

有限被覆法による不連続面進展解析

An analysis of propagating discontinuities by the finite cover method

浅井光輝*・寺田賢二郎**

Mitsuteru ASAI and Kenjiro TERADA

*博士(工) Dept. Mechanical Engineering, Ohio State Univ. (206 West 18th Avenue, Columbus, OH43210-1107)

**正会員 Ph.D. 東北大学助教授 工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

We develop an analysis method for discontinuous deformation without re-meshing. The proposed method is based on the Finite Cover Method (FCM), which is actually an alias for the Manifold Method. By virtue of the mesh-free nature of the FCM, propagating discontinuous boundaries can be traced regardless of initial mesh discretization. Furthermore, the nonlocal material modeling is introduced to avoid the dependency on mesh size. Representative numerical examples demonstrate the performance of the proposed method and well simulate the propagation of discontinuities with independently generated FCM mesh.

Key Words : Finite cover method, Discontinuous deformation, Non-local theory

1. はじめに

連続体中に亀裂などの不連続面が逐次進展していく問題の取り扱い、計算力学の分野において大きな課題の一つとして残されている。特に、有限要素法(FEM)の使用を前提とした場合、物理領域の分割単位であると同時に近似の単位でもある要素の存在がネックとなる。亀裂面上に要素辺を一致させるために節点を再配置するという、逐次リメッシュによる方法などが考案されてきたが、解析コードを煩雑化・計算コストの膨大化を招くなどの問題点が指摘されている¹⁾²⁾。

近年では、こうした亀裂進展解析・大変形解析など、要素という絶対的な存在が招くリメッシュに関する問題に対する対処法として、メッシュが存在しない各種メッシュレス法、あるいはその存在を意識しなくてよい一般化有限要素法に関する研究が盛んに行われている。その代表的な例としては、Element Free Galerkin 法(EFGM)³⁾・eXtended FEM(X-FEM)⁴⁾・Manifold 法⁵⁾⁶⁾などが挙げられる。著者らもこれまでに、Manifold 法と等価な解析手法である有限被覆法(FCM)⁷⁾⁸⁾を提案しており、定形メッシュのまま複雑な外部形状を持つ構造体の解析を実施するなどその有用性を確認してきた。しかしながら、リメッシュを必要としないというメッシュレス法の特徴を生かし、予め不連続面を規定せずに亀裂進展解析を実施した研究例は、EFGM・X-FEMを用いたものが一部存在するものの⁹⁾¹⁰⁾、いまだ体系化されたとは言いがたい。また X-FEM は、 J 積分などによりエネルギー解放率を求めるという破壊力学的なアプローチを前提としたものが多く、潜在的に亀裂面が存在するときの亀裂進展解析手法として有効な手法となり得るが、初期の亀裂面の発生からその進展までを統合的に扱うまでには至っていない。

また、不連続変形の表現技法の問題に加えて、材料として軟化挙動を起こす問題の数値解析においては、数値解の要素分割依存性が指摘されることが多い。メッ

シュレス法は近似単位としての要素が存在しない手法であるが、仕事量の平衡を基礎式とする Galerkin 近似においては、不連続変形に代表される材料挙動の非局所性を考慮しない限りこの種の問題は回避されない。実際、軟化型の構成モデルを採用した有限要素解析では、「局所的なひずみなどの局所値から応力などを評価するのではなく、評価点近傍の影響を加味した大域的な情報から局所的な応力を評価する」といった非局所理論¹¹⁾の導入により要素分割依存性の低減に成功している。

このような背景を受けて、本研究では Manifold 法と等価な近似性能を有する一般化有限要素法として提案された有限被覆法に着目し、不連続面の進展解析へと発展させる。提案手法は、以下の2点の特徴を有している。

(1) 有限被覆法による不連続変形の進展

(2) 非局所理論の導入による要素分割依存性の低減
なお、(2)の非局所理論の枠組みには、ひずみ勾配論¹²⁾¹³⁾・Cosserat 理論¹⁴⁾¹⁵⁾なども存在するが、導入の際の容易さ・汎用性を考慮し、本研究では積分平均化理論¹⁶⁾¹⁷⁾を採用している。本研究の目的は、主には有限被覆法による不連続面の表現技法を開発することにあるが、非局所理論など FEM の財産をそのまま転用できるという有限被覆法の一般化有限要素法としての特徴も併せて紹介する。最後に、簡単な数値解析例により提案手法の有効性を検証する。

2. 有限被覆法による不連続変形の表現技法

有限被覆法とは、連続体の数値解析手法としての FEM と不連続性体の解析手法の一つである Discontinuous Deformation Analysis(DDA)¹⁸⁾との統合化解析手法として提案された Manifold 法にその基礎を置く。被覆という新たな概念を導入し、近年注目されている一般化有限要素法とも親和性がある解析手法である。Manifold 法と有限被覆法の共通した特徴としては、「近似関数の定

