

# Level Set 法を用いた気泡崩壊の数値計算に関する研究

Study on Numerical Calculation for Rupture of Bubble at Water Surface by Level Set Method

坪郷浩一\*, 朝位孝二\*\*, 羽田野袈裟義\*\*\*

Koichi TSUBOGO, Koji ASAI and Kesayoshi HADANO

\*学生会員 修士(工学) 山口大学大学院 理工学研究科博士後期課程 システム工学専攻  
(〒755-8611 宇部市常盤台 2-16-1)

\*\*正会員 博士(工学) 山口大学助教授 工学部社会建設工学科 (〒755-8611 宇部市常盤台 2-16-1)

\*\*\*正会員 工博 山口大学教授 工学部社会建設工学科 (〒755-8611 宇部市常盤台 2-16-1)

In this paper, we attempt numerical simulations of ruptures of bubble at water surface by using the Level Set method. The Level Set method proposed by Sussman *et al.* is one of the Gas-Liquid two phase analyzing method. Firstly, we try to investigate the effect of the numerical scheme for advection term on the performances of the Level Set method by solving a dam break problem. Especially, volume conservations and mass conservations are checked. The third order TVD-MUSCL scheme was used for advection term of a movement equation, and the CIP method was used for advection term of a distance function. Secondly, the numerical simulations of ruptures of bubbles are conducted.

*Key Words: the Level Set method, rupture of bubble, advection term, mass conservation, gas-liquid two phase flow*

## 1. はじめに

水表面を通して輸送される物理量は運動量, 熱など様々であるが, 最近では自然環境問題の意識の高まりに伴い酸素あるいは CO<sub>2</sub>, メタンなどの温暖化ガスに注目が集まっている。海洋, 河川, 湖沼などの水圏環境は水中内の溶存酸素濃度に強く依存する。このため溶存酸素素の挙動を解明することは大変重要な課題となっている。

水表面を通しての輸送現象は水表面乱れが密接に関係している。水表面に乱れを引き起こす要因として以下の 4 つの自然現象が考えられる<sup>1)</sup>。

- ①風波による水表面付近の乱れ
- ②水滴や水塊の水表面への衝突
- ③水中の渦や乱れの水表面衝突
- ④水表面での気泡の破裂

これらの現象を解明する研究手法は物理実験と数値シミュレーションに分類できよう。上記④に対する物理実験としては, 鍋坂ら<sup>1)</sup>の実験がある。彼らは表面張力と粘性が水表面における気泡の破裂現象に与える影響を調べるために超高速ビデオカメラを用いた実験手法を考案した。気泡崩壊現象は極めて時間スケールの小さい現象である。彼らの研究は微小時間スケールの現象の観察に大きな貢献を果たしている。しかしながら, 流体内部の流動の様子や応力分布などを計測するには至っていない。

一方, 近年のコンピュータの性能と数値流体力学の飛躍

的進歩, さらには数値計算を行う環境の整備費用の低廉化によって数値シミュレーションが手軽に行われるようになってきた。数値シミュレーションであれば流速や応力などの情報を得ることが可能である。

気泡崩壊現象は気液二相流の流体現象であり気液界面の融合・分裂という界面の大変形を伴う。気液界面を再現する手法として界面追跡法と界面獲得法があるが界面大変形問題では VOF 法に代表されるような界面獲得法が有効である。最近では気液二相流を直接解く界面獲得法が発展しており C-CUP 法<sup>2), 3)</sup>, 密度関数法<sup>4)</sup>などが代表例である。しかしながら, これらの方法は計算進行とともに数値拡散により気液界面がぼやけてくる。気泡崩壊現象は表面張力が重要な外力であり, 界面獲得法では通常表面張力の評価に CSF 法<sup>5)</sup>が用いられる。界面がぼやけてくると界面の曲率の評価精度が低下し正しい表面張力の算定が行えなくなる。一方, Level Set 法<sup>6), 7), 8), 9)</sup>は気液界面を常にシャープに獲得することができる。

本研究は Level Set 法を用いた気泡崩壊現象の解析モデルを構築することを目標とし, まず基礎式中の運動方程式と後述の Level Set 関数の輸送方程式に使用する移流項計算スキームの組み合わせについて検討し, 最も質量保存性の良い組み合わせを求めることを目的とする。また, そのスキームを用いて表面張力が気泡崩壊現象の様子にどのような違いを与えるか考察する。

## 2. 基礎方程式

気液二相流体の基礎方程式は連続の式、運動量方程式および密度の保存則である。気相の流速は音速よりも十分遅くまた高圧力状態ではないので、液相・気相とも非圧縮性流体として取り扱う。したがって基礎式は次式で表される。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = \frac{1}{\rho} (F - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + F_s) \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \rho) = 0 \quad (3)$$

ここで  $\mathbf{u}$  は流速ベクトル、 $p$  は圧力、 $\mu$  は粘性係数、 $F$  は体積力、 $F_s$  は表面張力である。ここではすべて保存形式で記述したが、後述の移流項計算スキームによっては非保存形式（対流形式）で記述される方程式を用いた。

## 3. 数値計算法の概要

### 3.1 Level Set 関数

Level Set 法では式 (3) を解く代わりに以下に示す Level Set 関数の保存則を解く。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \Phi) = 0 \quad (4)$$

ここで  $\Phi$  は Level Set 関数である。この関数は気液界面からの符号付き距離関数で、気液界面で 0 の値を、液相で正の値を、気相で負の値をとる。つまり、ある任意点においてそこから最も近くに存在する気液界面までの距離を表すものである。また距離関数の性質として  $|\nabla \Phi| = 1$  が常に要求される。

