

Eulerian ハイドロコードによる破壊解析

Fracture Analyses by using an Eulerian Hydrocode

岡澤重信*・David J. Benson**

Shigenobu OKAZAWA and David J. BENSON

*正会員 博(工) 広島大学助教授 大学院工学研究科 社会環境システム専攻 (〒739-8527 広島県東広島市鏡山 1-4-1)

**Ph.D 米国カリフォルニア大学サンディエゴ校教授 機械・航空工学科 (La Jolla, CA 92093-0411, USA)

This paper applies an Eulerian hydrocode to fracture analyses of solid material. The hydrocode treats the solid like fluid and includes not only momentum but also mass and energy equations for conservation. The Eulerian description fixes meshes on space and materials flow through the fixed meshes. Hence, the Eulerian code allows arbitrarily large deformations and new free surfaces without a special algorithm. Fracture phenomena, which are difficult to compute by conventional structural codes in the Lagrangian description, can be simulated by the Eulerian hydrocode.

Key Words : hydrocode, fracture, Eulerian description

1. はじめに

あらゆる工業製品の設計において、計算機上で性能評価をする計算機支援工学 (Computer Aided Engineering: CAE) は、現在では実験に代わる技術として注目を集めている。その中でもシミュレーションの主役を担う有限要素法は CAE の最も重要な柱となるツールであり、線形の有限要素法に関して言えばその適用は着実に産業界に浸透し、CAE にも積極的に活用されている。しかしながら、非線形有限要素法を実務に適用するためには、解析の実現象との整合性など多くの問題がまだ残されている。特に固体の終局的な破壊のシミュレーションは工学的に非常に重要であるにもかかわらず、通常の解析コードではその扱いが困難であるのが実状である。

Eulerian 表示でのハイドロコード (以下, Eulerian ハイドロコード) は、固体の非線形有限要素解析における上記の問題点を解決できると期待される。Eulerian 表示の解析においてはメッシュが空間に固定され、そのメッシュを越えて物質が移動する。その結果、任意の大変形問題も扱え、特別な方法なしに新たな自由境界面を生成できる。よって、固体力学において理論を構成される際に通常用いられる Lagrangian 表示では困難な破壊解析が Eulerian 表示により可能となる。

また、ハイドロコードとは固体を流体のように扱ってその力学現象を解くための解析コードの総称であり、Hydrodynamic Computer Code を短縮した名称である¹⁾²⁾。通常の固体解析においては、運動量保存則から導出される仮想仕事の原理のみが用いられるのに対して、ハイドロコードでは、質量・運動量・エネルギーの3つの保存則を考慮する。さらに構成方程式における応

力を、圧力と偏差応力とに分離して定義することにより、様々な材料を扱えることもハイドロコードの特徴である。

本論文では、Eulerian ハイドロコードについて述べると共に、それを Lagrangian 表示の有限要素解析では困難であると思われる破壊解析に適用して、その有用性を明らかにする。

2. 支配方程式

通常の構造解析コードにおける Lagrangian 表示での保存則の記述には、物質時間導関数が用いられる。それに対して、Eulerian 表示での保存則の記述においては空間時間導関数が用いられる。物質時間導関数と空間時間導関数の関係は以下ようになる。

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\nabla\phi) \quad (1)$$

ここで、 ϕ は任意量であり、 $\mathbf{v}$ は物質点の速度ベクトルである。そして、 $D\phi/Dt$ と $\partial\phi/\partial t$ は、それぞれ ϕ の物質時間導関数と空間時間導関数であり、右辺第2項は一般的に移流項と呼ばれている。

Lagrangian 表示での質量・運動量・エネルギー保存則は以下ようになる。

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} \quad (3)$$

$$\rho \frac{DE}{Dt} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) + \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \quad (4)$$

ここで、 ρ は密度、 $\boldsymbol{\sigma}$ は Cauchy 応力テンソル、 $\mathbf{b}$ は物体力ベクトル、 E は単位質量当たりの全エネルギーである。

全エネルギー E は、運動エネルギーと単位質量当たりの内部エネルギー e の和として以下のように表現できる。

$$\rho E = \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \rho e \quad (5)$$

