

自由表面流れ解析のための CIVA/VOF 法に基づく 高精度界面捕捉法の構築

Development of Accurate Interface-Capturing method for Free Surface Flow Analysis
based on CIVA/VOF method

桜庭雅明*・弘崎聡**・檜山和男***

Masaaki SAKURABA, Satoshi HIROSAKI and Kazuo KASHIYAMA

*正会員 工修 日本工営株式会社 統合情報技術部 (〒102-8539 東京都千代田区麹町 5-4)

**学生会員 中央大学大学院 理工学研究科土木工学専攻 (〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27)

***正会員 工博 中央大学教授 理工学部土木工学科 (〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27)

This paper presents an accurate interface-capturing method based on CIVA/VOF method for the analysis of free surface flows. The incompressible Navier-Stokes equation and the advection equation is employed for the basic equations. The stabilized FEM based on the SUPG/PSPG method is employed in order to solve the velocity and the pressure. The CIVA method is employed to solve the position of the interface accurately. A new volume correction method is also presented. The present method is applied to the two dimensional broken-dam problem and three dimensional sloshing problem. The computed results show the validity and efficiency of the present method.

Key Words : *Stabilized FEM, VOF method, CIVA method, Volume correction, free surface flow*

1. はじめに

近年の並列コンピュータに代表されるコンピュータの飛躍的な性能向上と数値流体力学 (CFD) 手法の飛躍的進歩により、自由表面流れの現象の理解と解明に数値シミュレーションが数多く用いられるようになってきている。自由表面流れの数値解析手法は、非圧縮性粘性流れの支配方程式である Navier-Stokes 方程式と連続式を用いた三次元解析が一般的になりつつあり、その手法は大きく二つの方法に分類することができる。一つは Euler 的立場により固定メッシュを用いて自由表面の運動学的条件を間接的に考慮する界面捕捉法 (interface-capturing method) であり、もう一つは Lagrange 的立場により移動メッシュを用いて自由表面の運動学的条件を直接的に考慮する界面追跡法 (interface-tracking method) である。界面捕捉法の代表的な手法としては、VOF (Volume of Fluid) 法^{1),2)}や自由表面とその周辺の関係性を距離の関数として表現する Level set 法³⁾が挙げられる。界面捕捉法は、自由表面形状を移流方程式の形で間接的に扱うので、不連続現象である砕波等の複雑な挙動を解析することが可能である。短所としては、体積の保存性に問題があると同時に移流方程式の解析精度が十分でないために高精度な結果を得るためには一般に界面追跡法に比べて細かいメッシュが必要となる。一方、界面追跡法の代表的な手法としては、ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) 法^{4),5)}や Space-Time 法⁶⁾が挙げられる。これらの手法は自由表

面を Lagrange 的に追跡し、解析領域を時々刻々と変化させて解析する手法であり、解析精度の点で有効的な手法である。しかし、跳水や砕波を含むような複雑な自由表面問題の解析は、解析メッシュに破綻が生じ解析が困難になる。このため、自由表面形状が複雑に変化する流れの計算を行うためには、適用性に優れかつ手法としても頑健 (ロバスト) である界面捕捉法による解析が適しているといえる。

そこで本論文では、界面捕捉法に着目して、その中でもアルゴリズムが比較的容易な VOF 法に基づいた上記の問題点を解決する新しい数値解析手法を提案するものである。なお、離散化手法としては、任意形状への適合性に優れている有限要素法を用いる。界面近傍の精度を向上する方法については、界面位置を表現する基礎方程式である移流方程式に高精度な計算法である CIP (Cubic Interpolation Pseudo-particle) 法^{7),8)}を適用することを考える。ただし、CIP 法は四角形および六面体の要素に対して適用可能な方法であり、任意形状の適合性に優れた三角形および四面体の要素には CIP 法で用いる多項式の係数を全て定めることができないといった問題がある。そこで本論文では、CIP 法の拡張型の手法であり、三角形要素および四面体要素においても適用が可能である CIVA (Cubic Interpolation Volume/Area Coordinate) 法⁹⁾を用いた。また、体積の保存性を高める方法としては、新しい体積補正法を導入して、自由表面流れの解析を高精度に行う手法を構築し

た。流れの支配方程式である Navier-Stokes 方程式と連続式の空間方向の離散化に対しては、Petrov-Galerkin 法に基づく流線上流化法/圧力安定化法 (SUPG/PSPG 法)¹⁰⁾を用いた。また、時間方向の離散化にはクランク・ニコルソン法を用いた。大規模問題の対応としては、領域分割に基づく並列計算法を適用した。本手法の有効性を検討するため、数値解析例として、二次元ダムブレイク問題と三次元スロッシング問題を取り上げ、既存の手法による結果や実験結果等との比較を行った。なお、三次元問題については PC クラスタ型並列計算機による並列計算を実施して並列化効率に関する検討も行った。

2. 基礎方程式と境界条件

非圧縮粘性流体の基礎方程式は、Navier-Stokes の運動方程式と連続の式で表される。

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

ここに、 Ω は解析領域、 $\mathbf{u}$ は流速、 ρ は密度、 $\mathbf{f}$ は物体力を表している。また、応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}$ は以下の式で表される。

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \quad (4)$$

ここに、 p は圧力、 μ は粘性係数である。また、Dirichlet 型、Neumann 型境界条件は、次のように与えられる。

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{on } \Gamma_g \quad (5)$$

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{h} \quad \text{on } \Gamma_h \quad (6)$$

