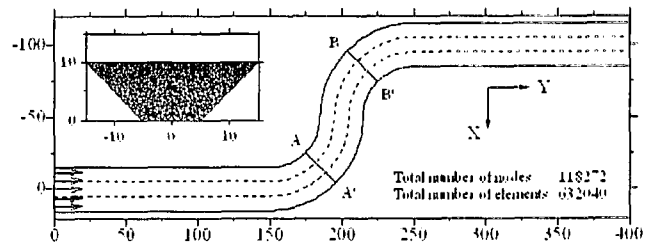


図-10 蛇行水路解析モデル

め、数値解析例として3次元台形貯槽内スロッシング解析を取り上げる。解析条件は図-7のような底面幅1.0[m]、左右に1:1の斜壁を有し、奥行0.1[m]の幅を持つ台形容器内の流体に式(31)で表される水平加振を与える。なお、奥行き方向には有限要素を2分割している。方向ベクトル $\mathbf{e}$ は、図-2(a)のように設定している。振幅 A は0.1[m]、角速度 ω は2.474[rad/s]である。

$$f = A\omega \sin \omega t. \quad (31)$$

流体は水とするため密度 ρ 及び動粘性係数 ν はそれぞれ、 $1.0 \times 10^3 [\text{kg/m}^3]$ 、 $1.0 \times 10^{-6} [\text{m}^2/\text{s}]$ となる。境界条件として壁面でfree-slip条件を与えた。

図-8に貯槽左壁での水位の時刻歴を示す。図中のプロットa~c点での流体領域形状を図-9に示す。斜壁を有する大振幅のスロッシング問題に対して解析領域の更新が行われており、安定に解析を進めることができることがわかる。

3.3 3次元蛇行水路流れ解析

本手法の流出境界を有する領域での有効性を検討するために、洪水流を想定した蛇行水路での自由表面流れ解析を行った。解析領域として図-10に示すモデル図のような中心線形において半径50[m]の蛇行部と上下流側150[m]の直線部よりなる水路を用いる。水路断面は底面幅10[m]、左右に1:1の斜壁を有する台形断面とした。また、初期水深として10[m]を与えた。なお、水路床勾配は1/1000とした。8プロセッサ使用時の領域分割図を図-11に示すが、各プロセッサは図中の色分けされた領域の計算を担当する。有限要素分割として総節点数及び総要素数は、それぞれ118,272、632,040となっている。

境界条件として、非常に流速の速い洪水流を想定して上流側流入境界で流速5[m/s](一様流)を与え、下流側流出境界でFree Outflow Boundary Conditionを、底面及び壁面でfree-slip条件を課した。初期条件として、自由表面を考慮しない定常Stokes方程式の解析解を与えた。解析結果として、図-12に5.0[s]後の流出境界近

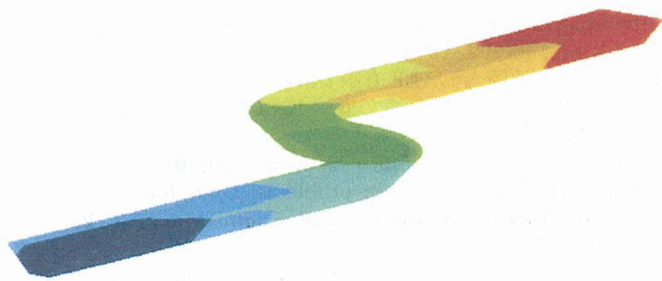


図-11 領域分割図(8プロセッサ使用時)

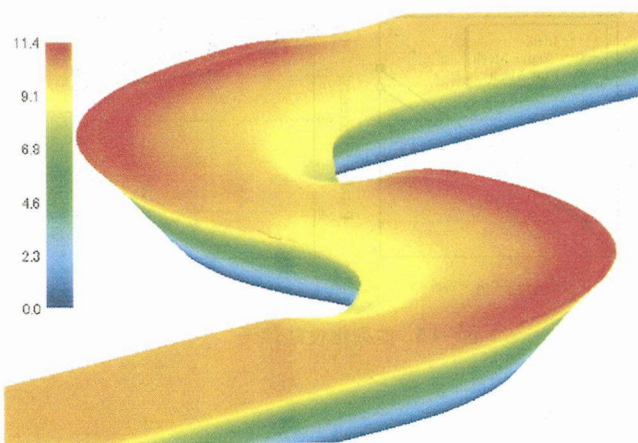


図-13 水位図(蛇行部近傍)

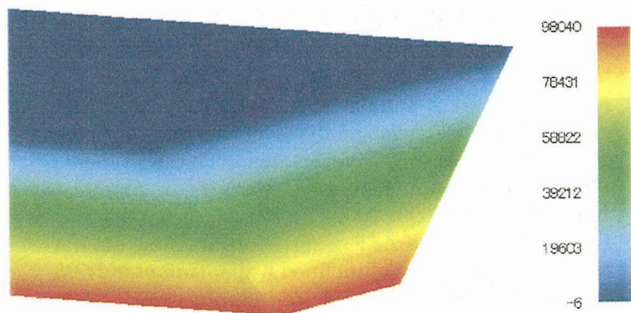


図-12 圧力コンター図(流出境界近傍)