またハイドロコードでは、式 (4) の代わりに、速度ひずみテンソル D を用いて次のようなエネルギー保存則が代替的に用いられることが多い。

$$\rho \frac{De}{Dt} = \sigma : D \quad (6)$$

以降は、式 (6) で示される内部エネルギーによるエネルギー保存則を用いることにする。

式 (1) の関係を用いて、Lagrangian 表示の質量・運動量・エネルギーの3つの保存則 (2),(3),(6) を Eulerian 表示へ書き換えるとそれぞれ以下ようになる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \rho) + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{\rho} (\nabla \cdot \sigma) + \mathbf{b} \quad (8)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\nabla e) = \frac{1}{\rho} (\sigma : D) \quad (9)$$

さらに、これらの Eulerian 表示での保存則 (7),(8),(9) は以下のように簡略化できる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \nabla \cdot \sigma + \rho \mathbf{b} \quad (11)$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{v}) = \sigma : D \quad (12)$$

式 (10),(11),(12) を本研究で扱う支配方程式とする。

3. 解法

Eulerian 表示での支配方程式 (10),(11),(12) を解くための方法としては、大きく分けて2種類ある。1つめは支配方程式を1ステップで解く方法であり³⁾⁴⁾、2つめは支配方程式をLagrangian ステップと Eulerian ステップの2ステップに分割して解く方法である⁵⁾。本研究では、その計算方法が明快な後者の方法を用いることにする。なお、この方法は「操作分割法」と呼ばれる。

3.1 操作分割法

図-1 は、操作分割法概念を示したものである。最初に、時間を進めるLagrangian ステップにおいて、メッシュを変形させて物質を追跡する。次に、時間を固定した Eulerian ステップにおいて、歪んだメッシュを空間上で固定された Eulerian メッシュに引き戻す操作を行う。

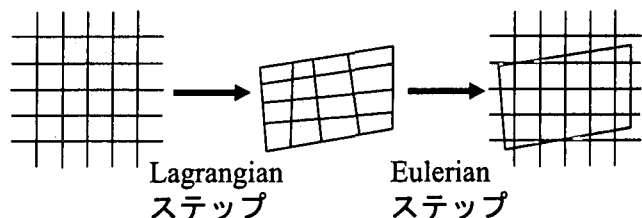


図-1 Eulerian 表示での支配方程式を解くための操作分割法

Eulerian 表示での支配方程式 (10),(11),(12) は以下のような共通の形を有している⁶⁾。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \Phi = f \quad (13)$$

ここで Φ は流動関数、 f は外力項である。また左辺第2項は移流項である。操作分割法では、式 (13) を2つの方程式に分割する。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = f \quad (14)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \Phi = 0 \quad (15)$$

式 (14) は、外力項を含んだLagrangian ステップにおける方程式であり、式 (15) は移流項を含んだ Eulerian ステップにおける方程式である。式 (14) と通常のLagrangian 表示での支配方程式との違いは、時間導関数の種類である。ここで Eulerian 表示であることから、空間時間導関数を物質時間導関数に変換できるとすれば、式 (14) は通常のLagrangian 表示の支配方程式と同一となる。また式 (15) を解くためには、Lagrangian ステップによって歪んだメッシュを元の固定された Eulerian メッシュに戻す操作が必要となり、同時に隣接する要素間の物質の移動体積を計算しなくてはならない。さらに、質量、運動量、エネルギー、応力などのLagrangian ステップ後の解を、移流アルゴリズムにおいて固定された計算メッシュ上に投影する必要がある⁶⁾。

3.2 Lagrangian ステップ

本研究で扱うようなハイドロコードにおいては、応力波やエネルギーなどの刻々の変化を忠実に把握しなければならない。よって、Lagrangian 表示、Eulerian 表示を問わずに、ハイドロコードの解法として動的陽解法が用いられるのが一般的である。本研究でも、特にことわりのない限り中央差分法による動的陽解法を用いることにする。計算メッシュとしては、アワーズラス制御⁷⁾を施した4節点の低減積分の有限要素（平面ひずみ）を用いる。

3.3 Eulerian ステップ

操作分割法における Eulerian ステップにおいては、1次元の移流計算法を多次元の問題へ適用する。式 (15)