### 3.2 再初期化

Level Set 関数を輸送する段階で距離関数としての性質が失われ、場合によっては界面が消失してしまう。そこで式 (4) の計算の後に Level Set 関数の再初期化を行い距離関数の性質を持つように修正を行う。具体的には次式の定常解を求めることになる。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = S(\Phi_0)(1 - |\nabla \Phi|) \quad (5)$$

ここで、 $S(\Phi_0) = \Phi_0 / \sqrt{\Phi_0^2 + \varepsilon}$  である。また  $\Phi_0$  は式 (4) を解いた直後の Level Set 関数の値、 $\varepsilon$  は不定形を防ぐための格子幅程度の値を持つパラメータである。

上式から分かるように界面位置 ( $\Phi_0 = 0$ ) ではすでに定常解になる。つまり式 (5) は界面位置を変化させず距離関数の性質を回復させるものである。

式 (5) の解法はいくつか提案されているが<sup>9)</sup>、本研究では Sussman らの解法<sup>6)</sup>を採用した。しかし、この解法で

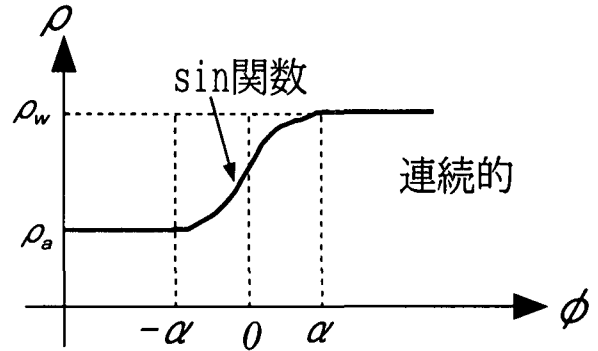


図-1 物性値（密度）の変化

は式 (5) の収束計算を行っているうちに、界面近傍の値も修正され、結果的に界面位置が移動してしまうことが分かった。そこで界面近傍  $|\Phi_0| \leq 0.5\alpha$  の範囲では式 (5) を計算しないことにした。

### 3.3 密度と粘性係数

気液界面上 ( $\Phi=0$ ) では液体と気体の密度および粘性係数の物性値の平均を与える。また液相側 ( $\Phi>0$ ) では液体の物性値を与え、同様に気相側 ( $\Phi<0$ ) では気体の物性値を与えればよい。しかしながら、このままでは気液界面で物性値が不連続に変化し数値不安定の原因となる。そこで気液界面を挟んで  $2\alpha$  の厚さで物性値が連続的に変化するようにスムージングを行う (図-1 参照)。式 (6) に示す Heaviside 関数を用いれば密度および粘性係数をそれぞれ式 (7)、式 (8) のように統一的に表現できる。

$$H = 0.5 \cdot \max \left[ -1.0, \min \left\{ 1.0, \frac{\Phi}{\alpha} + \frac{1}{\pi} \sin \left( \frac{\pi \Phi}{\alpha} \right) \right\} \right] \quad (6)$$

$$\rho(x, t) = 0.5(\rho_{Liq} + \rho_{Gas}) + (\rho_{Liq} - \rho_{Gas})H(x, t) \quad (7)$$

$$\mu(x, t) = 0.5(\mu_{Liq} + \mu_{Gas}) + (\mu_{Liq} - \mu_{Gas})H(x, t) \quad (8)$$

ここで  $\alpha$  は格子幅程度の大きさである。式 (7)、(8) の添え字 *Liq*, *Gas* はそれぞれ液体、気体を表す。また  $x$  は位置座標である。

### 3.4 表面張力

表面張力は CSF モデル (Continuum Surface Force model) を用いる。これは表面力である表面張力を体積力に置き換える手法である。

### 3.5 体積補正

Level Set 法では計算を進めていく過程で数値誤差の蓄積により体積が保存されない問題が生じてくる。したがって、体積を保存するための体積補正が必要になる。体積補正の手法についてもいくつか提案されているが<sup>10)</sup>、本研

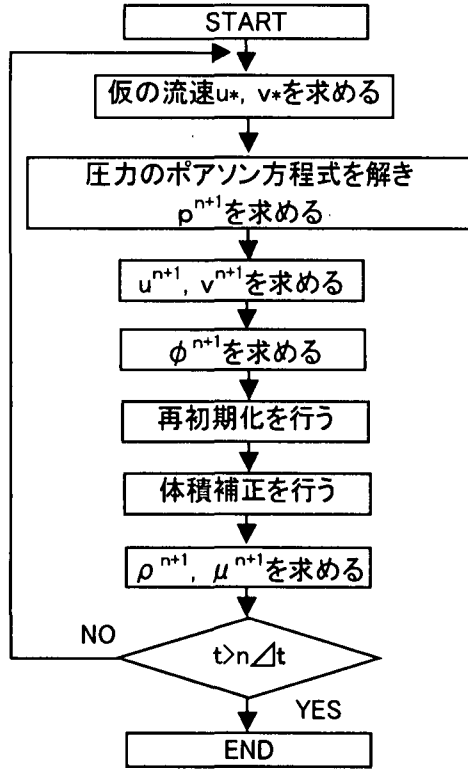


図-2 計算アルゴリズムのフローチャート

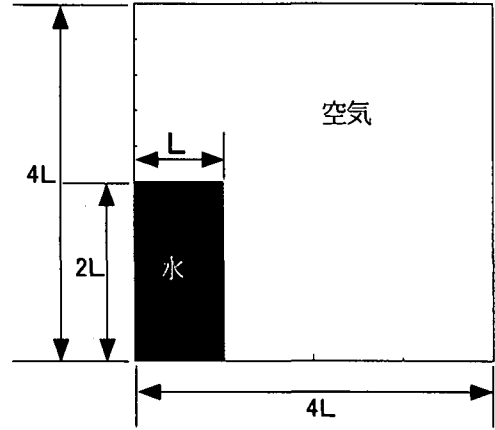


図-3 ダム破壊モデル計算の初期配置

表-1 モデル計算で使用した物性値

| 物性      | 値                           |
|---------|-----------------------------|
| 水の密度    | 1000kg/m <sup>3</sup>       |
| 空気の密度   | 1.25 kg/m <sup>3</sup>      |
| 水の粘性係数  | 1.0×10 <sup>-3</sup> (Pa・s) |
| 空気の粘性係数 | 1.5×10 <sup>-5</sup> (Pa・s) |
| 重力加速度   | 9.80(m/s <sup>2</sup> )     |

