

要素寸法と材料種類の異なる不整合メッシュに対する dual-Schur mortar 法の適用性について

Applicability of dual-Schur mortar method to incompatible meshes
with different element sizes and materials

生出佳*, 寺田賢二郎**, 市村強***

Kai OIDE, Kenjiro TERADA, Tsuyoshi ICHIMURA

*学生会員 修士(工学) 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

**正会員 PhD. 助教授 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

***正会員 博士(工学) 助手 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

We study the performance of the mortar method incorporated with the dual Schur method for elastodynamic problems for structures modeled with incompatible finite element meshes. Although this method ensures kinematic continuity throughout the specified interfaces, such as material interfaces and interfaces between different mesh topologies, we are concerned with the performance of the method especially for the case that two mutually incompatible meshes have different sizes of finite elements and different material properties. Several numerical experiments are conducted and the results provide the excellent performance of the method which is equivalent to that of the standard FEM with compatible meshes.

Key Words : incompatible mesh, dual Schur method, mortar method

1. はじめに

材料の異なる複数の構造系の動的挙動を解析するに際しては、各構造系固有の特性を反映し得るメッシュを用いた有限要素解析が主流である^{1),2),3),4)}。このとき、当然領域ごとに要素寸法は異なるが、各構造系間において節点が整合するようにモデルを生成するのが一般的である。たとえば、部分構造ごとにグループ化して解析するサブストラクチャ法では、各領域で異なる要素寸法のメッシュを用いたとしても領域間で節点の不整合を許容することはない。しかしながら、異なる材料定数を持つ構造系間で節点を整合させたモデルを作成することは、メッシュ生成に費やす時間、解析モデルの自由度を増やし、更に、精度の悪い応答を生み出す原因のひとつであるゆがんだ要素を生成する可能性も出てくる。また、異なる構造系を個別に設計し、独立に生成されたメッシュを用いて構造全体の動的解析を実施する際には、節点を整合させるためのメッシュの修正は煩雑であるばかりでなく、設計変更にも迅速な対応ができないので非効率的である。

これに対して、異なる物理領域の接合部や材料界面において節点変位が一致しない、いわゆる不整合メッシュに対して、メッシュを切り直すことなく、有限要素法により動的応答を得る方法としては mortar 法^{5),6),7),8)}がよく知られている。mortar 法は Bernaid ら⁵⁾によって開発され、メッシュが不整合になる界面に接着部を配し Lagrange 未定乗数を用いて接着部の表面力を評価して領域全体の挙動を求める手法である。Herry ら⁷⁾は、mortar 法を用いて界面における運動学的連続性を保持した応答を得るために、dual Schur 法を導入⁹⁾しており、Faucher ら⁸⁾はこれを時間間隔も各領域で一致しなくてよい手法に拡張して、陽解法での効率性を示

した。しかし、構造系を構成する材料定数が大きく異なるために界面で向かい合う要素寸法が大きく異なる場合について、dual Schur 法を導入した mortar 法(以下、dual-Schur mortar 法と呼ぶ)が運動学的連続性を保持しうるか否かについて検討した研究はない。さらに、界面上の向かい合う材料の種類が異なる場合についても検討した研究がないため、dual-Schur mortar 法を異なる材料を有する構造系の動的解析に適用できるかどうか、明らかにされていない。

そこで、本研究では、不整合メッシュを有する解析モデルの動的応答を dual-Schur mortar 法を用いて得る際に、メッシュが整合しない界面で向かい合う要素の寸法と材料の種類が異なると解の精度にどのような影響を及ぼすかについて検討を行う。まず、第2節で dual Schur 法を導入した mortar 法の定式化を概説する。第3節では、解が十分収束する連続体に近い解析モデルを用いた場合について、第4節では実際の動的解析で用いられるような解析モデルを用いた場合について、簡単な解析対象に対して数値実験を行う。第5節には本研究の結論を与える。

2. dual Schur 法を導入した mortar 法

本研究の検討に用いる手法は、Herry ら⁷⁾による dual-Schur mortar 法である。ここではその定式化を概説する。

図-1 に示すような領域 Ω を持つ物体を考える。領域全体の境界を $\partial\Omega$ により表せば、変位が与えられる境界 $\Gamma_u \subset \partial\Omega$ と荷重が与えられる境界 $\Gamma_o \subset \partial\Omega$ に分解される ($\partial\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_o$)。dual Schur 法により図-1 に示すように領域 Ω を ℓ 個の界面 S_i ($S_i \in \mathcal{S}$, $i = 1, \dots, \ell$) を持つ s 個の領域 Ω^k ($k = 1, \dots, s$) に分割する。こ