の1次元の離散形は次のようになる。

$$\phi_{j+1/2}^+ = \frac{\phi_{j+1/2}^- V_{j+1/2}^- + \phi_j^- \Delta V_j - \phi_{j+1}^- \Delta V_{j+1}}{V_{j+1/2}^- + \Delta V_j - \Delta V_{j+1}} \quad (16)$$

ここで、下付き文字の整数は節点、節点の $\pm 1/2$ は要素を示す。また上付き文字の $-$ と $+$ は、それぞれ移流前後の値を意味している。節点 i における移流体積は ΔV_i 、要素体積は V である。移流体積内の諸量 ϕ_j^- 、 ϕ_{j+1}^- を評価するために、monotonic upwind schemes for conservation laws (MUSCL) ⁹⁾を用いる。本研究の操作分割法における解析精度は、その大部分がEulerian ステップにおける移流方程式の解法に依存する。MUSCL 法は効率的かつ精度良く移流方程式を解く方法であり、ハイドロコードにおいては採用されることが多い。

3.4 空隙部分の取り扱い

Eulerian 表示の有限要素法においては、何も材料が混入しない要素は空隙要素として扱う。空隙要素の剛性をゼロとするとその箇所が特異状態となり、解析を行うことができない。そこで空隙要素に関しては微小な剛性を持たせている。

また材料が部分的に混入する要素を混合要素として扱う。混合要素においては、まずLagrangian ステップで求めた節点の速度から要素内のひずみ速度を求め、材料がその要素に空隙なしで充填されているとして応力を計算する。そして、その応力に要素内の材料の充填率を乗じて要素としての応力とする⁸⁾。

また混合要素においては、要素内の材料の境界面の評価を正確に行わなくてはならない。本研究では、要素内の材料の充填率をパラメーターとした Volume of Fluid (VOF) 法¹⁰⁾を高精度にした方法¹¹⁾を用いる。

4. 構成方程式

先に述べたように、ハイドロコードでは構成方程式における応力を、圧力と偏差応力とに分離して定義する。一般に前者を状態方程式、後者を材料モデルと呼ぶ。

本研究での構成方程式として、金属材料の大ひずみ、高速ひずみ、高温を考慮した Johnson-Cook モデル¹²⁾を用いる。Johnson-Cook モデルでは、金属材料の構成方程式として一般的な等方硬化則の J_2 流れ理論を採用する。

J_2 流れ理論における圧力は、降伏に無関係であり常に弾性状態として表される。よって状態方程式は、

$$P = -K \text{tr}(\epsilon) \quad (17)$$

として、圧力の全体量が逐次評価できる。ここで、 K は体積係数、 ϵ はひずみテンソルである。この状態方程式は計算メッシュが物質の変形と共に動くLagrangian

表示には有効であるが、計算メッシュが空間に固定されている Eulerian 表示においては適用できない。そこで、Eulerian 表示での弾性状態の状態方程式として、以下のように定義する。

$$P = K \left(\frac{\rho_e}{\rho_{e0}} - 1 \right) \quad (18)$$

ここで、 ρ_e, ρ_{e0} はそれぞれの計算メッシュにおける現時点での密度及び初期の密度である。

J_2 流れ理論における偏差応力に関しては、von Mises の降伏関数による関連流れ則を用いる。

$$\dot{\sigma}' = 2G(\dot{\epsilon}' - \dot{\epsilon}^p) \quad (19)$$

$$\bar{\epsilon}^p = \int \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\epsilon}^p : \dot{\epsilon}^p dt \quad (20)$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{3}{2}} \sigma' : \sigma' \quad (21)$$

ここで σ' は偏差Cauchy 応力、 ϵ' は偏差ひずみ、 ϵ^p は塑性ひずみ、 $\bar{\epsilon}^p$ は相当塑性ひずみ、 σ_y は降伏応力、 G はせん断係数である。Johnson-Cook モデルでの降伏関数 σ_y は、相当塑性ひずみ $\bar{\epsilon}^p$ 、無次元化された塑性ひずみ速度 $\dot{\bar{\epsilon}}^p$ 、相同温度 T^* の関数である。

$$\sigma_y = [A + B(\bar{\epsilon}^p)^n][1 + C \ln \dot{\bar{\epsilon}}^p][1 - T^{*m}] \quad (22)$$

$$\dot{\bar{\epsilon}}^p = \frac{\dot{\bar{\epsilon}}^p}{\dot{\bar{\epsilon}}_0^p} \quad \text{for } \dot{\bar{\epsilon}}_0^p = 1.0 \text{ s}^{-1} \quad (23)$$

$$T = \frac{e}{C_p} + T_{\text{ROOM}} \quad (24)$$

$$T^* = \frac{T - T_{\text{ROOM}}}{T_{\text{MELT}} - T_{\text{ROOM}}} \quad (25)$$