究では簡便な姫野らの方法<sup>9)</sup>を採用した. 具体的な手順は以下の通りである.

再初期化の終了後に体積補正を行う. まず Heaviside 関数を式 (9) のように場全体で積分を行って現在時刻  $t$  の気相体積を計算する.

$$V_{Gas}(t) = \int_V (0.5 - H) dV \quad (9)$$

初期の気相体積を  $V_{Gas}(0)$  とおけば, 現在時刻の体積誤差は次式で表される.

$$V_{Err}(t) = V_{Gas}(t) - V_{Gas}(0) \quad (10)$$

$V_{Err}(t)$  が最初期化で変化した気相体積である. 計算領域内の気液界面の総面積を  $A(t)$  とし以下の量を計算する.

$$L_{Err}(t) = \frac{V_{Err}(t)}{A(t)} \quad (11)$$

ここで  $A(t)$  は次式で容易に求めることが出来る.

$$A(t) = \int_V \delta dV \quad (12)$$

ここに,

$$\delta = \frac{0.5}{\alpha} \left[ \operatorname{sgn} \left( 1.0, \frac{\Phi}{\alpha} + 1.0 \right) - \operatorname{sgn} \left( 1.0, \frac{\Phi}{\alpha} - 1.0 \right) \right] \times \left\{ 1.0 + \cos \left( \frac{\pi \Phi}{\alpha} \right) \right\} \quad (13)$$

再初期化の終了時点で得られた Level Set 関数の値に

$L_{Err}(t)$  を均一に加えることにより体積誤差は解消される.

### 3.6 時間刻み幅

時間刻み幅は移流項に関する時間制限  $\Delta t_c$ , 表面張力項に関する時間制限  $\Delta t_s$ , および粘性項に関する時間制限  $\Delta t_v$  を満足しなければならない. 時間制限値はそれぞれ以下のように計算される<sup>6)</sup>. ここで  $Re$  はレイノルズ数,  $B$  はボンド数である.

$$\Delta t_c = \min \left( \frac{\Delta x}{|u|} \right)$$

$$\Delta t_v = \min \left[ \frac{3}{14} (\rho(Re) \Delta x^2 / \mu) \right]$$

$$\Delta t_s = \sqrt{(\rho_a + \rho_w) \cdot \frac{B}{8\pi} \cdot \Delta x^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Delta t^{n+1} \leq \frac{1}{2} \min(\Delta t_s, \Delta t_v, \Delta t_c) \quad (14)$$

### 3.7 計算アルゴリズム

数値計算のアルゴリズムは MAC 法系の Fractional Step 法を用いた. 圧力に関するポアソン方程式の解法は SOR 法を採用した. 計算アルゴリズムのフローチャートを図-2 に示す.