ここに、 $\mathbf{g}, \mathbf{h}$ はそれぞれ流速、トラクションの既知量を示し、 Γ_g, Γ_h は流速、トラクションが既知の境界、 $\mathbf{n}$ は外向き単位法線ベクトルを示す。

また、自由表面流れにおける界面の位置を表現する界面関数 (VOF 関数) は、次式のような移流方程式で支配される。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot (\nabla \phi) = 0 \quad (7)$$

ここに、 ϕ は VOF 関数を表し、液体であれば 1、気体であれば 0、自由表面上であれば 0.5 となる。なお、各節点における気体、液体の密度と粘性係数は計算された VOF 関数を用いて次式のように決定できる。

$$\rho = \rho_l \phi + \rho_g (1 - \phi) \quad (8)$$

$$\mu = \mu_l \phi + \mu_g (1 - \phi) \quad (9)$$

ここに、 $\rho_l, \rho_g, \mu_l, \mu_g$ はそれぞれ液体、気体の密度および粘性係数である。

3. 基礎方程式の定式化

3.1 SUPG/PSPG 法に基づく安定化有限要素法

非圧縮粘性流体の基礎方程式に対する空間方向の離散化には、Petrov-Galerkin 法に基づく流線風上化法 (SUPG 法¹¹⁾) / 圧力安定化法 (PSPG 法) に基づく安定化有限要素法¹⁰⁾を適用した。基礎方程式 (1), (2) に対する重み付き残差方程式は式 (10) のようになる。左辺第 1-3 項は通常の Galerkin 項、第 4 項は移流卓越に対して安定化を施す SUPG (Streamline upwind/Petrov-Galerkin) 項および圧力振動を回避するための安定化項である PSPG (Pressure stabilizing/Petrov-Galerkin) 項、第 5 項は界面近傍での急激な密度変化に起因する流速の変化による数値不安定性を回避するための安定化項である衝撃捕捉 (Shock-Capturing) 項⁶⁾である。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) : \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \left\{ \tau_{supg} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w} + \tau_{pspg} \frac{1}{\rho} \nabla q \right\} \\ & \cdot \left\{ \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \right\} d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{cont} \nabla \cdot \mathbf{w} \rho \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega = \int_{\Gamma_h} \mathbf{w} \cdot \mathbf{h} d\Gamma \quad (10) \end{aligned}$$

ここに、 $\mathbf{w}, q$ は流速、圧力の重み関数、 τ_{supg} 、 τ_{pspg} 、 τ_{cont} は安定化パラメータであり、以下のように定義される¹²⁾。

$$\tau_{supg} = \left[\left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{2\|\mathbf{u}\|}{h_e} \right)^2 + \left(\frac{4\nu}{h_e^2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (11)$$

$$\tau_{pspg} = \tau_{supg} \quad (12)$$

$$\tau_{cont} = \frac{h}{2} \|\mathbf{u}\| \xi(Re_u) \quad (13)$$

$$Re_u = \frac{\|\mathbf{u}\| h_e}{2\nu}, \quad (14)$$

$$\xi(Re_u) = \begin{cases} \left(\frac{Re_u}{3} \right) & Re_u \leq 3 \\ 1 & Re_u > 3 \end{cases} \quad (15)$$

ここに、 h_e は要素サイズ、 ν は粘性係数、 Re_u は要素レイノルズ数である。式 (10) に対して、P1/P1 要素 (二次元の場合三角形要素、三次元の場合四面体要素) を用いて補間を行うと次のような有限要素方程式を得る。

$$\begin{aligned} & (\mathbf{M} + \mathbf{M}_{\delta}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{K}(\mathbf{u}) + \mathbf{K}_{\delta}(\mathbf{u})) \mathbf{u} \\ & - (\mathbf{C} - \mathbf{C}_{\delta}) p + \mathbf{S} \mathbf{u} - (\mathbf{N} + \mathbf{N}_{\delta}) \mathbf{f} = 0 \quad (16) \end{aligned}$$

$$\mathbf{C}^T \mathbf{u} + \mathbf{M}_{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{K}_{\varepsilon}(\mathbf{u}) \mathbf{u} - \mathbf{N}_{\varepsilon} \mathbf{f} + \mathbf{C}_{\varepsilon} p = 0 \quad (17)$$

ここに、 $\mathbf{M}, \mathbf{K}, \mathbf{C}, \mathbf{S}, \mathbf{N}$ は、係数行列であり、添字 δ, ε は、それぞれ SUPG 項、PSPG 項に起因するものを表わす。時間方向の離散化において、2次精度を有するクランク

ク・ニコルソン法を用いる。時間微分 $\partial u / \partial t$ は次のように表される。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} \quad (18)$$

ここに、 Δt は時刻レベル n と $n+1$ 間の微小時間増分である。この時間の離散化において、流速 u 、および圧力 p は以下のように与えられる。

$$u = \alpha u_{n+1} + (1 - \alpha) u_n \quad (19)$$

$$p = p_{n+1} \quad (20)$$

ここに、 α は時間積分の安定性と精度をコントロールするパラメータであり、 $\alpha = 0.5$ を選択する。また、連続式は陰的に取り扱う。なお、有限要素方程式(16)、(17)の解法にはElement-by-Element BiCGSTAB法を用いた。