傍での圧力コンター図を示す。図中のカラーバーは圧力 $[N/m^2]$ を表す。この図より、線形的な圧力分布となっており、流出境界で応力は釣り合っていることがわかる。なお、圧力の数値にわずかながら負の値が生じているが、これは自由表面上の力学的条件に自然境界条件として $\sigma \cdot n = 0$ を与えているためである。このことにより、Free Outflow Boundary Condition が自由表面流れの流出境界条件として有効であることがわかる。また、図-13に湾曲部付近の流体領域形状を示す。図中のカラーバーは、鉛直方向座標値 $[m]$ を表す。この図より、慣性力により湾曲部外側の水位が上昇し、反対に内側では低下していることがわかる。また、図-14に図-10のA-A'断面及びB-B'断面での流速ベクトル図を示すが、湾曲部には強い縦渦が発生しており、複雑な流れの挙動が捉えられていることがわかる。また洪水流を想定した流入流速を与えたため、湾曲部において水面変動も大きいことがわかる。今後は解析精度に関して実験値等との比較が必要となる。

3.4 並列化性能評価

前節で示した蛇行流水路流れ解析において、並列化性能評価を行った。有限要素分割数の並列化性能への影響を検討するため、粗い分割である Coarse Mesh(総節点数:32,571,総要素数:158,010)と細かい分割である Fine Mesh(総節点数:118,272,総要素数:63,2040)の2種類の有限要素分割を用いて比較を行った。並列化性能

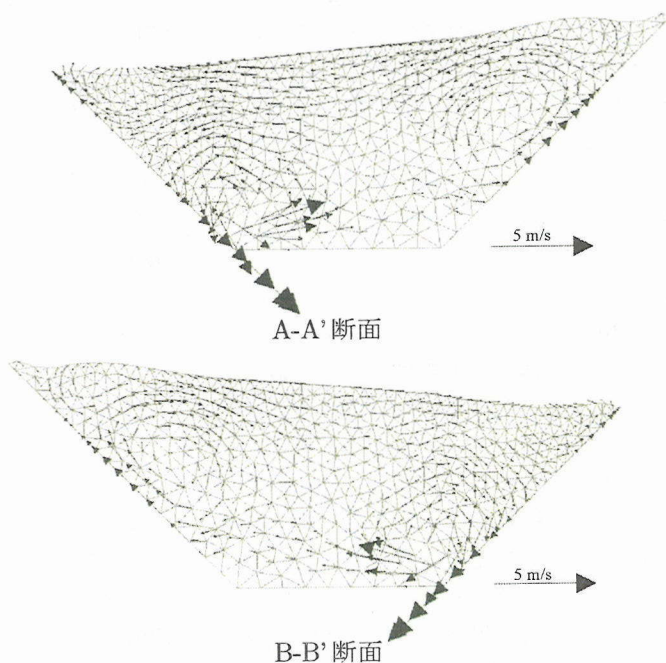


図-14 鉛直断面流速ベクトル図

評価として、演算速度倍率と並列化効率を図-15に示す。ここで演算速度倍率及び並列化効率は以下のように定義した。

$$\text{演算速度倍率}(N) = \frac{\text{計算時間}(1)}{\text{計算時間}(N)}, \quad (32)$$

$$\text{並列化効率}(N) = \frac{\text{演算速度倍率}(N)}{N} \times 100 \quad (33)$$

N は使用したプロセッサ数を示す。この結果より、Coarse Meshの場合と比較してFine Meshの場合では高い並列化効率が得られていることがわかる。これは、有限要素分割数の増加に伴い計算時間に対する通信時間の占有する割合が減少しているためであり、本並列計算手法の大規模計算への有効性を示している。

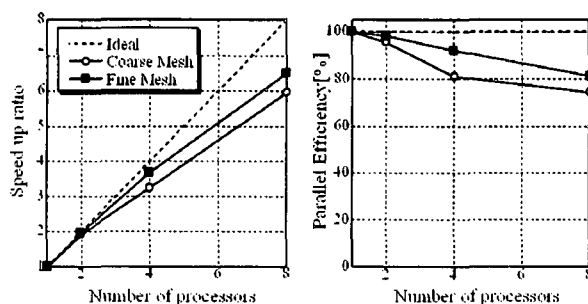


図-15 並列化性能評価

4. おわりに

本論文では、自由表面流れ問題において任意の壁面境界形状及び流出境界を有する問題に適応可能なALE記述に基づく安定化有限要素法を提案した。具体的には、新たに壁面の幾何形状を考慮した自由表面位置の決定法、弾性方程式に基づくメッシュの再構築法及び流出境界における開境界処理法を導入した。また、大規模計算への対応として並列化手法を導入した。数値解析例として3次元矩形及び台形貯槽内スロッシング解析、3次元蛇行水路流れ解析を取り上げ、本手法の有効性について検討した。その結果、以下の結論が得られた。