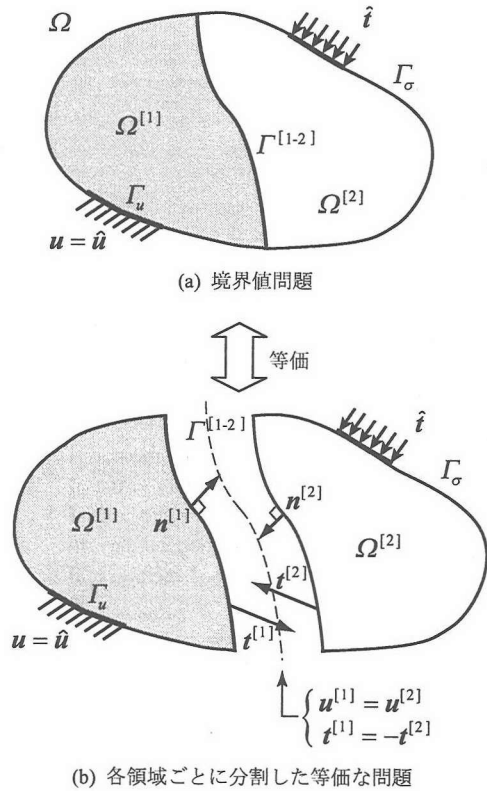


図-1 2つの弾性体からなる構造物

義される数学的な領域（数学被覆）」と「支配方程式を満足すべき物理的な部分領域（物理被覆）」とを分離して考えることになる。この独自の近似特性により、初期の要素分割形状とは無関係に物理的な不連続面を付加することができ、亀裂などの不連続面の進展解析に有効なツールとなり得る。ここでは、はじめに有限被覆法の定式化を概説し、逐次的に不連続面を付加する際の取り扱い方法について述べる。

2.1 支配方程式

まず、図-1(a)に示す弾性体からなる2体問題を有限被覆法により解析することを考え、その特徴を具体的に示す。支配方程式は次のように与えられる。

$$\nabla \cdot \sigma + b = 0 \text{ in } \Omega \quad (1)$$

$$\sigma = C : \varepsilon \quad (2)$$

$$\varepsilon = \nabla^{(s)} u := \frac{1}{2} (\nabla u + (\nabla u)^T) \quad (3)$$

ここで、 $\sigma, \varepsilon, u, b, C$ はそれぞれ Cauchy 応力、微小ひずみ、変位ベクトル、物体力、弾性テンソルを示し、 $\nabla^{(s)}$ は勾配を与えるオペレータ ∇ の対称成分を与えるものとする。また境界条件は、

$$u = \hat{u} \text{ on } \Gamma_u \quad (4)$$

$$t := \sigma n = \hat{t} \text{ on } \Gamma_\sigma \quad (5)$$

である。この問題を各材料ごとに切り離して考えると、図-1(b)に示すような等価な問題が設定できる。この等

価な問題では、上記の境界条件に加え、変位および表面力の連続条件が拘束条件として追加される。

$$u^{[1]} = u^{[2]} \text{ on } \Gamma^{[1-2]} \quad (6)$$

$$\sigma^{[1]} n^{[1]} + \sigma^{[2]} n^{[2]} := t^{[1]} + t^{[2]} = 0 \text{ on } \Gamma^{[1-2]} \quad (7)$$

ここで t は単位法線ベクトル n により定義される物体表面での表面力である。また、上付添字 $[\alpha]$ は、領域 α 内で定義される物理量であることを示し、上付添字 $[1-2]$ は領域 $[1], [2]$ の境界面で定義される物理量である。なお本研究における不連続面とは、変位および応力の伝達がない物理境界を指すものとする。例えば、上記の2体問題の材料界面の一部 $\Gamma_{\text{cra}}^{[1-2]}$ が剥離破壊を起こし、不連続面が発生したものとすると、 $\Gamma_{\text{cra}}^{[1-2]}$ において拘束条件式 (6), (7) が除外され、物理的には自由表面が形成されることになる。以下の定式化では、簡略化のため不連続面のみを物理界面としてもつ問題に限定する。

上記の境界値問題におけるつり合い問題は、仮想仕事の原理に従うことで変位 $u \in \mathcal{U}$ に関する変分方程式として記述できる。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla \delta u) : C : \nabla u \, dv \\ = \int_{\Omega} \delta u \cdot b \, dv + \int_{\Gamma_\sigma} \delta u \cdot \hat{t} \, ds \quad \forall \delta u \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、変位 u とその変分量 $\delta u \in \mathcal{V}$ に課せられる許容関数空間は、それぞれ以下のように与えた。

$$\mathcal{U} = \{u \mid u_i \in H^1(\Omega), u = \hat{u}\} \quad (9)$$

$$\mathcal{V} = \{\delta u \mid \delta u_i \in H^1(\Omega), \delta u = 0\} \quad (10)$$

ここで、 $H^1(\Omega)$ は1階微分までが Lebesgue2 乗可積分空間 $L^2(\Omega)$ に属する Sobolev 空間である。

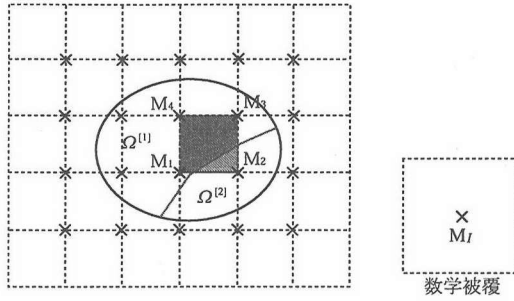
2.2 有限被覆法の定式化

(1) 有限被覆近似

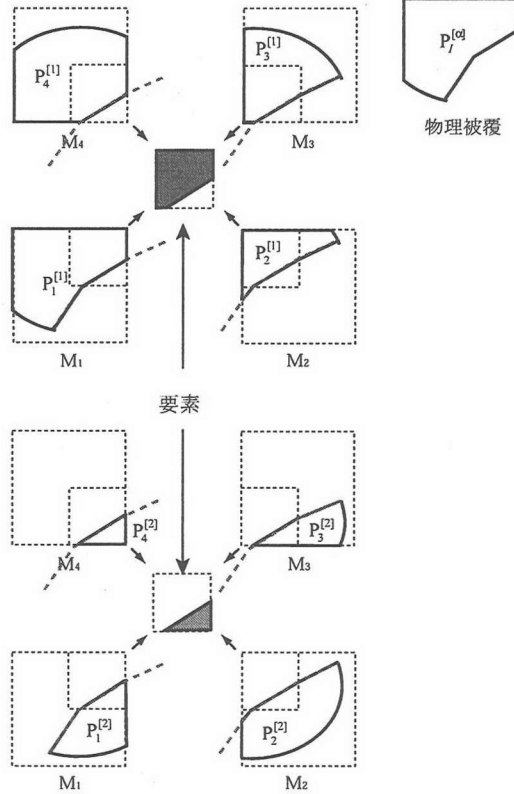
図-2には、2次元問題における被覆の具体的な定義を模式的に示している。有限被覆法では、重み関数 $w_I(x)$ と被覆関数 $u_I^{[\alpha]}$ という2つの関数を用いて変位の近似を行うが、それぞれ数学被覆 M_I 、物理被覆 $P_I^{[\alpha]}$ に対応して定義される関数である。ここでは、 C^0 連続な単位分解 (partition of unity: PU) 条件を満たす重み関数と、各物理被覆内で、ある一定値となる被覆関数を基に次式のような近似を行うことにする。