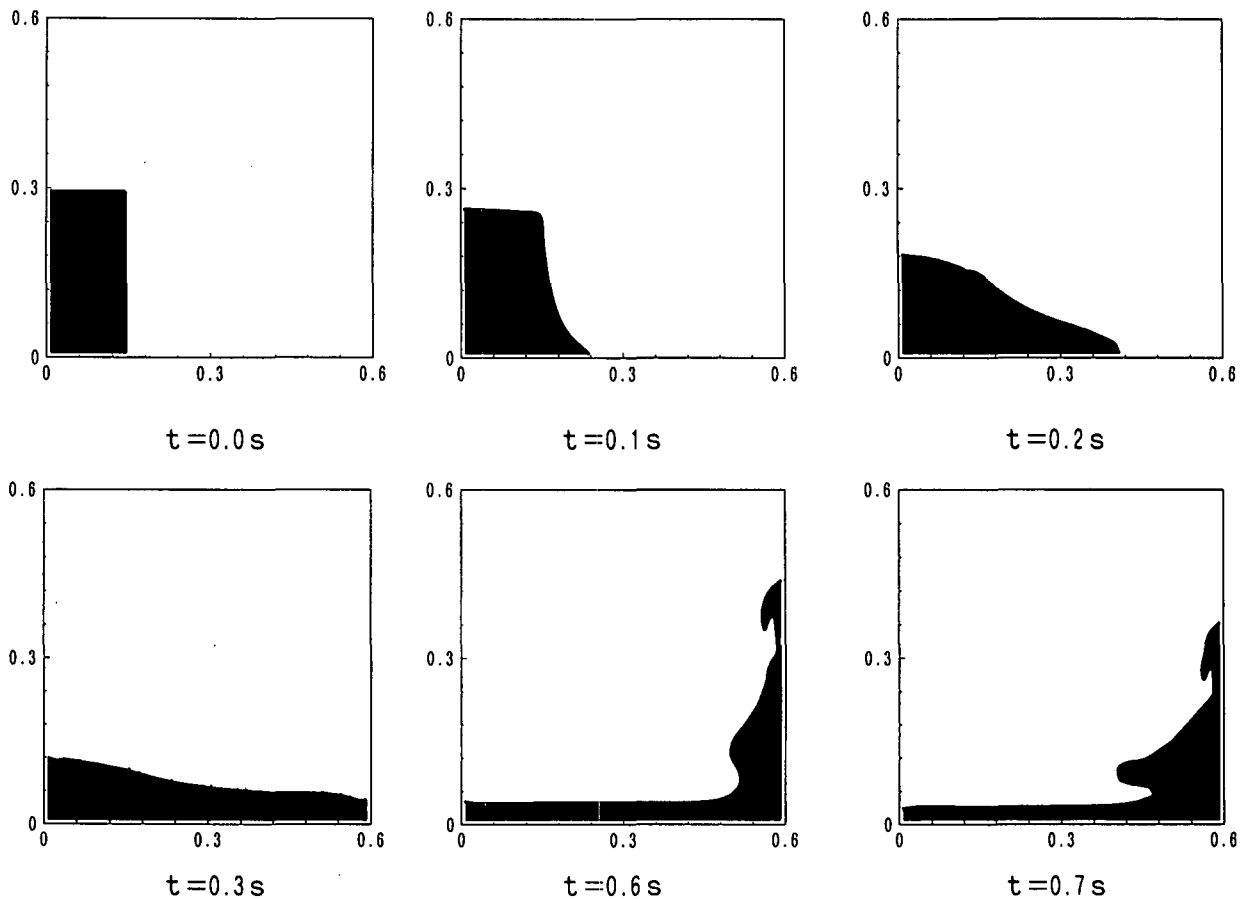


図-4 ダム破壊の時間的変化（壁面衝突前後の形状）

#### 4. 移流項計算スキームの検討

移動境界流れの検証問題の一つであるダムブレイクモデルを用いて移流項計算スキームの選択を検討する。計算領域は図-3 に示す配置であり、各物性値を表-1 に示す。計算条件として格子間隔が $\Delta x = \Delta y = 0.015\text{m}$ とし、時間刻みは $\Delta t = 0.0001\text{sec}$ で一定値とした。境界はすべて滑りありの個体壁とした。検討した移流項計算スキームは運動方程式に関しては3次精度 TVD-MUSCL 法<sup>11)</sup>（以降 TVD と記述）、CIP 法<sup>12)</sup>（以降 CIP と記述）、数値振動が発生する場所で一次精度に低下する CIP 法（以降安定化 CIP と記述）である。また Level Set 関数の保存則には3次精度 TVD-MUSCL 法、CIP 法、フラックス制限関数を導入した保存形式 6point 法<sup>13)</sup>（以降 C6P と記述）および安定化 CIP を用いて検討した。なお、3次精度 TVD-MUSCL 法を用いた場合には、時間積分に2次精度アダムス・バッシュフォース法を採用した。

水柱左端から水柱右端までの長さを $L = 0.15\text{m}$ 、右壁面を水柱左端から $4L$ 、水柱高さを底面から $2L$ の位置に設定し、 $0.6\text{m} \times 0.6\text{m}$ の水槽内で水柱が崩壊する様子をシミュレートした。空気と水を想定したため、気液二相流の密度比は800、粘性比約67となる。

図-4 に計算結果の一例を示す。この図では運動方程式

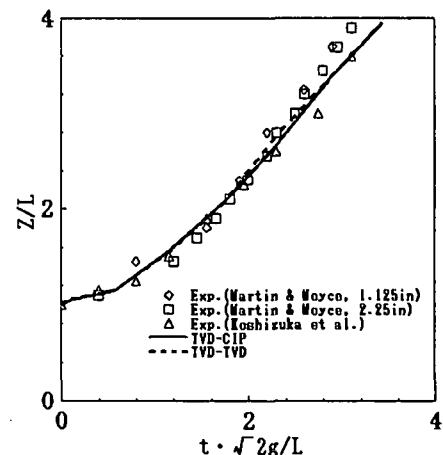


図-5 水柱先端位置の時間的変化

の移流項に TVD、Level Set 関数の保存則にも TVD を用いた場合を示している。初期に矩形状をした水塊は、拘束を解かれた後、崩壊しながら前方（右側）へと運動を開始する。右壁面直前までには滑らかな形状を示すように変形している。 $t=0.25\text{s}$  前後で壁面に衝突すると、水柱先端部はかなり速い速度で壁面を遡上し続ける。 $t=0.6\text{s}$  前後で最大となり、初期水深より高い位置まで到達する。この後、遡上した水塊の上端部は重力の影響により次第に遡上速度を減少させ、 $t=0.65\text{s}$  前後から落下を開始する。そのとき、上端部の落下しようとする力と下方部の遡上しようとする力がぶつかり合い、水面は曲げられてしまう。他の計算