ここで C_p は熱容量、 T_{ROOM} と T_{MELT} はそれぞれ室温と溶解温度である。

そして損傷度 D を、相当塑性ひずみ増分 $\Delta \bar{\epsilon}^p$ を ϵ^f で除した値の累積として定義する。

$$D = \sum \frac{\Delta \bar{\epsilon}^p}{\epsilon^f} \quad (26)$$

$$\epsilon^f = [D_1 + D_2 \exp(D_3 \sigma^*)][1 + D_4 \ln \dot{\bar{\epsilon}}^p][1 + D_5 T^*] \quad (27)$$

損傷度 D が1.0に達した時点で、材料は破壊したと判断し、その計算メッシュの応力と充填率を直ちにゼロとする。このような操作をするために、厳密には質量保存則を満たさなくなるが、要素分割を細かくすることでその不整合性を軽減させることができる。

5. 例題

これまで述べてきた Eulerian ハイドロコードを、破壊を伴う例題計算に適用する。扱う材料はすべて鋼材

表-1 AISI4340 鋼材の材料パラメーター

G (GPa)	77.52
K (GPa)	158.73
C_p (J/kg·K)	477
T_{ROOM} (K)	288.15
T_{MELT} (K)	1793
A (GPa)	0.792
B (GPa)	0.510
C	0.014
D_1	0.05
D_2	3.44
D_3	-2.12
D_4	0.002
D_5	0.61
m	1.03
n	0.26
ρ (kg/m ³)	7830

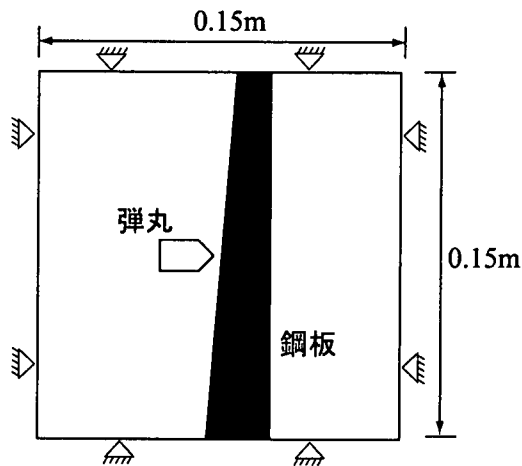


図-2 弾丸の貫通解析モデル

で、表-1 のような米国規格の AISI4340 鋼材のパラメーターを Jonson-Cook モデルで用いた。

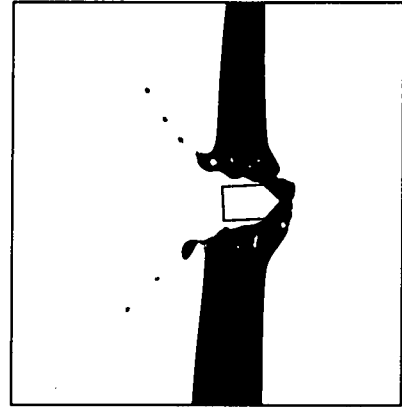
すべての例題において解析領域を正方形メッシュにより 200×200 で分割し、時間増分は Lagrangian 及び Eulerian ステップでの Courant 条件⁶⁾を共に満たすように設定した。

5.1 弾丸の貫通解析

最初の例題は、弾丸の鋼板への貫通解析である。図-2 が解析モデルである。剛体を仮定した弾丸に 950 m/s の初速度を垂直右方向に与える。

図-3 は解析結果である。元来、ハイドロコードは兵器の解析などの軍事的のために開発されたものであり、この種の衝撃解析を最も得意とする。Lagrangian 表示の解析では二重節点などを用いて破断を扱ってきた経緯があるが、その場合の解析コードは煩雑なもの