$$\begin{aligned} u(x) \approx u_{\text{FCM}}(x) &:= \sum_{I=1}^{N_M} \sum_{\alpha=1}^2 w_I(x) u_I^{[\alpha]} \text{ in } \Omega \\ &= \begin{cases} \sum_{I=1}^{N_M} w_I(x) u_I^{[1]} & \text{in } \Omega^{[1]} \\ \sum_{I=1}^{N_M} w_I(x) u_I^{[2]} & \text{in } \Omega^{[2]} \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、 C^0 連続な PU 条件を満足する重み関数とは、図-3に示すように、通常の有限要素法における形状関数の組み合わせとして形成される区分的な関数である。



数学被覆



物理被覆

図-2 2次元問題における被覆の定義

領域全体の変位 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ の近似が便宜的に次のようにマトリックス表記できるものとする。

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \{u, v\}^T \approx \begin{cases} \mathbf{W}(\mathbf{x}) \mathbf{U}^{[1]} & \text{in } \Omega^{[1]} \\ \mathbf{W}(\mathbf{x}) \mathbf{U}^{[2]} & \text{in } \Omega^{[2]} \end{cases} \quad (12)$$

さらに上式を弱形式化された支配方程式式 (8) に代入することで、次に示す離散化方程式を与える。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{[1]} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}^{[2]} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}^{[1]} \\ \mathbf{U}^{[2]} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^{[1]} \\ \mathbf{F}^{[2]} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

ここで、各マトリックス $\mathbf{K}^{[a]}$, $\mathbf{F}^{[a]}$ はそれぞれ、

$$\mathbf{K}^{[a]} = \int_{\Omega^{[a]}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv \quad (14)$$

$$\mathbf{F}^{[a]} = \int_{\Omega^{[a]}} \mathbf{W}^T \mathbf{b} dv + \int_{\Gamma^{[a]}} \mathbf{W}^T \hat{\mathbf{t}} ds \quad (15)$$

として与えられる。ここで、 $\mathbf{D}$ は弾性テンソル $\mathbf{C}$ をマトリックス表記したものであり、また、 $\mathbf{B}$ は次式に示

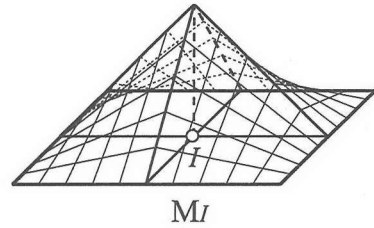


図-3 重み関数の例

すように変位とひずみの適合関係を与えるマトリックスである。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T \approx \begin{cases} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{U}^{[1]} & \text{in } \Omega^{[1]} \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{U}^{[2]} & \text{in } \Omega^{[2]} \end{cases} \quad (16)$$

以上、不連続面を有する問題における有限被覆法における離散化方程式の導出過程を示したが、基本的な解析プロセスは FEM と全く同じである。ただし、各領域ごとに独立な解析自由度 (被覆関数) を与えているため、領域間における変位の不連続性を自動的に表現できることが特徴となる。また、同様にして異種材料間におけるひずみの不連続性も再現できる⁸⁾。

(2) X-FEM との近似関数の相違点

同様に要素形状とは無関係に不連続面を追加できる手法としては X-FEM が知られているが、その近似関数に関する相違点を示す。

X-FEM では不連続面を含むときに次式より変位の近似を行う。

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_{\text{XFEM}} := \sum_{j \in J} w_j(\mathbf{x}) \mathbf{u}_j + \sum_{k \in K} H(\mathbf{x}) w_k(\mathbf{x}) \mathbf{b}_k \quad (17)$$

ここで、 J は領域全体に定義される節点 (有限被覆法では被覆と呼ぶ) の集合であり、 K は不連続性を表現するために添付・修正が必要となる節点の集合である。 $\mathbf{b}$ とはジャンプ変位を与えるための一般化自由度であり、 $H(\mathbf{x})$ は

$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} +1 & \text{in } \Omega^{[1]} \\ -1 & \text{in } \Omega^{[2]} \end{cases} \quad (18)$$

として与えられる。このように X-FEM では、PU 条件を用いる一般化有限要素法の概念を基に、ジャンプ変位を表現できる近似関数とそれに対応した一般化自由度を追加した手法である。

有限被覆法と X-FEM では、通常の節点変位に加え、別の物理的な意味を与える節点量を自由度に追加することで、不連続性を表現するという共通した特徴を有している。ただし、それぞれの近似式 (11), (17) の比較から分かるように、その追加される自由度の物理的な意味が異なる。また有限被覆近似では、新たな基底関数が何も追加されていないことが特徴である。