3.2 CIVA 法による界面位置決定の計算手法

自由表面計算に関する基礎方程式である移流方程式(7)の解法には、CIVA(Cubic Interpolation with Volume/Area Coordinate)法⁹⁾を用いた。CIVA法は、移流方程式に対する高精度解析法であるCIP(Cubic Interpolation Pseudo-particle)法を三角形または四面体要素に対して適用が可能となるように、要素内の座標系(面積座標系)を導入して計算できるように拡張した方法である。従来のCIP法は対象となる3次多項式の未知係数が四角形の場合に対して10個(六面体の場合は20個)となるが、CIVA法は三角形要素または四面体要素に対しても係数の不足を補えるように、関数の形を調整することにより計算を可能にしている。

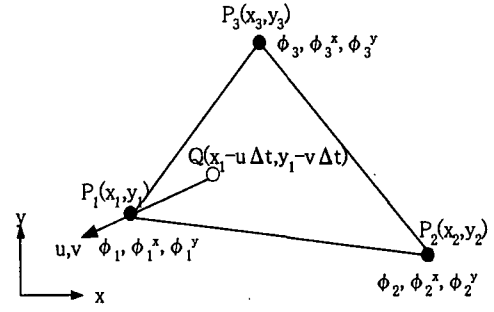
具体的なCIVA法による計算方法は、移流方程式の厳密解である式(21)を用いて、 $\phi^{n+1}(x, t)$ の解を求めるために、 $t - \Delta t$ の値である $\phi^n(x - u\Delta t, t - \Delta t)$ を用いる。なお、上流点 $x - u\Delta t$ に位置する ϕ^n の値は図-1に示す上流側の要素内で補間することによって求める。上流側の要素に対する高次多項式として、三角形要素の場合は式(22)のように、四面体要素の場合は式(23)のように面積座標を用いて表現する。

$$\phi^{n+1}(x, t) = \phi^n(x - u\Delta t, t - \Delta t) \quad (21)$$

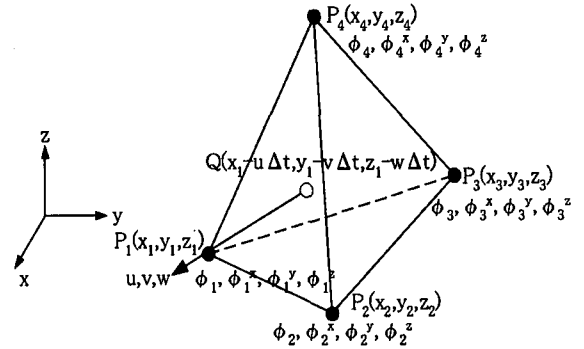
$$\phi(L_1, L_2, L_3) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i L_i + d \sum_{j,k=1}^3 \beta_{jk} [L_j^2 L_k + c L_1 L_2 L_3] \quad (22)$$

$$\phi(L_1, L_2, L_3, L_4) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i L_i + d \sum_{j,k=1}^4 \beta_{jk} [L_j^2 L_k + c(L_1 L_2 L_3 + L_2 L_3 L_4 + L_1 L_2 L_4 + L_1 L_3 L_4)] \quad (23)$$

ここに、 (L_i) は要素内の面積座標であり、 d は1次補間と3次補間の調節パラメータで、 $d=0$ のとき1次、 $d=1$ のとき3次補間となる。なお、 c は既往の研究⁹⁾で最適値として示された $1/2$ を用いた。 α_i, β_{jk} は係数であり、



二次元(三角形要素)の場合



三次元(四面体要素)の場合

図-1 CIVA 法による上流点の評価方法

上流側の三角形要素または四角形要素の節点のVOF関数 ϕ とその空間微係数を用いることにより決定される。 α_i は式(24)のようになり、 β_{jk} は三角形要素の場合は式(25)、四面体要素の場合は式(26)のようになる。

$$\alpha_i = \phi_i \quad (24)$$

$$\beta_{jk} = \phi_j - \phi_k + (x_k - x_j)\phi_j^x + (y_k - y_j)\phi_j^y \quad (25)$$

$$\beta_{jk} = \phi_j - \phi_k + (x_k - x_j)\phi_j^x + (y_k - y_j)\phi_j^y + (z_k - z_j)\phi_j^z \quad (26)$$

ここに、 ϕ^x, ϕ^y, ϕ^z は、VOF関数 ϕ に関する x, y, z 方向の微係数を示す。CIVA法は要素内の補間に3次多項式を用いるが、VOF関数のように界面付近で急激な値の変化が生じるような問題においては、数値振動が生じることが懸念される。このため、本手法ではフィルタ操作⁹⁾を行うことにより、界面付近の振動を除去することとした。二次元(三角形要素)の場合におけるフィルタ操作は、まず次式のようにVOF関数 ϕ^n の各要素における節点の最小値および最大値を求める。

$$\phi_{\min} = \min(\phi_1^n, \phi_2^n, \phi_3^n), \quad \phi_{\max} = \max(\phi_1^n, \phi_2^n, \phi_3^n) \quad (27)$$

次に、式(22)で計算された ϕ^{n+1} が、 $\phi_{\min} \leq \phi^{n+1} \leq \phi_{\max}$ であれば、 $d=1$ として3次多項式を用いるものとして、 $\phi_{\min}, \phi_{\max}$ から外れるのであれば、局所的な値の

変化を避けるために $d = 0$ として1次多項式を用いものとする。この操作により、要素内節点における局所的な値の変化を除去することができるため、数値的な振動を回避することが可能になる。なお、三次元（四面体要素）の場合も同様にしてフィルタ操作を行うことが可能である。