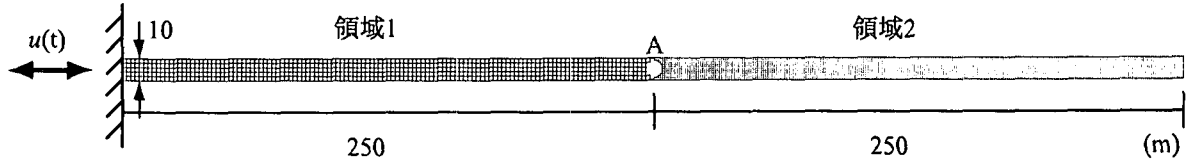


図-3 解析モデル

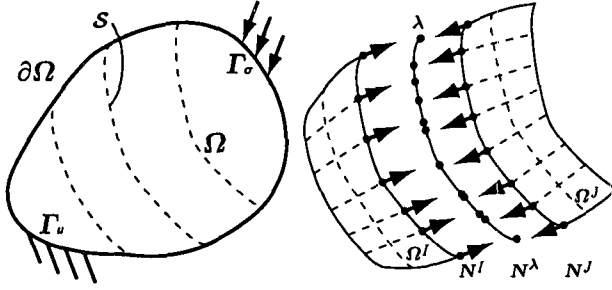


図-1 領域分割

図-2 Lagrange 未定乗数

のとき、Lagrange 未定乗数 Λ を用いて Hamilton の原理を適用すれば次のハイブリット型の変分形式が得られる。

$$\int_T \left\{ - \int_{\Omega} (\partial \delta u)^T C \partial u d\Omega + \int_{\Omega} (\delta \dot{u})^T \rho \dot{u} d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} (\delta u)^T t d\Gamma + \int_S (\delta \dot{u}^I - \delta \dot{u}^J)^T \int_T \Lambda d\tau dS \right\} dt = 0 \quad (1)$$

ここに、 $\dot{u}$ 、 u は速度、変位ベクトル、 $\delta \dot{u}$ 、 δu は仮想速度、仮想変位ベクトル、 ∂ は勾配の対称成分を作る微分演算子である。 C は弾性係数行列、 ρ は単位体積質量、 t は Γ_{σ} において与えられる応力ベクトルである。また、 $\delta \dot{u}^I$ 、 $\delta \dot{u}^J$ はそれぞれ界面において対になる領域 Ω^I 、 Ω^J の上の界面における仮想速度ベクトルである (図-2 参照)。有限要素法を適用して式 (1) を離散化すれば、領域 Ω^k について次のような運動方程式

$$M^k \ddot{d}^k + f_{\text{int}}^k = f_{\text{ext}}^k - (P^k)^T \lambda \quad \forall k \in (1, \dots, s) \quad (2)$$

が成立し、各領域間では速度の連続性に関する次式が成立する。

$$P \dot{d} = \sum_{k=1}^s P^k \dot{d}^k = 0 \quad (3)$$

ここに、 $\ddot{d}^k$ 、 $\dot{d}^k$ は領域 k の節点加速度、節点速度ベクトルである。また、 M^k は領域 k の質量マトリックス、 f_{int}^k は節点内力ベクトル、 f_{ext}^k は節点外力ベクトルであり、各マトリックスは形状関数 N 、 B マトリックス $B = \partial N$ を用いて次のように表される。

$$M = \int_{\Omega} \rho N^T N d\Omega, \quad f_{\text{int}} = \int_{\Omega} B^T C B d\Omega, \\ f_{\text{ext}} = \int_{\Gamma_{\sigma}} N^T t d\Gamma$$

式 (2) における $(P^k)^T \lambda$ は、領域間の結合力を表し、 λ は Lagrange 未定乗数、 P は次式で表される向かい合

う領域間の拘束マトリックスである。

$$P = \left\{ \int_S \Phi^T N^I dS \quad \int_S \Phi^T N^J dS \right\} \quad (4)$$

ここに、 Φ 、 N^I 、 N^J はそれぞれ Λ 、 $\dot{u}^I$ 、 $\dot{u}^J$ に関する形状関数である。また、Lagrange 未定乗数 λ は、力の次元を持ち、図-2 に示すように領域間の表面力を表す。 λ を評価する節点は、節点数を N^{λ} 、節点番号の集合を $\mathcal{N}^{\lambda}(N^{\lambda})$ とし、図-2 の向かい合う領域 Ω^I 、 Ω^J の界面上の節点数をそれぞれ N^I 、 N^J 、節点番号の集合を $\mathcal{N}^I(N^I)$ 、 $\mathcal{N}^J(N^J)$ としたとき、次式により表される。

$$\mathcal{N}^{\lambda} = (\mathcal{N}^I \cup \mathcal{N}^J) - (\mathcal{N}^I \cap \mathcal{N}^J) \quad (5)$$