2.3 不連続面の進展問題の取り扱い

進展した不連続面が初期に設定した数学被覆を横切るときには、図-2 に示す定義に従い新たな物理被覆が

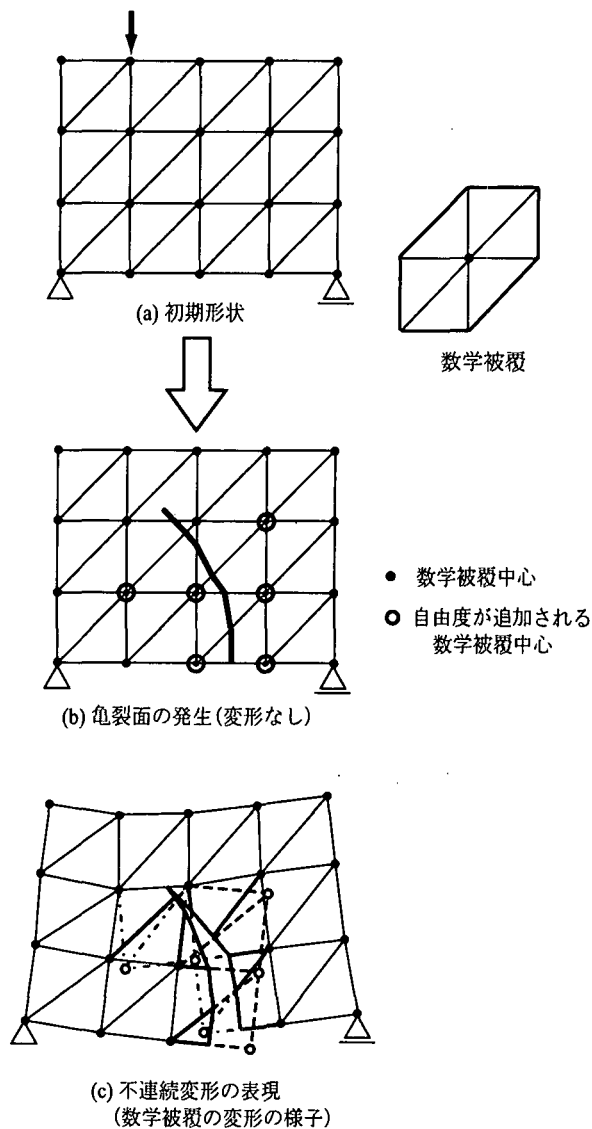


図-4 不連続変形の表現技法

設定され、同時に物理被覆と対応して定義される被覆関数が追加される。この被覆関数とは有限被覆解析における離散化方程式の解析自由度に相当するものであり、不連続面の進展に従い離散化方程式のサイズが大きくなることを意味する。しかしながら、式(11)に示すように、被覆関数とは初期に一度のみ設定される数学被覆とも対応したものであり、 C^0 連続な重み関数を用いた際に限定すれば、数学被覆中心における解析自由度が重複して設定されるだけである。このため、拡大される離散化方程式の大きさは事前に予測可能である。つまり、FEMにおける節点が有限被覆法における数学被覆中心と対応しており、FEMでは節点変位のみを解析自由度としていたのに対して、有限被覆法は複数の物理的な意味を有する一般化自由度を持つ解析手法である。

(1) 自由度の追加規則

以下には、具体的な例を挙げ自由度の追加規則について説明する。図-4の(a)に示す境界値問題を設定する。有限被覆法では一般にはこの両者を一致させる必

要はないが、この例では物体の外部境界と数学被覆を一致させることにしている。

ある载荷ステップにおいて同図(b)に示すような不連続面が発生したものとする。このとき、不連続面により2分割される数学被覆の中心を○で囲んでいるが、この数学被覆中心と関連する解析自由度が追加されたことを表している。そして、同図(c)にはその追加自由度により表現される不連続変形の様子を模式的に示した。このように、物理界面の追加により数学被覆が分断されるのか否かを監視し、分割された数学被覆の中心と関連した自由度を追加するだけでよい。

(2) ソルバーに関連した注意事項

数値解析の途中に自由度が随時追加される問題を扱うには、特に代数方程式のソルバーなどにおいて注意を払わなくてはならない。ここでは、本研究で採用した対処法について簡単に説明する。

古典的な不連続面進展解析法として、FEMにおける要素辺を不連続面として解析することが行われる。このとき、予めすべての節点を2重節点として設定しておき、ある判定規準に達した要素辺に存在する節点間のリンクをはずしていく方法が用いられている。この多重節点の考え方を多重被覆として置き換えるだけで、同様にして対処できる。つまり、解析対象の全領域に不連続面が発生する可能性があるものとし、すべての数学被覆中心において不連続変形の表現に必要な自由度を予め用意しておき、実際には不連続面により分断された数学被覆においてのみ自由度を逐次追加していく。このためには、解析自由度が有効か無効であるのかを示すフラグ変数を参照しながら、方程式のサイズを逐次変更していくことになる。ちなみに、代数方程式にソルバーとして直接法を用いた際には方程式のサイズを変更することは多少複雑となるが、共役勾配法系の反復解法を用いれば容易に処理できる。

3. 非局所型材料モデリングによる破壊基準

有限被覆法によると、ある特定された面における変位の不連続性が、要素配置・形状とは無関係に表現できる。このため、亀裂発生規準の設定し、不連続面の幾何性状を決定する方法論が完備されれば、不連続面の進展解析が可能となる。ここでは、本研究で用いた破壊規準の説明を行う。

3.1 最大主応力説

亀裂発生規準は各種材料ごとにさまざまな仮説が提示されている。例えば、非線形破壊力学の分野においては、 J 積分などの経路非依存型積分値により亀裂発生を評価することになるが、その際にも亀裂方向・進展長さの設定方法はさまざまな方法が提案されている。この非線形破壊力学では、初期に亀裂が発生していることを前提とし、その亀裂進展を評価するときに有効な手段となる。一方で、不連続面の発生から進展の過程までの統合的に扱う方法論としては、材料の安定性理論と関連づけた研究報告が多い¹⁹⁾²⁰⁾。