CIVA法の解析精度を検証するために、図-2に示す二次元移流問題の検討を行った。計算の初期条件として直径2の円内に1の値を持つ諸量が水平流速1で移流するものとして、時間経過後における円形状の保持に関する考察を行うものとする。計算条件として、 x, y 方向の分割を 175×50 とした三角形要素（要素数17500、節点数8976）を用いた。なお、CIVA法は陽的な解法であるため微小時間増分量はクーラン数は1以下の条件が課せられるが、精度と安定性の観点から $0.3(\Delta t = 0.009 \text{ 秒})$ を用いた。また、比較のため移流方程式に対して SUPG法¹¹⁾を用いた計算も合わせて実施した。図-3および図-4に時間経過0.94, 1.88, 2.81および3.75秒における SUPG法およびCIVA法の計算結果を示す。この結果より、SUPG法の結果は、 ϕ が0から1の境界である付近にて初期の形状から変化してオーバーシュート・アンダーシュートが見られ形状が保持できないのに対して、CIVA法はほぼ初期形状をほぼ完全に保持したまま移流していることが見てとれる。この結果より、CIVA法は移流問題に対して高精度な計算法であることが確認された。

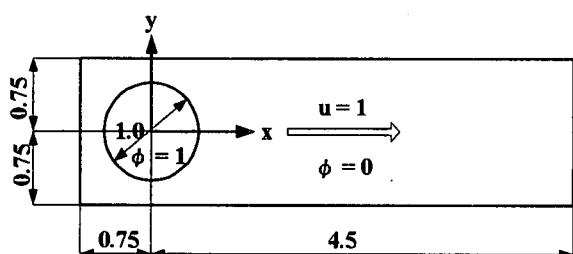


図-2 移流問題における計算条件

4. 体積補正手法

本研究では、計算で生じる液体・気体の体積変化を補正し、体積の保存性を高めるための体積補正の計算手法を新たに提案する。自由表面流れ解析における体積補正手法は、Level set法による計算では既に提案されている¹³⁾。この方法は体積誤差（任意時間経過後の液体または気体の体積-初期状態の液体または気体の体積）を自由表面近傍に分配した値を求めて、その値から自由表面のオフセット量を算定して解析領域全体で補正する方法である。この方法は自由表面を Level set 関数（距離関数）で表現しているため、距離のオーダーを持つ諸量に対して補正を行うものとしている。本研究では自由界面近傍の表現として、VOF 関数を用いてお

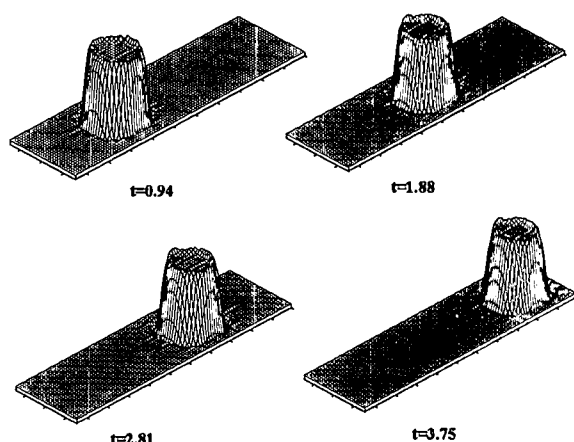


図-3 移流問題における計算結果 (SUPG 法)

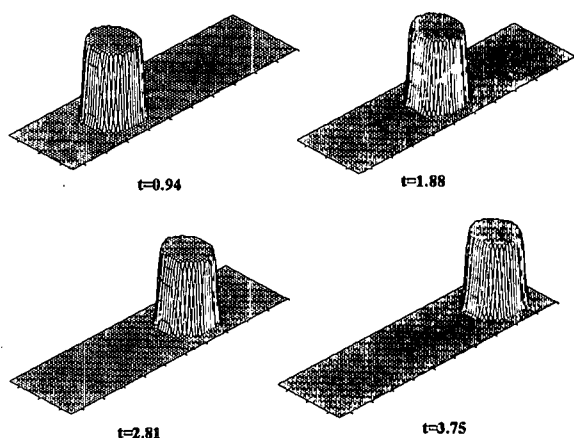


図-4 移流問題における計算結果 (CIVA 法)

り、界面を0.5、液体を1および気体を0としているため、関数自体に距離のオーダーを持たない。このため、何らかの形で自由表面の位置関係把握して体積の増減に応じて自由表面をオフセットする必要がある。本研究では、体積を補正する方法として、自由表面近傍上のみで単純にVOF関数を増減する方法を提案する。計算方法の概念図は図-5に示すとおりであり、それぞれの手順を次に示す。