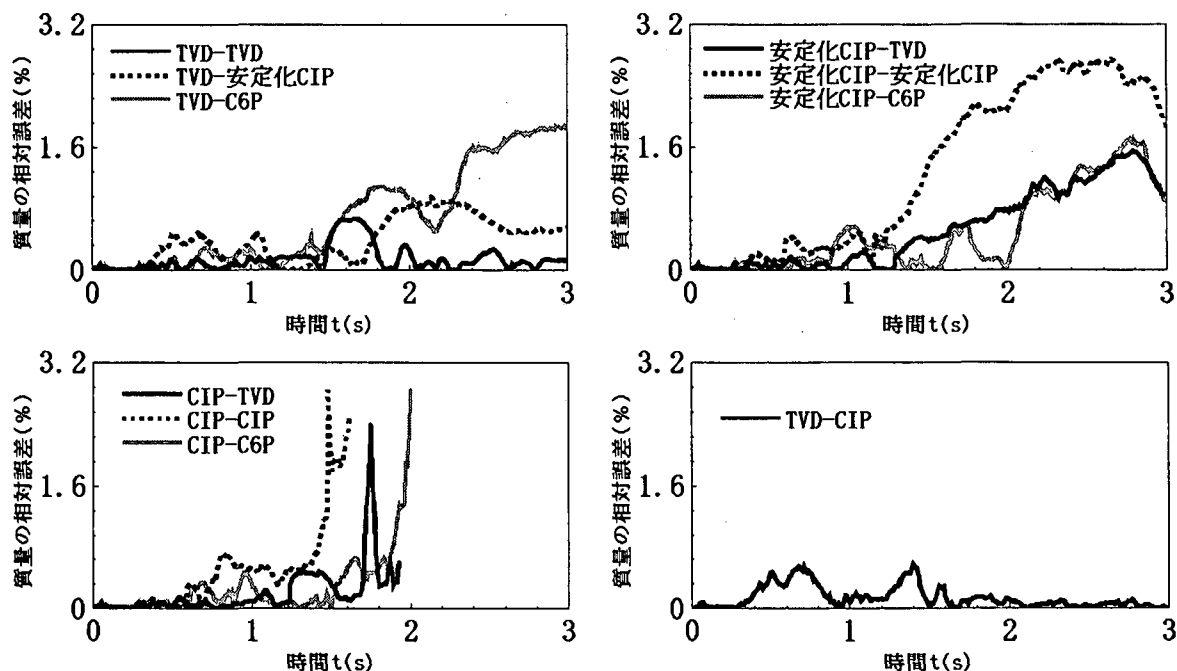


図-6 質量の相対誤差の時間変化

スキームの組み合わせも同様の結果を得ている。

図-5 に水柱左端位置の時間変化を示す。凡例の TVD-CIP は、ハイフン前方の TVD は運動方程式の移流項に TVD を用い、ハイフン後方の CIP は輸送方程式の移流項に CIP を用いるという意味である。使用する計算スキームで多少先端進行速度に相違が見られるが、いずれも実験結果と良好な一致を示していることが分かる。

次に気相体積・質量の相対誤差の検討を行う。気相体積の相対誤差は、どの手法を用いても  $10^{-6}$  以内に収まっていた。体積補正の効果が高いことがうかがえた。図-6 に計算領域内の全質量の時間変化を示す。界面のスムージングの影響で体積保存のような高い保存性は得られてはいない。図-6 から TVD-TVD, TVD-CIP の組み合わせの場合では相対誤差が  $0.4 \sim 0.8\%$  以内に収まっていることが分かる。一方、それ以外の組み合わせでは壁面と衝突する 0.5 秒を過ぎた頃から急激に誤差の割合が増加している。計算終了時には 15% 程度の相対誤差になる。運動方程式に CIP 法を用いた場合は計算が途中で発散してしまった。以上の移流項スキームの検討結果から、本研究では運動方程式の移流項に 3 次精度 TVD-MUSCL 法を用い、Level Set 関数の保存則の移流項に CIP 法を用いることにした。

## 5. 水表面における気泡崩壊の計算

水中にあった単一気泡が上昇し水表面で崩壊する様子を解析した。計算領域および初期配置を図-7 に示す。また各物性値は表-2 に示す通りである。気泡の初期直径  $D$  は  $D=0.01\text{m}$ ,  $D=0.02\text{m}$  の 2 種類を用いた。気泡径の大きさによって全計算領域のサイズが異なってくるが、いずれの場合も計算領域は  $80 \times 80$  に分割した。式 (14) から  $\Delta t_c$  を求めるとおよそ  $1.0 \times 10^{-4}\text{sec}$  が得られる。予備計算から時間刻みは両者とも  $\Delta t = 1.0 \times 10^{-5}\text{sec}$  とした。境界は全面

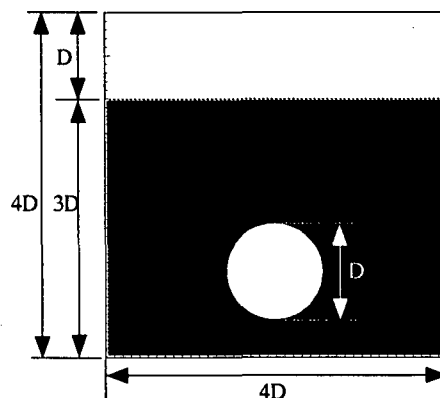


図-7 気泡崩壊計算の初期配置

表-2 気泡崩壊計算で使用した物性値<sup>1)</sup>

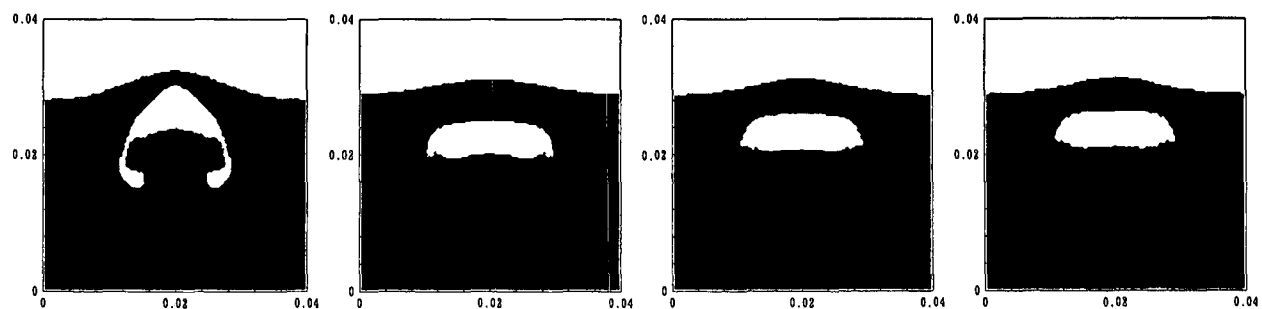
| 物性値    | 表面張力(N/m) | 粘性係数(Pa·s) | 密度(kg/m <sup>3</sup> ) |
|--------|-----------|------------|------------------------|
| 水      | 0.072     | 0.001      | 1000                   |
| 95.7%* | 0.02846   | 0.00179    | 812                    |
| 10%*   | 0.05633   | 0.00217    | 984                    |