本研究では、特に有限被覆法による不連続変形の表現技法を提示すること目的としているので、できる限り

上記のような個別論の適用は避け、最も古典的であり物理的にも解釈しやすい最大主応力説を適用する。すなわち、主応力がある一定の破壊規準に達した時に主応力面と垂直な方向へ不連続面が発生するものである。また、破壊規準には引張り主応力のみによる破壊条件を規定する Rankine 型を採用する。

3.2 非局所理論の導入

数値解析上の取り扱いの明瞭さを配慮し、FEM における定ひずみ三角形要素と同精度の解析を有限被覆法により行い、各要素ごとに算出される応力状態を破壊規準に照合させ、亀裂発生・不連続面の方向を決定することにする。このとき、要素の大きさが亀裂の進展長さを与えることになり、数値解が初期の要素分割形状に敏感に反応することは自明である。FEM では一般に、この種の要素分割依存性の低減を目的として非局所理論が用いられることが多いが、この理論を有限被覆法へ導入することを考える。本研究では、その中から導入の容易さより積分平均化理論に着目した。

積分型平均化理論とは、ある物理量に対して重み付き平均値により算出される非局所値を定義し、その値をもとに材料特性を評価するものであり、その非局所量はさまざまな物理量を採用することができるなどの汎用性を有する。本研究では、まず次式により非局所応力を定義する。

$$\bar{\sigma}(x) := \int_{\Omega} \alpha(x, \xi) \sigma(\xi) d\xi \quad (19)$$

ここで本研究では、非局所重み関数 α としてベル型関数を採用する。

$$\alpha(x, \xi) = \frac{\alpha_0(|x - \xi|)}{\int_{\Omega} \alpha_0(|x - \xi|) d\xi} \quad (20)$$

$$\alpha_0(r) = \begin{cases} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^2 & \text{if } 0 \leq r \leq R \\ 0 & \text{if } R \leq r \end{cases} \quad (21)$$

ここで、 R は非局所影響半径を示し、 $r = |x - \xi|$ である。この非局所応力から非局所主応力を算出し、最大主応力説に従い次のように不連続面の発生規準を設定する。

$$F = \bar{\sigma}_{\max} - \sigma_{cr} < 0 \quad (22)$$

ここで、 $\bar{\sigma}_{\max}$ は非局所応力 $\bar{\sigma}$ より算出される最大主応力を示し、 σ_{cr} は不連続面発生規準となる応力値である。また、不連続面発生方向 θ_{cr} は最大主応力方向 $\theta_{\max}$ より

$$\theta_{cr} = \theta_{\max} + \pi/2 \quad (23)$$

として与えられるものとする。

非局所応力とは、材料の破壊規準における参照値としてのみ用いるものであり、実際につり合い状態を評価する際には局所的な応力値を用いていることに注意が必要である。つまり、重み付き平均の操作により平滑化された応力を用いて材料の特性評価を行なうことで、数値解の安定化を図るものである。

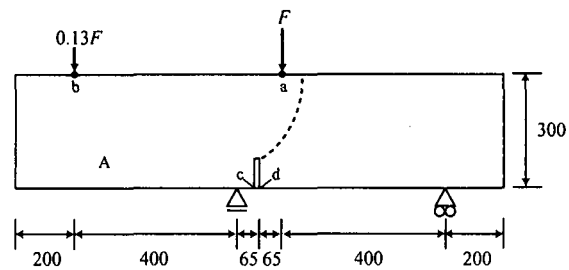


図-5 4点せん断試験の解析モデル

4. 数値解析例

ここでは、2つの例題について有限被覆法を用いた不連続変形解析を行い、その特性を例証する。ちなみに有限被覆法では、メッシュ分割の外部境界と物理境界が一致しない場合でも解析が可能ではあるが、本研究ではこの両者を一致させた解析のみを扱うことにした。

4.1 4点せん断試験

まず、中央下端部に切り欠きを有する梁の4点せん断試験を検証例題とする。コンクリートを材料とした試験は Arrera らにより行われており、破壊時の亀裂進展状況の再現性により数値解析モデルの精度・妥当性の検証がしばしば行われている²¹⁾。

図-5には解析モデルを示す。また、この解析を実行するにあたり、外部境界辺上にそれぞれ、10, 5, 2.5(cm) 間隔に数学被覆中心 (FEM における節点) を配置させた3つの解析モデル (Mesh-a, b, c) を用意した。ちなみに、解析対象内は通常の FEM 用商用プリ・プロセッサのオートメッシュ機能を用いて3角形要素に分割しており、その要素数は、9046, 36580, 146738 (要素) である。この3つの要素分割に対して、それぞれ通常の局所的な応力 (要素内応力) を用いて破壊規準を判定する局所モデルと、その判定に積分型平均化理論により算出される非局所応力を用いる非局所モデルの両者により数値解析を実施する。解析に用いた材料定数は、弾性定数 $E = 20(\text{GPa})$ 、ポアソン比 $\nu = 0.3$ 、不連続変位発生規準 $\sigma_{cr} = 2(\text{MPa})$ であり、非局所モデルに必要な唯一の定数である影響半径 R はすべてのメッシュについて 12.0 cm と固定した。载荷条件としては、载荷点 a, b における変位の鉛直方向成分を制御し、一定の間隔ごとに y 方向へ押し込むことにした。なお、コンクリート材料におけるこの実験結果では、図-5に示すように切り欠き部より亀裂が発生し、荷重载荷部の右に回り込むように進展していくことが報告されている²¹⁾。