まず、図-5(a)に示すような自由表面を有する領域に対して、それぞれの計算節点が自由表面近傍 ($0 < \phi < 1$) に位置するかを判断する指標である自由表面判定関数式(28)を用いて、自由表面近傍に重みを持つ値を設定する（図-5(b)参照）。

$$D(\phi) = 1 + \cos\{2\pi(\phi - 0.5)\} \quad (28)$$

ここに、 $D(\phi)$ は自由表面位置では2、自由表面から遠ざかるにつれて0に近づくような関数である。次に、自由表面判定関数より節点毎に得られた値を用いて、解析領域全体での積分値を次式により計算する。

$$A(t) = \int_{\Omega} D(\phi) d\Omega \quad (29)$$

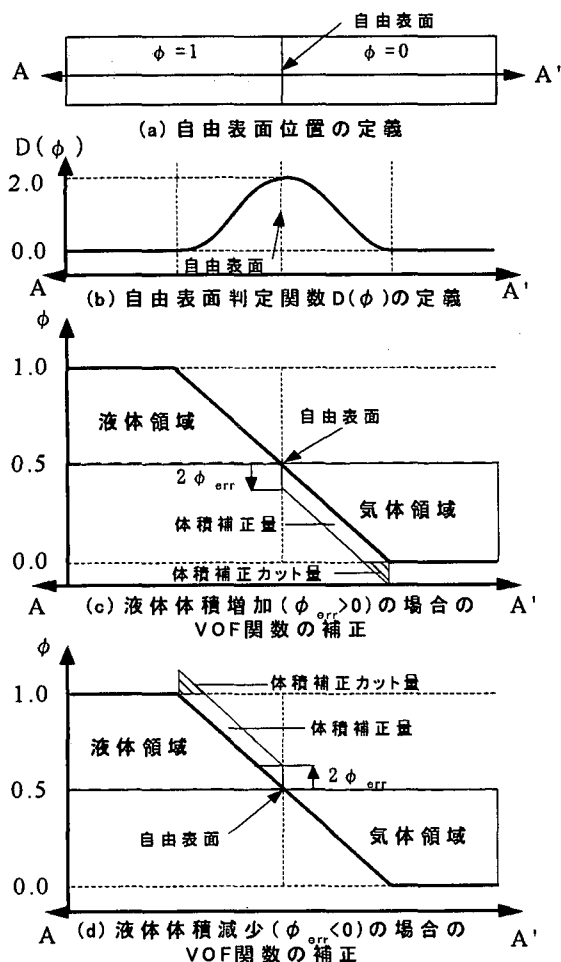


図-5 体積補正手法の概念図

ここに、 $A(t)$ は自由表面近傍における体積のオーダーを持つ値となる。この値を用いて、自由界面近傍上における体積誤差率 ϕ_{err} は次式のように計算することができる。

$$\phi_{err} = \frac{V_{err}(t)}{A(t)} = \frac{(V(t) - V_{init})}{A(t)} \quad (30)$$

ここに、 V_{err} 、 $V(t)$ 、 V_{init} はそれぞれ任意時間ステップにおける液体または気体の体積誤差、任意時間ステップの液体または気体の体積および初期の体積ある。なお、体積誤差率 ϕ_{err} はその値が負であれば液体の体積が減少、正であれば液体の体積が増加していることを表現している。この ϕ_{err} を用いて、式(31)のように自由表面近傍のVOF関数 ϕ を単純に増減させることにより体積補正を行う。ただし、体積を補正する範囲はVOF関数 ϕ の値によって異なり、 ϕ_{err} が正のときは界面より気体側に、負のときは液体側に補正を施す(図-5(c),(d)参照)。

$$\phi(t) = \phi(t) - 2\phi_{err} \begin{cases} 0 < \phi < 0.5, & \phi_{err} \geq 0 \\ 0.5 \leq \phi < 1, & \phi_{err} \leq 0 \end{cases} \quad (31)$$

ここで、係数2は自由表面近傍($0 < \phi < 1$)の1/2の領域に補正を施すことから、導き出される係数である。また、式(31)を用いるとVOF関数 ϕ が1以上の値もしく

は0以下の値になることがある。この場合、1以上の値であれば1を、0以下の値であれば0として補正量の超過分をカットする(図-5(c),(d)参照)ことにより、最終的に体積補正を行ったVOF関数が決定される。

本手法で提案するような体積補正を行うことにより、体積の過不足分を比較的容易に補正することが可能となる。また、本手法はVOF関数が液体であれば1、気体であれば0に近づける働きを有しているため、界面鋭敏化の効果を同時に発揮することができる方法であることがわかる。

5. 並列計算法

本手法では、大規模問題に対して高速かつ省メモリーな計算が可能になるように並列計算手法を導入している。並列計算手法は、超並列計算に有利である分散メモリー型並列計算機を対象として領域分割法に基づく方法を適用する^{14),15)}。また、並列計算機には計算コストの観点で有効なPCクラスタ型並列計算機を使用し、並列化の方法には機種依存性のないMPI(Message Passing Interface)¹⁶⁾を使用して入出力を除くすべてを並列化した。PCクラスタ型並列計算機の仕様は表-1に示すとおりであり、本手法では8台のPC(Personal Computer)をEthernetで接続した。流れ場(流速と圧力)の並列計算法は、著者らの既往の方法¹⁸⁾に準じるものとするが、CIVA法による界面位置の決定のための並列計算は以下のように行うものとする。

- 1) 図-1に示すように、各節点における上流側の要素を決定する。
- 2) 各節点における上流側要素がどのプロセッサに属しているか判定する。
- 3) 担当するプロセッサ毎にCIVA法による高次補間を行い各節点の求解を行う。
- 4) 上流側の要素が複数あるものと判別されるような場合(上流点が辺または節点上にある場合)は、複数の該当要素に対して計算を行い、重複要素数分の平均を求める。

なお、CIVA法は連立方程式を解く必要がない陽的な解法であるため、計算領域全体の重ね合わせによる全プロセッサ通信を必要とせず、並列計算に適した方法であるといえる。