\*エタノール水溶液の濃度

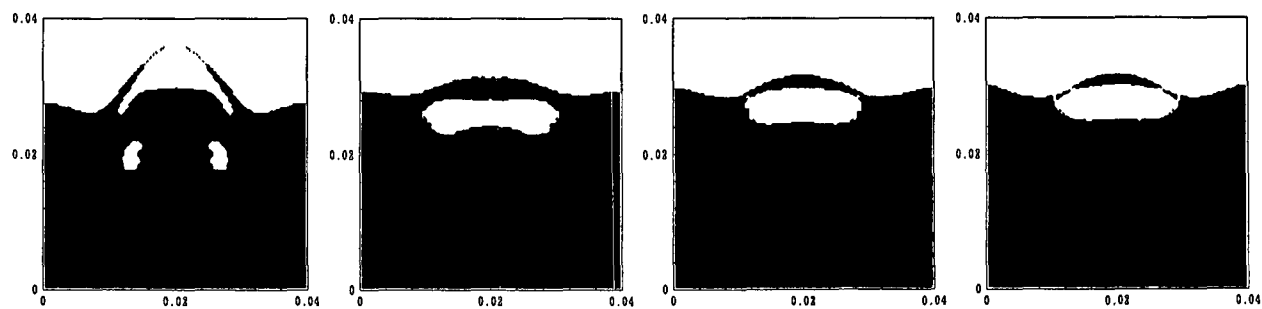
表-3 レイノルズ数とボンド数

| 気泡径              | 物性値    | レイノルズ数 | ボンド数  |
|------------------|--------|--------|-------|
| $D=0.01\text{m}$ | 水      | 3100   | 13.6  |
|                  | 95.7%* | 1420   | 28.0  |
|                  | 10%*   | 1420   | 17.1  |
| $D=0.02\text{m}$ | 水      | 8850   | 54.4  |
|                  | 95.7%* | 4016   | 111.8 |
|                  | 10%*   | 4016   | 68.5  |