図-6, 7には、それぞれ非局所、局所モデル使用時の終局状態における不連続変形の様子を示している。また図-8には、Mesh-a についての不連続変形発生部を拡大表示している。この図に示す不連続面の発生状況より、要素分割形状とは無関係に不連続面が追加されていることが確認できる。局所モデルにより与えられた結果は、適度なバラツキ具合より現実的な不連続面の進展状況が与えられているものの、図-5に模式的に

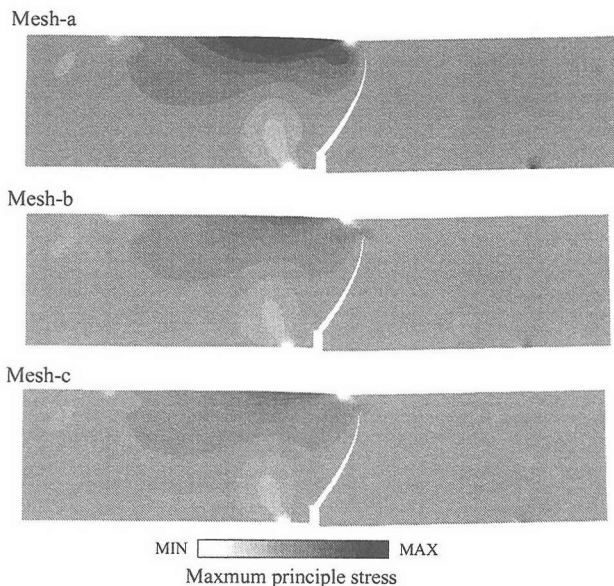


図-6 終局状態時の不連続面の進展状況 (非局所モデル)

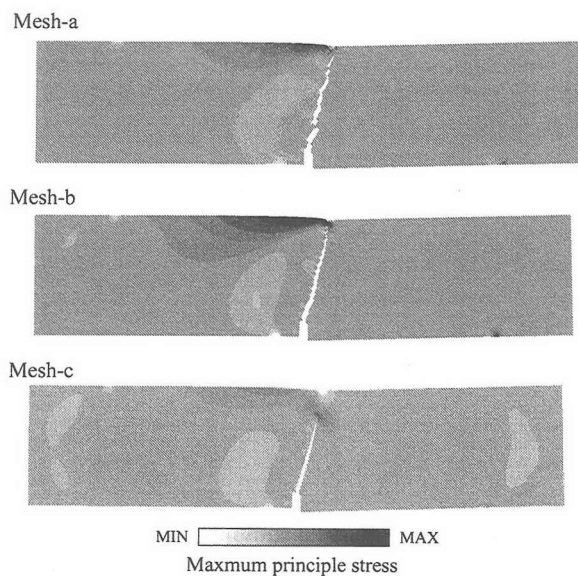


図-7 終局状態時の不連続面の進展状況 (局所モデル)

示した実験傾向と比較すると、明らかに異なる進展方向を示している。これに対して、非局所モデルを採用した解析結果は、要素分割数に抛らず実験結果と同様の傾向を示しており、その破壊時のモードは実験傾向ともほぼ一致している。

また図-9には荷重～変位関係を示す。この図において、荷重レベルは載荷点 a における反力の鉛直方向成分を指し、変位としては切り欠き部の下端部の点 c,d における相対的な鉛直方向変位 (Crack Mouth Sliding Displacement: CMSD) を採用した。この結果より、破壊規準として要素内応力をそのまま用いる局所モデルでは、要素サイズを小さくするだけ最終耐力が低下しており、数値解に客観性がない結果となっている。これに対して、提案手法の特徴の一つである非局所モデル