6. 数値解析例

6.1 二次元ダムブレイク問題

本手法の計算精度を検討するために、二次元ダムブレイク問題の計算を行った。初期条件として、図-6に示す静止状態の幅14.6cm、高さ29.2cmの水柱を考える。時間増分量は $\Delta t = 2.0 \times 10^{-4}$ 秒とし、密度および粘性

表-1 PC クラスタ型並列計算機仕様

PC cluster parallel computer	
CPU	Alpha21164
Clock cycle	600MHz
Cache size	4MB
Memory size	1024MB
O.S.	Linux-2.2.14
Network	100Base-TX DEC21140-AF

係数は20℃における水と空気の値を用いた。境界はすべて固体壁としてslip条件を与えた。有限要素分割として水平方向84分割×鉛直方向78分割の構造格子を用い、総要素数13104、総節点数6715である。図-7に時刻0.1～0.4秒後における水面形状の変化、図-9に水際線移動の時系列変化を既往の実験結果^{17),19)}と本手法による結果との比較を示す。これらの結果より、本手法は自由表面形状を的確に表現しており、実験値にほぼ近い値を示すことができています。また、体積補正手法の妥当性を検討するために、体積補正を行う場合と行わない場合について、計算開始から2秒後までの体積保存率の比較を行った。図-8に液体の体積保存率の時系列変化を示す。この結果より、体積補正を行わない場合は、液体体積が増加傾向となるのに対して、本手法で提案した体積補正手法は殆ど初期の体積を保持したまま計算を行うことが可能になっていることが確認できる。なお、図-9においても体積補正を行う場合と行わない場合の結果を示しているが、両者の結果は殆ど変わらないものとなっている。これは、実験結果と比較している時間の範囲が無次元時間0～3であり、図-8における実時間0～0.259秒の範囲となり、体積補正の影響がほとんどない計算開始から比較的短い範囲だけのものを比較しているためである。時間の経過とともに両者の結果に有意な差異が生じることは図-8の結果からも予想できる。

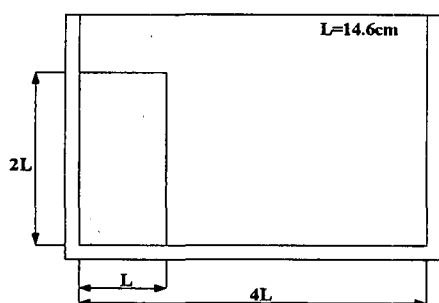


図-6 解析モデル（二次元ダムブレイク問題）

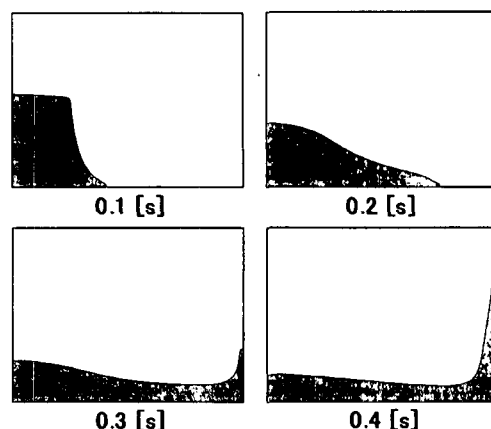


図-7 水面形状の時間変化

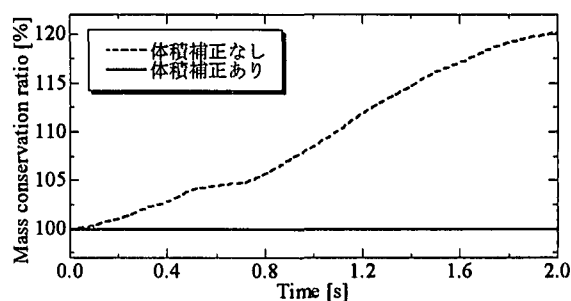


図-8 体積保存率の時系列変化

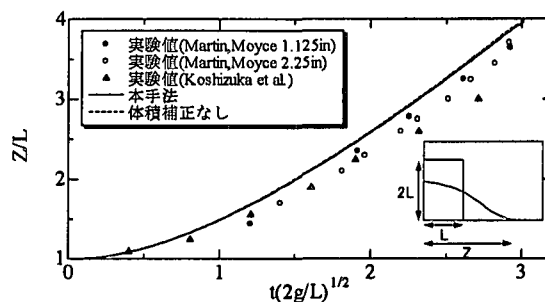


図-9 水際線移動の実験値との比較

6.2 三次元スロッシング問題

(1) 計算精度の検証

次に、三次元問題に対する本手法の計算精度を比較検討するために、貯水槽内流体のスロッシング問題を取り上げる。解析モデルは図-10に示すような幅1.0m、奥行き0.1m、高さ1.0mの矩形水槽に水が50%で満たされていると仮定する。そして、流体に次式で表わされる水平加速度を与える。

$$f = A\omega^2 \sin \omega t. \quad (32)$$

ここに、 A は振幅、 ω は角速度であり、それぞれ0.0093m、5.311rad/secである。また、液体と気体の密度および粘性係数は20℃における水と空気の値を用いた。境界条件は壁面でslip条件を与えた。有限要素として四面体要素を用い、有限要素分割は50（長手方