3. 解が十分収束する解析モデルによる検討

図-3 に示すような左端が固定された梁状の構造物が、左端に軸方向の強制変位 $u(t)$ (縦波) を受ける問題を考える。中央から左側の領域を領域 1 とし、中央から右側の領域を領域 2 と呼ぶことにする。まず、メッシュ不整合のない通常の有限要素法 (以下、単に FEM と呼ぶ) を用いて 5Hz までの周波数帯を持つ波を精度よく表現することができるメッシュ不整合のない解析モデルを設定する。同様に 5Hz までの波を精度よく表すことができる要素寸法を持つが、領域の接合面において不整合な節点配置を有するモデルを領域 1 と領域 2 にそれぞれ配し、前節で示した dual-Schur mortar FEM を適用する。そして、FEM による応答と dual-Schur mortar FEM の応答を比較し、独立に生成された 2 つのメッシュ間における要素寸法の違いと材料の違いが解の精度にどのような影響を及ぼすのかについて検討する。本研究では、時間積分の方法として Newmark の β 法を用い、時間増分に関して無条件安定となるパラメータを用いた。

3.1 参照解析モデルの設定

まず始めに、本節で行う比較・検討に必要な参照解のためのメッシュ不整合のない参照解析モデルを設定する。

図-3 の解析対象全体を、要素寸法が 1m, 1/2m, 1/4m, 1/8m の定型 4 節点アイソパラメトリック四辺形要素 (QUAD4) により分割した解析モデルを用意し、それぞれを rs1, rs1/2, rs1/4, rs1/8 と呼ぶことにする。材料定数には、ヤング率 $2.5 \times 10^8 \text{ N/m}^2$ 、ポアソン比 0.25、単位体積質量 2500 kg/m^3 (縦波速度 346 m/s 、せん断波速度 200 m/s) を用いることにする。強制変位 $u(t)$ として振幅 0.01 (m) で 5Hz の振動数の正弦波 1 波を与えたときの図-3 の白丸で表される点 A の応答を求め、5Hz までの応答波形の収束状況を調べる。ここで、一般に、「実体波 1 波長を表すのに 10 要素程度が必要で

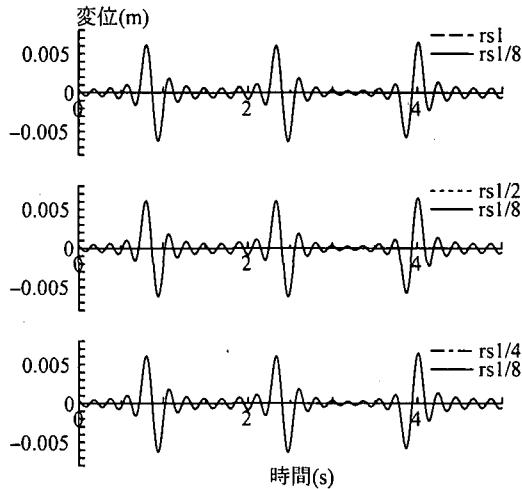


図-4 変位の時刻歴応答

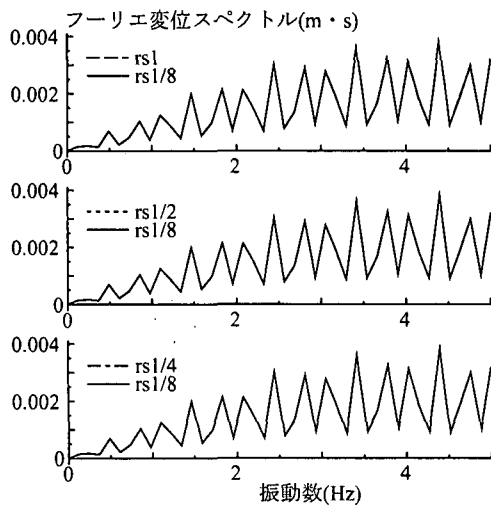


図-5 フーリエ変位スペクトル

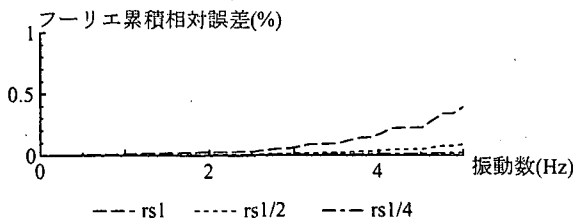


図-6 フーリエ累積相対誤差

ある」と言われており、この解析対象の 5Hz の縦波の 1 波長は 69.2m なので、1 要素寸法は 6.92m であればよい。しかし、ここでは基礎的な検討として、「FEM により解を求め、5Hz までの成分を含んだ応答波形が十分収束するもの」という一般の基準より厳しい条件を設定し、検討には要素寸法 1m、1/2m、1/4m、1/8m を用いることにした。