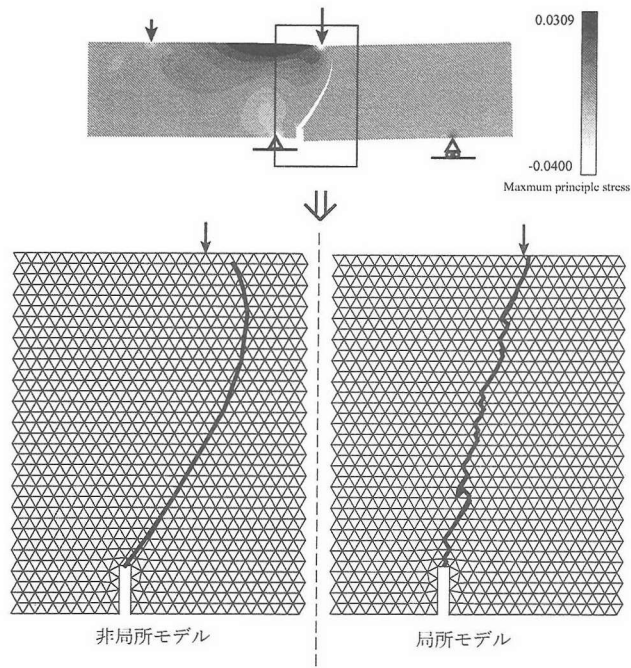


図-8 不連続面の発生状況と要素分割形状

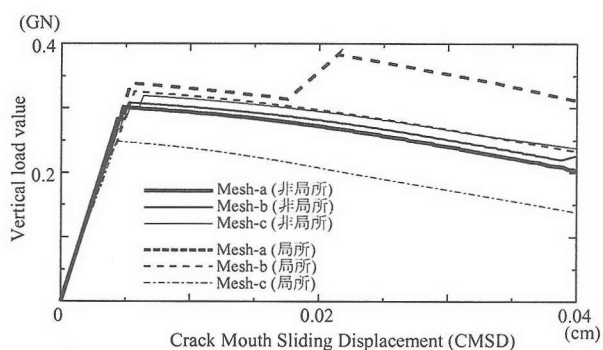


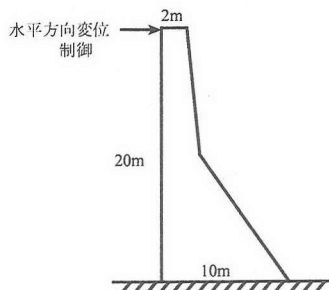
図-9 4点せん断試験解析における荷重～変位関係図

ルを採用した結果では、ひび割れの発生状況だけでなく、この荷重～変位関係図においても要素分割に依存しにくい結果を与えていることが確認できる。

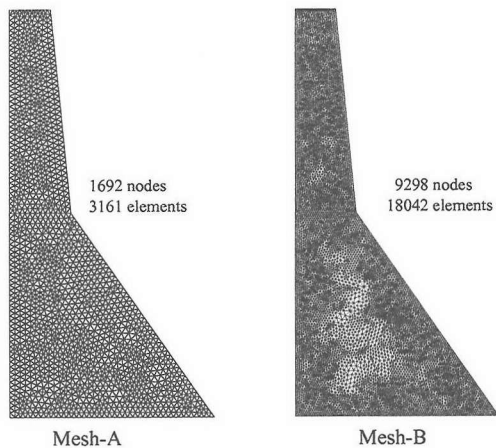
4.2 初期亀裂のない構造物の崩壊解析

先の例題では、切り欠き部を含むモデルであることから初期の不連続面発生箇所がほぼ特定できる問題であった。ここでは、初期に欠陥のない構造物モデルを取り上げ、不連続面の発生・進展の過程を追跡する。解析モデルとしては、図-10に示すダム型の構造物を対象とした。また、この解析では2つの異なる要素サイズの問題を設定し、破壊規準として局所・非局所モデルを採用した数値解析結果を比較・検証する。材料定数は先の例題と同じ値を用い、非局所影響半径は $R = 0.35(\text{m})$ とした。また、この解析では自重の影響を無視している。載荷条件は、構造物上部左端を x 軸方向へ一定の間隔ごとに変位制御することにした。

解析結果として、図-11, 12にはピーク荷重後の不連続面進展状況を示し、図-13には載荷点における x 方向



(a) ダム型構造物の問題



(b) 要素分割図

図-10 ダム型構造物の解析モデル

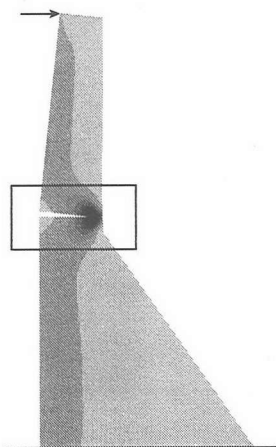


図-11 終局時の不連続面発生状況例 (Mesh-B)

への荷重～変位関係を図示した。この結果からも、ひび割れ発生状況だけでなく荷重～変位関係においても、非局所理論の導入により要素分割依存性が低減されていることが確認できる。

5. おわりに

本研究では、有限被覆法を不連続面の進展問題の解析手法として拡張し、逐次的に不連続面を追加する際の取り扱い方法を提示した。近似関数を設定する数学

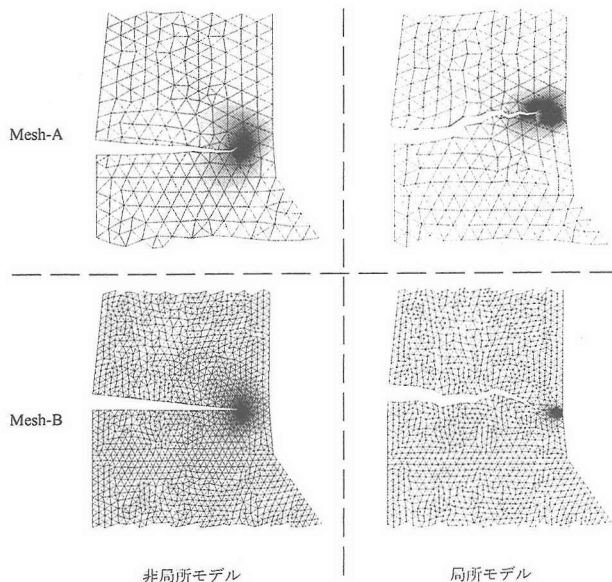


図-12 不連続面発生部の拡大図

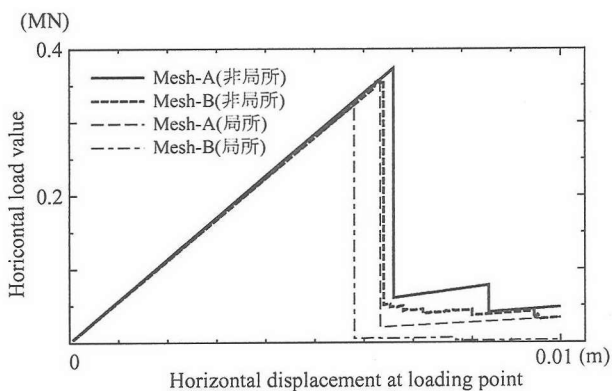


図-13 荷重～変位関係図

的な領域（数学被覆）と物理形状のみに関与する物理的な領域（物理被覆）とを切り離して考える有限被覆法の特徴を活用することで、初期の要素分割形状とは無関係に不連続面の進展が表現できる。この特徴を数値解析において示すため、不連続面の発生基準としては最も古典的な最大主応力説を採用し、主応力面と垂直な方向に不連続面が逐次発生するという簡易的なモデルを設定した。