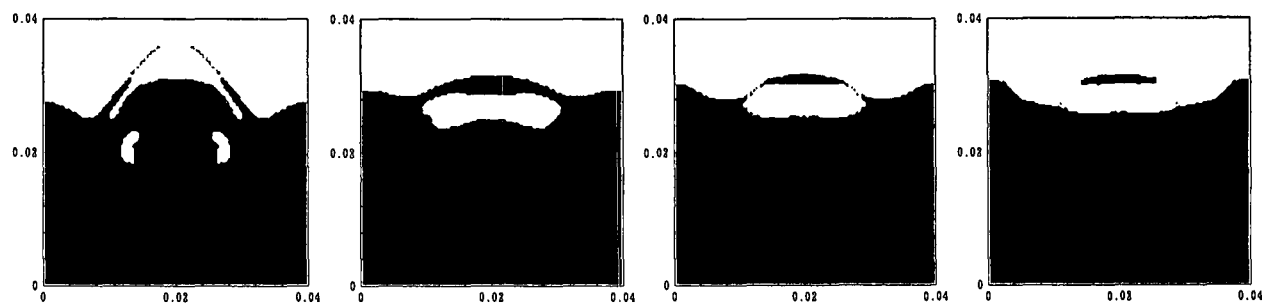
\*エタノール水溶液の濃度



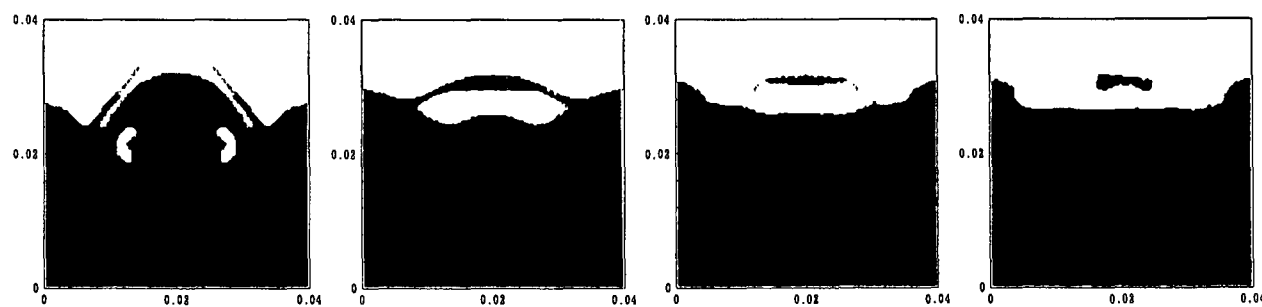
$t=0.10\text{ s}$



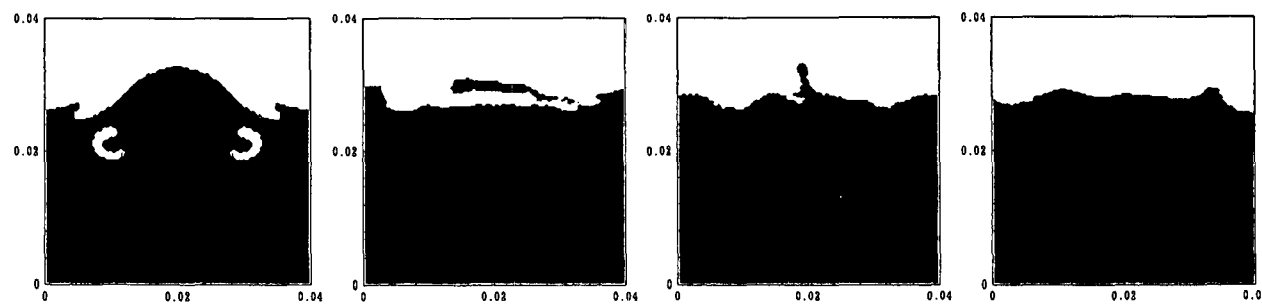
$t=0.14\text{ s}$



$t=0.15\text{ s}$



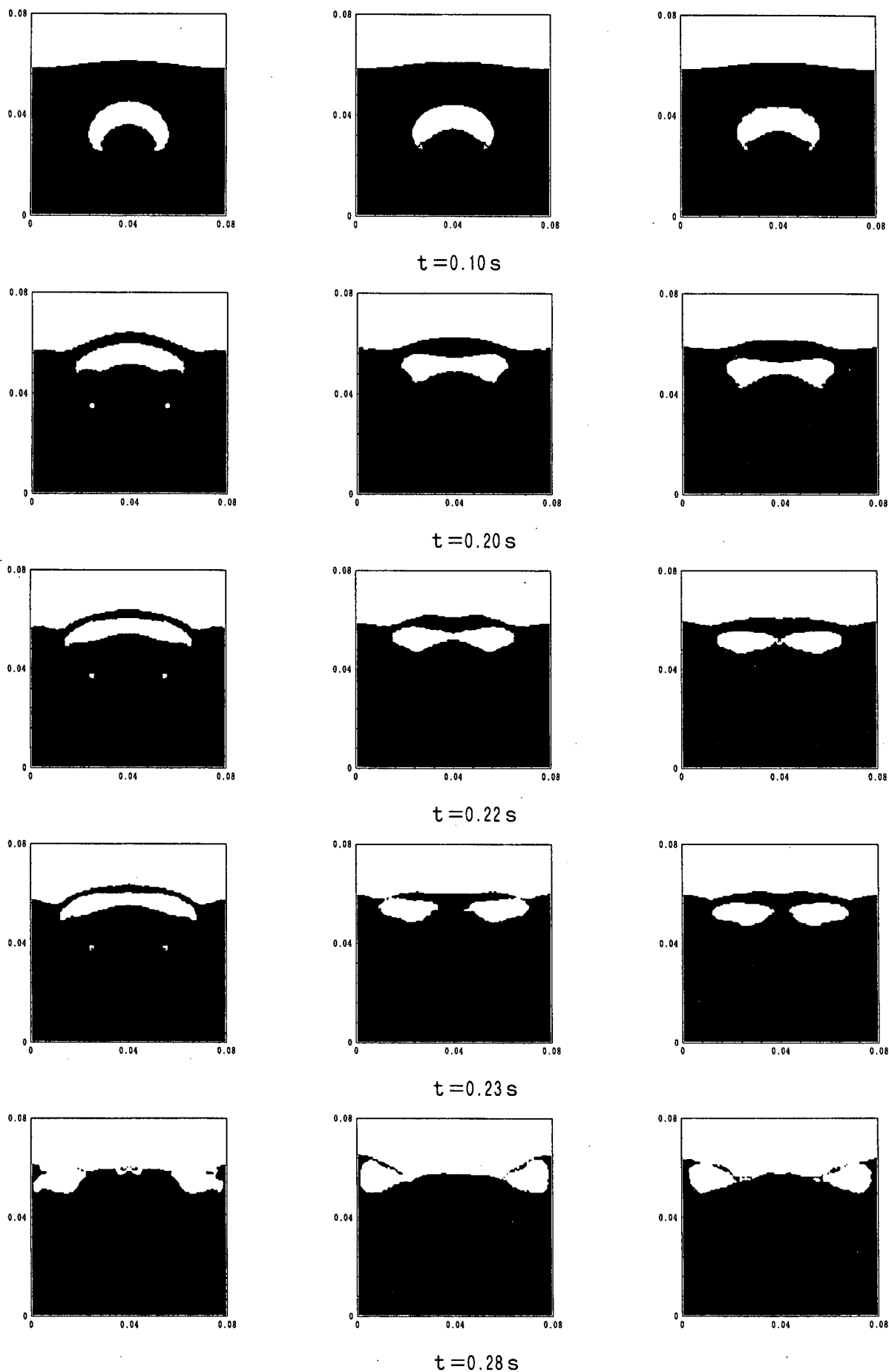
$t=0.16\text{ s}$



$t=0.19\text{ s}$

(a) 水 (表面張力なし) (b) 95.7%濃度エタノール水溶液 (c) 10%濃度エタノール水溶液 (d) 水 (表面張力あり)

図-8 直径 0.01m の気泡崩壊現象



(a) 95.7%濃度エタノール水溶液

(b) 10%濃度エタノール水溶液

(c) 水（表面張力あり）

図-9 直径 0.02m の気泡崩壊現象

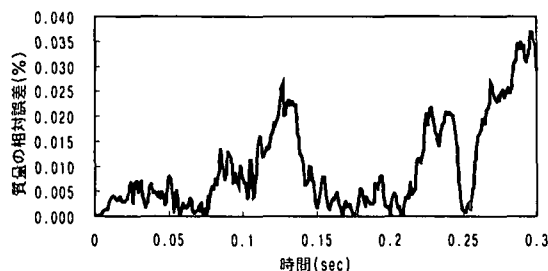


図-10 質量の相対誤差の時間変化

とも滑りあり個体壁とした。表-3にレイノルズ数  $Re$  とボンド数  $B$  を示す。定義はそれぞれ以下の通りである。

$$Re = D^{3/2} \sqrt{g} \rho_{Liq} / \mu_{Liq} \quad (15)$$

$$B = \rho_{Liq} g D^2 / \sigma \quad (16)$$

ここで、 $D$  は気泡径、 $\rho_{Liq}$  は液体の密度、 $\mu_{Liq}$  は液体の粘性係数、 $\sigma$  は表面張力係数である。なお、 $\Delta_s$  を求める際には上述のボンド数を用いた。