70 μ 秒後



130 μ 秒後

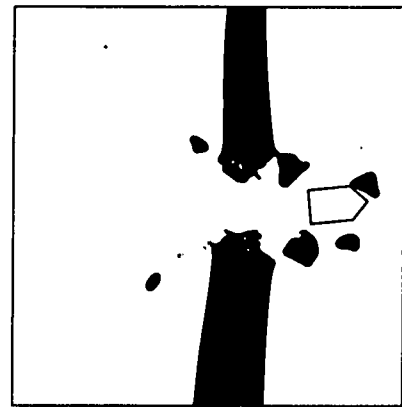


図-3 弾丸の貫通解析結果

になる。Eulerian 表示の採用によって、特別な操作なしに弾丸が鋼板に衝突した後の鋼板の破片が飛び散る様子をシミュレートできる。

5.2 引張試験片の塑性不安定解析

次は引張試験片の塑性不安定解析である。引張力が作用する試験片においては、まず幅方向になだらかなくびれ(拡散くびれ)が発生する。拡散くびれが発生した後は、やがてくびれ領域にひずみが集中する局所化により試験片は最終的な破断に至る。このような引張試験片で観察される均一変形から破断までの一連の現象は、金属材料の種類によらず共通して見られる現象であり塑性不安定現象として広く知られている。

引張試験片の塑性不安定現象を詳細に把握することは、工学的に非常に重要な課題であり、最近では引張試験片の塑性不安定現象の計算機シミュレーションが精力的になされている¹³⁾¹⁴⁾¹⁵⁾。しかし、せん断帯の発生そしてその後の破断は、固体解析で一般的な Lagrangian 表示の解析コードではその取り扱いが困難である。

そこで、Eulerian ハイドロコードにより塑性不安定現象の破断までの解析を試みる。上記で述べた塑性不安定現象を扱うために、この例題だけは Lagrangian ステッ

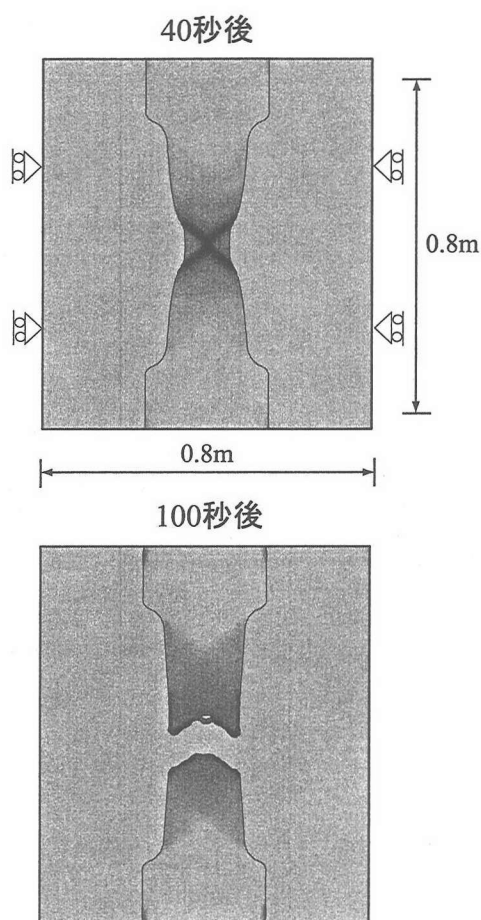


図-4 引張試験片のせん断帯及び破断

プにおいては静的な陰解法を採用した。図-4はEulerianハイドロコードによる引張試験片の塑性不安定解析結果である。試験片の中央部にくびれを発生させるために、計算メッシュの上下端部の接線方向を拘束して、外向き法線方向に擬似的な一定速度 0.002m/s を与えている。図-4での白黒の濃淡は相当塑性ひずみ分布を示している。ハイドロコードによって運動量だけでなく、質量、エネルギーの保存則も考慮することによって、拡散くびれに続くせん断帯の発生が確認できる。さらにEulerian表示の計算によりせん断帯以降の破断そのもののシミュレートも可能である。このようにEulerianハイドロコードを用いることによって、Lagrangian表示の有限要素解析では困難であったせん断帯及びその後の破断のシミュレートが可能となる。