また、こうした破壊問題を数値解析で取り扱う際には要素分割依存性が顕著に現れ、数値解の客観性の欠如が指摘されることが多い。このため、この種の解決策としてよく用いられる非局所理論の中から積分平均化理論に着目し、数値解析から算出される局所的な値ではなく、重み付き平均化された非局所量により材料の破壊基準を設定することになっていることも提案手法の特徴である。

有限被覆法による不連続変形の表現技法と非局所理論による材料の破壊基準の設定の2つの特徴を持つ解析手法を適用して、単純な検証例題により以下に示す傾向が得られた。

- 有限被覆法では、初期の要素分割形状とは無関係に評価された任意の方向への不連続面を再現できる。

- その不連続変形の表現は、エンハンスドひずみ仮定法²²⁾²³⁾に基づく強不連続解析のように不連続面の方向への剛性を低減させるものではなく、X-FEMなどの一般化有限要素法と同様に陽な形で不連続性を表現するものである。
- 非局所理論の導入により数値解は平滑化され、その非局所値を用いた材料特性評価により適切な方向への不連続面が評価される。また、荷重～変位関係においても要素寸法依存性の低減が可能であることを示した。

このように検証例題により、亀裂などの不連続面の進展解析において有限被覆法が有用な方法となり得ることを示すことはできた。しかし、実際に各種材料に対して具体的に適用していくためには、まだ多くの問題点が残されているのが現状である。例えば、本研究では材料は弾性状態から表面力が作用しない不連続面が突如形成されるというモデルを仮定したが、実現象では材料非線形の状態を経てから不連続面が発生するなどの材料モデルの設定が未完成であることが挙げられる。また、不連続面の先端部における応力集中を表現できるまでの近似精度がないことも重要な問題点となる恐れもある。今後、有限被覆法はFEMの一般化手法としての特徴を生かし、これまでに蓄積されてきたFEMの財産を適宜取り込むことで、上記の問題点が解決されることを期待する。

参考文献

- 1) Nishioka, T. : Computational dynamic fracture mechanics, *International Journal of Fracture*, Vol. 86, pp. 127–159, 1997.
- 2) 西岡俊久：破壊の数値シミュレーション手法の最近の進展，計算工学講演会論文集，Vol. 7, pp. 455–458, 2002.
- 3) Belytschko, T., Lu, Y.Y. and Gu, L. : Element free galerkin method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, pp. 229–256, 1994.
- 4) Belytschko, T. and Black, T. : Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 45, pp. 601–620, 1999.
- 5) Shi, G.H. : Manifold method of material analysis, Transactions of the 9th Army Conference on Applied Mathematics and Computing, Report No. 92-1. U.S. Army Research Office, 1991.
- 6) Shi, G.H. : Numerical Manifold Method, Proceedings of the 2nd International Congress on Analysis of Discontinuous Deformation, pp. 1–35, 1997.
- 7) 鈴木克幸，大坪英臣，寺田賢二郎，関勝哉，金伝栄，中西克嘉：ボクセル被覆による3次元ソリッドのメッシュレス解析，応用力学論文集，Vol.1, pp. 215–222, 1998.
- 8) Terada, K., Asai, M. and Yamagishi, M. : Finite Cover method for linear and nonlinear analyses of heterogeneous solids, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 58, in press.
- 9) Fleming, M. Chu, Y.A., Moran, B. and Belytschko, T. : Enriched element free galerkin methods for crack tip fields, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, pp. 1483–1504, 1997.
- 10) Dolbow, J., Moës, N. and Belytschko, T. : An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 190, pp. 6825–6846, 2001.
- 11) Bažant, Z.P. and Pijaudier-Cabot, G. : Nonlocal continuum damage, localization instability and convergence, *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 55, pp. 287–293, 1988.
- 12) Aifantis, E.C. : Strain gradient interpretation of size effects, *International Journal of Fracture*, Vol. 95, pp. 299–314, 1991.
- 13) Belytschko, T. and Lasry, D. : Localization limiters and numerical strategies for strain softening materials, in *Cracking and Damage – Strain Localization and Size Effect*, J. Mazars and Z.P. Bazent (eds), Elsevier, pp. 264–294, 1989.
- 14) Mühlhaus, H.B. and Vardoulakis, I. : The thickness of shear band in granular materials, *Géotechnique*, Vol. 37, pp. 271–283, 1987.
- 15) de Borst, R. : Simulation of strain localization: Areappraisal of the Cosserat continuum, *Engineering Computations*, Vol. 8, pp. 317–332, 1991.
- 16) Vermeer, P. A. and Brinkgreve, R. B. J. : A new effective non-local strain measure for softening plasticity, in *Localization and Bifurcation Theory for Solids and Rocks*, R.Chambon, J.Desrues and I. Vardoulakis(eds), Balkema, Rotterdam, pp. 89–100, 1994.
- 17) Nilson, C. : On nonlocal plasticity, strain softening and localization, Report TVSM-1007, Division of Structural Mechanics, Lund Institute of Technology, Lund, Sweden, 1994.
- 18) Shi, G.H. and Goodman, R.E. : Generalization of two-dimensional discontinuous deformation analysis for forward modeling, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 13, pp. 359–380, 1989.
- 19) Rice, J.R. : The localization of plastic deformation, *Theoretical and Applied Mechanics*, North-Holland, Amsterdam, pp. 207–220, 1976.
- 20) de Borst, R. : Some recent issues in computational failure mechanics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 52, pp. 63–95, 2001.
- 21) Jirásek, M. and Zimmermann, T. : Rotating crack model with transition to scalar damage, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 124, pp. 277–284, 1998.
- 22) Simo, J.C. and Rifai, M.S. : A class of mixed assumed strain method and the method of incompatible modes, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 29, pp. 1595–1638, 1990.
- 23) Simo, J.C. and Armero, F. : Geometrically non-linear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 33, pp. 1413–1449, 1992.

(2003年4月18日受付)