- 矩形貯槽内スロッシング解析において本手法による計算結果は実験値と良い一致を示し、計算精度の観点から本手法の有効性を確認できた。
- 台形貯槽内スロッシング解析において、斜壁を有する領域に対して安定に解析領域の更新が行えており、移動境界手法の有効性を確認できた。
- 洪水流を想定した3次元蛇行流れにおいて複雑に変動する自由表面の挙動を捕らえることができた。また、流出境界においてFree Outflow Boundary Conditionを課すことにより応力を釣り合わせる事が可能であることが確認できた。
- 並列化性能評価において、高い並列化効率を得ており、本並列計算手法の大規模問題に対する有効性が確認できた。

以上の結果より、本解析手法は任意の壁面境界形状及び流出境界を有する大規模自由表面流れ解析に対して有効的であるといえる。今後は、本手法の実験結果等との詳細な比較検討を行う予定である。

参考文献

- 1) Hirt, C.W., Nichols, B.D. : Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries, *Journal of Computational Physics*, **39**, pp.201-225, 1981.
- 2) Nakayama, T., Shibata, M. : A finite element technique combined with gas-liquid two-phase flow calculation for unsteady free surface flow problem, *Computational Mechanics*, **22**, pp.194-202, 1988.
- 3) Sussman, M., Smereka, P., Osher, S. : A level set approach for computing solution for incompressible

two-phase flow, *Journal of Computational Physics*, **114**, pp.146-202, 1994.

- 4) 岡本隆, 川原陸人 : ALE有限要素法による二次元スロッシング解析, 土木学会論文集, No.441/I-18, pp.29-48, 1992.
- 5) Nomura, T. : ALE finite element computations of fluid-structure interaction problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **112**, pp.291-308, 1994.
- 6) Behr, M., Tezduyar, T.E. : Finite element solution strategies for large-scale flow simulations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **112**, pp.3-24, 1994.
- 7) Guler, I., Behr, M. and Tezduyar, T.E. : Parallel finite element computation of free-surface flows, *Computational Mechanics*, **23**, pp.117-123, 1999.
- 8) 桜庭雅明, 田中聖三, 榎山和男 : PCクラスターを用いたALE並列有限要素法による非線形自由表面流れ解析, 応用力学論文集, 土木学会, **4**, pp.113-120, 2001.
- 9) Kashiwayama, K., Tanaka, S., Sakuraba, M. : PC cluster finite element analysis of sloshing problem by earthquake using different network environments, *Communication in Numerical Methods in Engineering*, **18**, pp.681-690, 2002.
- 10) Behr, M., Abaraham, F. : Free-surface flow simulations in the presence of inclined walls, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **191**, pp.5467-5483, 2002.
- 11) Papanastasiou, T.C., Malamataris, N. and Ellwood, K. : A new outflow boundary condition, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **14**, pp.587-608, 1992.
- 12) Renardy, M. : Imposing "no" boundary condition at outflow: why does it work?, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **24**, pp.413-417, 1997.
- 13) Tezduyar, T.E. : Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations, *Advanced in Applied Mechanics*, **28**, pp.1-44, 1991.
- 14) Johan, Z., Hughes, T.J.R., Mathur, K.K. and Johansson, S.L. : A data parallel finite element method for computational fluid dynamics on the Connection Machine system, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **99**, pp.113-134, 1992.
- 15) Saad, Y., Schultz, M. : GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems', *SIAM J. Scientific and Statistical Computing*, **7**, pp.856-869, 1986.
- 16) 滝佳弘, 鳥居弘志 : 構造と流体の連成問題のためのメッシュリゾーニング技法, 日本機械学会論文集 (B編), No.93-1347, pp.2419-2424, 1994.
- 17) Kashiwayama, K., Tamai, T., Inomata, W. and Yamaguchi, S. : A parallel finite element method for incompressible Navier-Stokes flows based on unstructured grids, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **190**, pp.333-344, 2000.
- 18) Farhat, C. : A simple and efficient automatic FEM domain decomposer, *Computers & Structures*, **28**, pp.576-602, 1988.
- 19) Farhat, C. and Lesoinne, M. : Automatic partitioning of unstructured meshes for the parallel solution of problems in computational mechanics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **36**, pp.745-764, 1993.
- 20) 桜庭雅明, 田中聖三, 玉城宏幸, 榎山和男 : 大規模自由表面流れ解析のためのALE並列有限要素法, 応用力学論文集, 土木学会, **2**, pp.233-240, 1999.

(2003年4月18日受付)