なお、本解析では計算メッシュの端部を時間と共に移動させ、メッシュ数が変化しないようにそれぞれの方向に等間隔な新たにメッシュを作り直している。そして、材料の速度と計算メッシュの移動速度の差を用いて、Eulerステップの移流方程式を解くという、いわばArbitrary Lagrangian Eulerian (ALE) 法を採用していることを付記する。

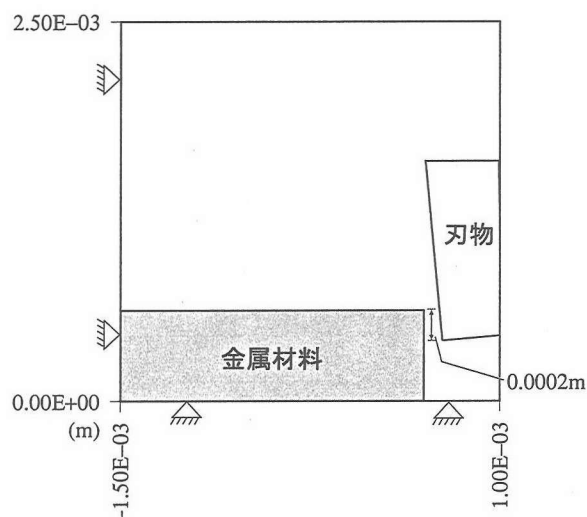


図-5 高速切削加工シミュレーションの解析モデル

5.3 高速切削加工シミュレーション

最後の例題は高速切削加工シミュレーションである。高速切削加工においては完全分離した無数の切りくずが発生する¹⁶⁾。これらの切りくずが刃物、場合によっては切削加工機器全体を破損させる原因ともなり得る。ゆえに、高速切削加工での無数の切りくずの生成過程を詳細に把握することは、より先進的な切削加工機器を開発するために必要不可欠である。しかし、実現象と整合する高速切削加工における完全分離した無数の切り屑をシミュレートした例は筆者らの知り限りでは存在しない。

以上のような背景の下、高速切削加工シミュレーションにEulerianハイドロコードを適用した。図-5が解析モデルである。剛体と仮定した刃物を 100m/s の高速で左水平方向に移動させる。図-6は高速切削加工のシミュレーション結果である。高速切削加工のシミュレーションにおいては、大変形の取り扱いや切りくずの金属材料からの切り離しなどの解析上の困難に遭遇するが、Eulerianハイドロコードを用いることによって、それらの困難を難なく解決することができる。また、図-7は高速切削加工の実験結果¹⁶⁾であるが、図-6のシミュレーション結果と同様な無数の切りくずが発生していることが確認できる。