向) × 5 (奥行き方向) × 50 (高さ方向) の構造格子を用い、総節点数、総要素数はそれぞれ 15,606, 75,000 である。なお、微小時間増分量は $\Delta t = 1.0 \times 10^{-3}$ である。図-11 に自由表面形状の時間変化を示す。図より、本手法による計算は三次元の解析においても妥当な自由表面形状を表現することが可能になっている。また、図-12 に体積補正を行う場合と行わない場合の液体の体積変化率の時系列変化を示す。この結果から分かるように体積補正を行わない場合は、初期体積から 9 秒を過ぎた頃から 10 % 以上の液体体積の増加が見られているが、体積補正を行った場合はほぼ初期体積の状態を維持していることが見てとれる。図-13 に貯水槽左壁における水位の時系列変化を示す。左壁の水位の時系列変化の結果については、岡本らによる実験結果⁴⁾、著者らによる ALE 法の計算結果^{20), 21)} および体積補正を行わない計算結果も併せて示している。この図より、体積補正を行わない場合においては液体の体積が保存されていないことから、水位が増加傾向となっている。体積補正手法を用いた計算結果は、実験値および ALE 法による計算結果と良い一致を示している。以上の結果より、三次元問題においても本手法の妥当性および有効性を確認することができた。

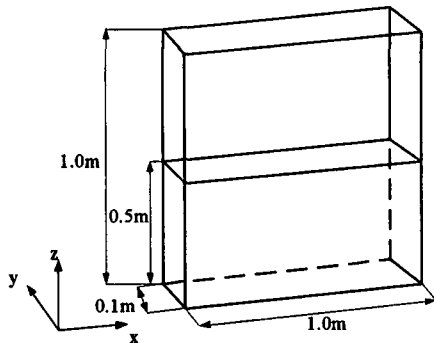


図-10 解析モデル (矩形水槽)

(2) 並列化性能評価

次に、大規模な三次元問題の解析を実現することを目的として PC クラスタ型並列計算機による並列計算を行った。並列化性能を検討するために、表-2 に示す 2 種類の有限要素分割に対する計算を実行してプロセッサの台数 1, 2, 4, 8 台に対する並列化性能を算定した。並列計算のための領域分割としてはスライス型に分割し、各領域の要素数が等しくなるようにした。図-14 に演算速度倍率と並列化効率を示す。この結果より、メッシュ L の場合において演算速度倍率が高くなる結果を示しているが、メッシュ S およびメッシュ L の両者ともほぼ理想倍率に近い結果となっている。なお、メッシュ S でプロセッサを 2 台用いた場合においては、並列化効率がわずかに 100 % を越えているが、これは、キャッシュの効果に起因した結果であるといえる。本手法は、自由表面の計算に陽的な解法である CIVA 法を適用して

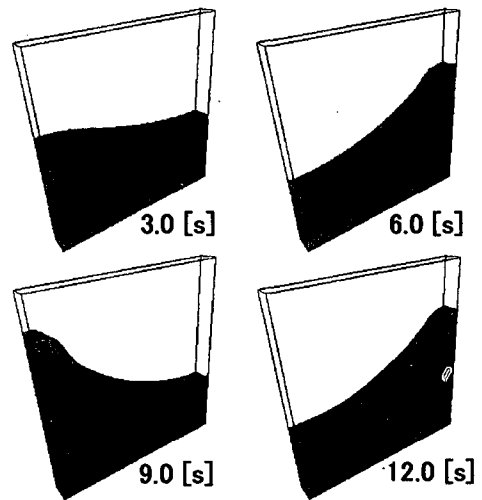


図-11 水面形状の時間変化

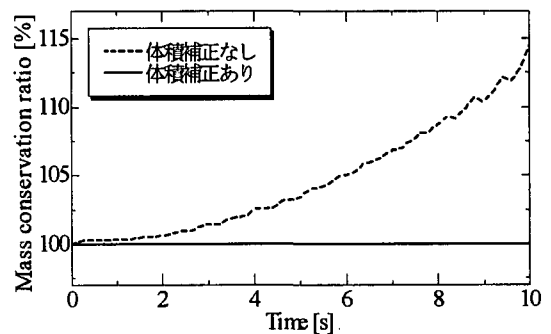


図-12 体積保存率の時系列変化

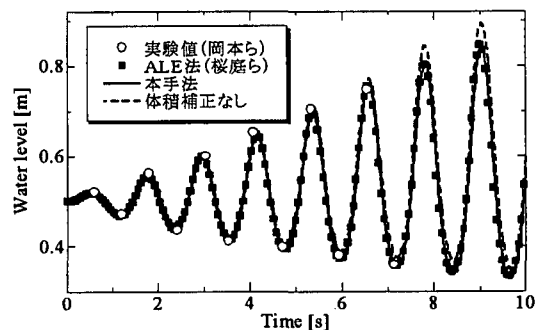


図-13 左壁の水位の時系列変化

いることから、比較的粗いメッシュを用いても高い並列化効率を得ることが可能であり、並列計算に有利な手法であるといえる。

7. 結論

本論文では、自由表面流れを高精度かつ安定に計算することが可能な、CIVA/VOF 法による自由表面流れ解析手法の提案を行った。また、液体の体積を一定に保つための手法として新しい体積補正手法を提案した。数値解析例として二次元ダムブレイク解析および矩形