図-8 は直径 0.01mの気泡崩壊現象を解析した結果である。水の密度および粘性係数を与えるが、表面張力係数を0とした場合を参考として図示している。初期状態では円形をしていた気泡が上昇するにつれて楕円状に変形するが、表面張力係数が0の場合では馬蹄形状となる。表面張力が存在する場合には水表面に達した気泡は薄い膜を形成し端部からちぎれ始め、やがて水面から分離され取り残された薄膜は液滴となる。表面張力係数が0の場合は気泡膜の中心部から破裂がはじまる。表面張力が大きい程、崩壊する時間が早いことが分かる。

図-9 は直径 0.02mの気泡崩壊現象を解析した結果である。これは鍋坂らの実験と同じ条件である。各ケースとも水表面近傍で気泡は二つに分裂し側壁へ移動する。直径 0.01mの場合とは非常に異なる挙動を見せる。表面張力が大きい程、二つに分裂する時間が早いことが分かる。鍋坂らの実験では 10.0%濃度エタノール水溶液では気泡膜の一点から同心円状に穴が広がり、95.7%濃度エタノール水溶液では現在位置を保って膜に沿って破裂すると報告している。今回の計算結果は鍋坂らの実験結果とは異なっているが、この原因として狭い閉じた領域を計算領域としていること、2次元で解析を行っていること、解像度の問題などが考えられる。

気泡崩壊シミュレーションの体積保存はすべてのケースで良好であった。質量保存については計算領域内の全質量に関する相対誤差の経時変化の一例を図-10に示す。これは気泡径 0.02mの水の場合である。約 0.04%以内に収まっている。またすべてのケースにおいて質量の相対誤差は  $10^{-2}\%$  のオーダーであった。

## 6. おわりに

Level Set 法を用いて体積保存性および質量保存性に優

れた非圧縮性気液二相流体の数値解析モデルを構築した。質量保存の観点から運動方程式の移流項に TVD 法を用い、Level Set 関数保存則の移流項に CIP 法が有利であることが分かった。表面張力が気泡崩壊現象に及ぼす影響をシミュレートすることができた。今後は、モデルの3次元化および計算効率の向上をはかり、気泡によって発生する水表面近傍の乱流構造解析を行う予定である。

謝辞：金沢大学の由比政年助教授には Level Set 法についてご教示を頂いた。また大阪大学の川崎浩司助手には CIP 法の安定化についてご教示を頂いた。本研究は文部科学省科学研究費補助金（代表者：角野昇八，課題番号 12305031）の補助を受けた。ここに記して謝意を表す。

## 参考文献

- 1) 鍋坂誠志，江藤剛治，竹原幸生：水表面の気泡の破裂現象に対する表面張力と粘性の影響の個別評価の試み，土木学会論文集，No.705/II-59，pp19-pp29，2002.
- 2) Yabe,T. and P.-Y. Wang : Unified numerical procedure for compressible and incompressible fluid, J.Physical Society of Japan, Vol.60, No.7, pp.2105-2108, 1991.
- 3) 陸田秀実，河合ひろみ，安田孝志：C-CUP 法による気液界面の直接数値計算，海岸工学論文集，第 45 巻，pp.55-59，1998.
- 4) 金井亮浩，宮田秀明：密度関数法を応用した気泡の数値シミュレーション，日本造船学会論文集，第 179 号，pp.41-48，1996.
- 5) Brackbill, J.U., D.B.Kothe and C.Zemach : A Continuum Method for Modeling Surface Tension, J.Comp.Phys, Vol.100, pp.335-354.1992.
- 6) Sussmann,M., P.Smereka, and S.Osher : A level set approach for computing solutions to incompressible two phase flow, J.Comp.Phys., Vol.114, pp.146-159, 1994.
- 7) 由比政年，石田啓，保智正和：界面の大変形を伴う気液二相流体場の数値解析，海岸工学論文集，第 45 巻，pp61-65，1998.
- 8) 梁儒全，里深信行：標位関数法を用いた非圧縮性気液二相流における移動気液界面の挙動の数値計算，日本機械学会論文集（B 編），64 巻 617 号，1998.
- 9) 姫野武洋，渡辺紀徳：微小重力環境における気液界面挙動の数値解析，日本機械学会論文集（B 編），65 巻 635 号，1999.
- 10) Chang,Y.C., T.Y.Hou, B.Merriman and S.Osher:A Level Set Formulation of Eulerian Interface Capturing Methods for Incompressible Fluid Flows, J.Comp.Phys, Vol.124, pp.449-464, 1996.
- 11) 藤井孝蔵：流体力学の数値計算法，東京大学出版会，pp.72-76，1994.
- 12) Yabe,T. and Aoki,T.:A Numerical Solver for Hyperbolic Equations by cubic-Polynomial Interpolation, Comput. Phys. Commun., Vol.66, pp.219-232, 1991.
- 13) 朝位孝二，小松利光，大串浩一郎，羽田野袈裟義：移流輸送方程式の高精度かつ高解像度数値計算手法の開発，水工学論文集，第 43 巻，pp497-502. 1999.

(2003 年 4 月 18 日 受付)