6. おわりに

本研究では、Eulerianハイドロコードにおける支配方程式とその効率的な解法について述べ、それを固体の破壊解析に適用した。得られた知見を以下に示す。

1. ハイドロコードにおいて、質量・運動量・エネルギーの3つの保存則を考慮して解析を行うことにより、主に運動量保存則だけを用いる構造解析コー

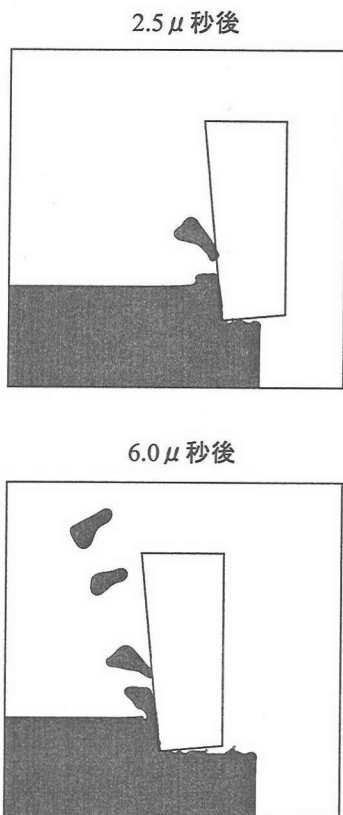


図-6 高速切削加工シミュレーション結果

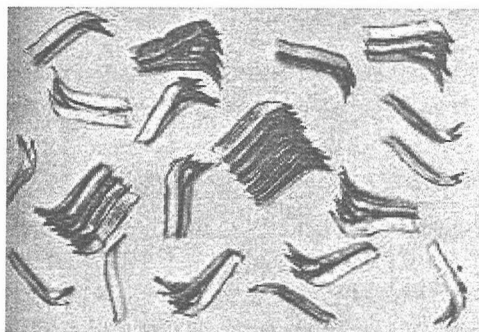


図-7 高速切削加工実験で完全分離した切りくず¹⁶⁾

ドでは不可能であった力学現象のシミュレーションが可能となる。

2. Eulerian 表示ではメッシュが空間に固定されているので、大変形問題でも有限要素の健全性が保持される。そのため有限要素の健全性を理由に解析が停止することはない。また特別な計算手法なしに自由境界面の生成が可能であり、固体の破断解析が容易に実行できる。
3. 非線形有限要素解析で計算が停止する理由は主に2つ考えられる。1つは解析手法で陰解法を用いた場合の収束悪化によるもの、もう1つは有限要素の歪みが顕著になりその健全性が失われることである。Eulerian ハイドロコードによってこれら2つの問題点は解消でき、解析が途中で停止する

ということは基本的にはない。よって Eulerian ハイドロコードは、非常にロバストな計算手法であるとも言える。

以上のことから、Eulerian ハイドロコードによる有限要素解析を行うことによって、これまでの一般的な Lagrangian 表示の構造解析コードでは解けなかった破壊などを含む実現象を安定に解くことが可能となる。ゆえに、Eulerian ハイドロコードは今後の CAE における強力なツールとして期待できる。

参考文献

- 1) Johnson, W.E.: History and application of hydrocodes in hypervelocity impact, *Int. J. Impact Engng.*, 5, pp.423-439, 1987.
- 2) Anderson, C.E. Jr.: An overview of the theory of hydrocodes, *Int. J. Impact Engng.*, 5, pp.33-59, 1987.
- 3) Hughes, T.J.R., Tezduyar: Finite element methods for first-order hyperbolic systems with particular emphasis on the compressible Euler equations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 45, pp.217-284, 1984.
- 4) Sod, G.A.: A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws, *J. Comput. Phys.*, 27, pp.1-31, 1978.
- 5) Chorin, A.J.: Flame advection and propagation algorithms, *J. Comput. Phys.*, 35, pp.1-31, 1980.
- 6) Benson, D.J.: Computational methods in Lagrangian and Eulerian hydrocodes, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 99, pp.235-394, 1992.
- 7) Belytschko, T., Bindeman, L.P.: Assumed strain stabilization of the 4-node quadrilateral with 1-point quadrature for nonlinear problems, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 88, pp.311-340, 1991.
- 8) Benson, D.J.: A mixture theory for contact in multi-material Eulerian formulations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 140, pp.59-86, 1997.
- 9) Van Leer, B.: Towards the ultimate conservative difference scheme IV, *J. Comput. Phys.*, 23, pp.276-299, 1977.
- 10) Hirt, C.W., Nichols, B.D.: Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries, *J. Comput. Phys.*, 39, pp.201-225, 1981.
- 11) Youngs, D.L.: Time dependent multi-material flow with large fluid distortion, Morton, K. W., Baines, M. J. (Eds.), *Numerical methods for fluid dynamics*, pp.273-285, 1982.
- 12) Johnson, G.R., Cook, W.H.: Fracture characteristics of three metals subjected to various strain, *Engrg. Fracture Mech.*, 21, pp.31-48, 1985.
- 13) Tvergaard, V., Needleman, A. and Lo, K.K.: Flow localization in the plane strain tensile test, *J. Mech. Phys. Solids*, 29, pp.115-142, 1981.
- 14) Zbib, H.M. and Jubran, J.S.: Dynamic shear banding: A three-dimensional analysis, *Int. J. of Plasticity*, 8, pp.619-641, 1992.
- 15) Okazawa, S, Usami, T, Noguchi, H. and Fujii, F.: Three-dimensional necking bifurcation in tensile steel specimens, *J. Eng. Mech.*, ASCE, 128, pp.479-486, 2002.
- 16) Komanduri, R., Schroeder, T., Hazra, J., von Turkovich, B.F.: , Flom, D.G.: On the catastrophic shear instability in high-speed machining of an AISI 4340 steel, *J. of Engrg. for Ind.*, 104, pp.121-131, 1982.

(2003 年 4 月 18 日受付)