表-2 有限要素分割

	メッシュL	メッシュS
総節点数	59049	15606
総要素数	307200	75000
分割数	80×8×80	50×5×50

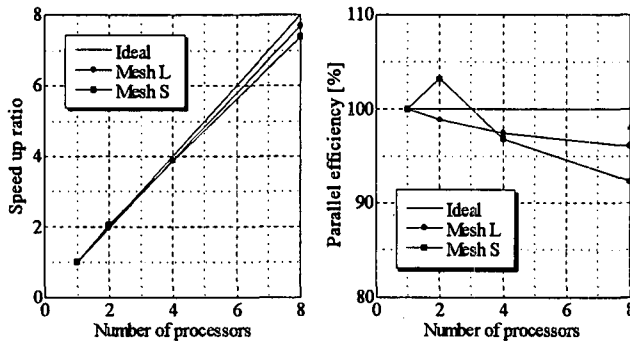


図-14 並列化性能評価

貯槽内スロッシング解析を行い、本解析手法の妥当性および有効性を検討した。その結果、以下の結論が得られた。

- 自由界面の位置を定める移流方程式の解析方法としてCIVA法を導入した結果、界面付近の精度を低下することなく安定に計算が行うことが可能となった。
- 提案した体積補正手法は体積保存性が高く、また界面の鋭敏化の効果も同時に発揮されることが確認できた。
- 三次元スロッシング問題における本手法の解析結果は、実験値および界面追跡法であるALE法による解析結果とほぼ一致し、計算精度の観点で有効性が示された。
- 本手法は、移流方程式の解法に陽的処理のCIVA法を用いているため、高い並列化性能を示し大規模問題に対して有効性が示された。

以上より、本手法は自由表面流れ解析に対して有効な手法であるといえる。今後は、複雑な碎波現象等を有する問題に対して本手法を適用する予定である。

参考文献

- 1) Hirt, C. W., Nichols, B. D. : Volume of fluid method for the dynamics of free boundaries. *J. Comp. Phys.*, 39, pp.201-225, 1981.
- 2) Nakayama, T. and Shibata, M. : A finite element technique combined with gas-liquid two-phase flow calculation for unsteady free surface flow problems, *Comput. Mechanics*, 22, pp.194-202, 1998. No.56-531, pp.3248-3256, 1990.
- 3) Sussman, M., Smereka, P. and Osher, S. : A Level Set Approach for Computing Solutions for Incompressible Two-Phase Flow, *J. of Comput. Physics*, 144, pp.146-159, 1994.
- 4) 岡本隆, 川原陸人: ALE有限要素法による二次元スロッシング解析, 土木学会論文集, No.441/I-18, pp.29-48, 1992.
- 5) Nomura, T. : ALE finite element computations of fluid-structure interaction problems, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 112, pp.291-308, 1994.
- 6) Aliabadi, S. and Tezduyar, T.E. : Space-time finite element computation of compressible flows involving moving boundaries and interfaces, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 107, pp.209-224, 1993.
- 7) Yabe, T. and Aoki, T. : A universal solver for hyperbolic equation by cubic-polynomial interpolation, *Comput. Phys. Commun.*, 66, pp.219-242, 1991.
- 8) 榎原孝文, 棚橋隆彦, 松本昌昭: CIP法の有限要素法化(3次元移流方程式の検証): 日本機械学会論文集(B編), No.63/609, pp.1612-1619, 1997.
- 9) Tanaka, N. : Development of highly accurate interpolation method for mesh-free flow simulations III. Analysis of accuracy and stability, *Int. J. Num. Meth. in Fluids*, 41, pp.675-694, 2003.
- 10) Tezduyar, T.E., Mittal, S., Ray, S.E. and Shih, R. : Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 95, pp.221-242, 1992.
- 11) Brooks, A.N. and Hughes, T.J.R. : Streamline upwind / Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 87, pp.364-384, 1991.
- 12) Guler, I., Behr, M. and Tezduyar, T.E. : Parallel Finite Element Computation of Free-Surface Flows, *Comput. Mechanics*, 23, pp.117-123, 1999.
- 13) 姫野武洋, 渡辺紀徳: 微小重力下で気液境界を有する流れの数値解析: 日本機械学会論文集(B編), No.65/635, pp.2333-2340, 1999.
- 14) Farhat, C. : A simple and efficient automatic FEM domain decomposer, *Computers & Structures*, Vol.28, No.5, pp.579-602, 1988.
- 15) Farhat, C. and Lesoinne, M. : Automatic partitioning of unstructured meshes for the parallel solution of problems in computational mechanics, *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, Vol.36, pp.745-764, 1993.
- 16) Gropp, W. : Using MPI, Portable Parallel Programming with the Message-Passing Interface, 307p., The MIT Press, 1994.
- 17) Martin, J. C. and Moyce, W.J. : An experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane, *Phil. Trans. Roy. Soc. London A*, Vol. 244, pp.312-324, 1952.
- 18) 根本深, 桜庭雅明, 樫山和男: 並列有限要素法を用いたVOF法による自由表面流れ解析, 第15回数値流体力学シンポジウム講演要旨集, p.181, 2001.
- 19) Koshizuka, S., Tamako, H. and Oka, Y. : A particle method for incompressible viscous flow with fluid fragmentation, *Comput. Fluid Dynamics J.*, 4, No.1, pp.29-46, 1994.
- 20) 桜庭雅明, 田中聖三, 樫山和男: PCクラスタを用いたALE並列有限要素法による非線形自由表面流れ解析, 応用力学論文集, Vol.4, pp.113-120, 2001.
- 21) Kashiwara, K., Tanaka, H. and Sakuraba, M. : PC cluster parallel finite element analysis of sloshing problem by earthquake using different network environments, *Commun. Numer. Meth. Engrg.*, 18, pp.681-690, 2002.

(2003年4月18日受付)