図-4 に点 A における変位の時刻歴応答を、図-5 にそのフーリエ変位スペクトルを示す。ただし、図-4 は 5Hz 以下の波の成分のみを取り出した、つまり、ローパスフィルタを通した応答である。鎖線が rs1 の応答、点線が rs1/2 の応答、一点鎖線が rs1/4 の応答、実線が rs1/8 の応答である。解の収束性を見るために、最も要素寸法が小さい rs1/8 の応答とそれぞれの応答を

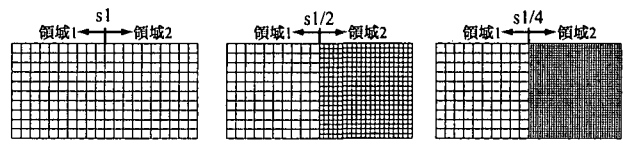


図-7 界面の様子

比較して表示する。これらの図の目視によれば、いずれの解析モデルの応答も rs1/8 の応答に重なっており、よく一致している。

さらに、ここで生じる誤差を定量的に評価するために、フーリエ累積相対誤差を用いることにする。フーリエ累積相対誤差とは、rs1 から rs1/4 の各ケースのフーリエ変位スペクトルを振動数 f の関数 $\tilde{g}(f)$ で表し、rs1/8 のフーリエ変位スペクトルを $g(f)$ で表したとき、

$$\frac{\int_0^f |\tilde{g}(f) - g(f)| df}{\int_0^{f_{max}} |g(f)| df} \times 100$$

で表される相対誤差である。ただし、ここでは 5Hz 程度の精度を保証する解析モデルの検討を行っているので、 $f_{max} = 5\text{Hz}$ とする。図-6 は図-5 のフーリエ変位スペクトルから求めた rs1/8 からのフーリエ累積相対誤差である。ただし、凡例は図-4 と同じである。いずれの応答も誤差は 1% 以下に抑えられており、これらの解析モデルは 5Hz 程度の波をほぼ正確に表すことができるといえる。したがって、参照解析モデルとしていずれのモデルを用いてもよいので、本論文では rs1/4 を用いることにする。

3.2 要素寸法の違いが解の精度に及ぼす影響

ここでは、互いに異なる要素寸法を持つ領域 1 と領域 2 を用いた不整合メッシュの場合の dual-Schur mortar FEM による応答と rs1/4 の応答を比較し検討する。領域 1 を要素寸法 1m の定型 QUAD4 により分割し、領域 2 を要素寸法 1m、1/2m、1/4m の 3 種類の定型 QUAD4 により分割する。メッシュが整合しない界面において向かい合う領域の要素寸法が異なるこれらの解析モデルをそれぞれ s1、s1/2、s1/4 と呼ぶことにする。図-7 にそれぞれの境界付近の拡大図を示す。材料定数には、領域 1、領域 2 とともに前節と同じものを用いることにする。前節で述べたように、この材料定数を用いた場合いずれのモデルも 5Hz 程度の波を表すことができる。以下では、強制変位 $u(t)$ として振幅 0.01(m) で振動数 1Hz、5Hz の 2 種類の正弦波 1 波を与えたときの図-3 の白丸で表される領域 1 と領域 2 の境界上にある点 A の応答を求め、rs1/4 の応答と比較し、不整合メッシュ間での要素寸法の差が解の精度に及ぼす影響について検討する。

図-8、9 に各入力波を与えたときの点 A における変位の時刻歴応答を、図-10、11 にそのフーリエ変位スペクトルを示す。ただし、図-8、9 は 5Hz 以下のローパスフィルタを通した応答である。実線が rs1/4 の応答、鎖線が s1 の応答、点線が s1/2 の応答、一点鎖線が s1/4 の応答である。いずれの応答も rs1/4 の応答によく一致している。図-12、13 に図-10、11 から求めたフーリエ累積相対誤差を示す。ただし、 $f_{max} = 5\text{Hz}$ 、

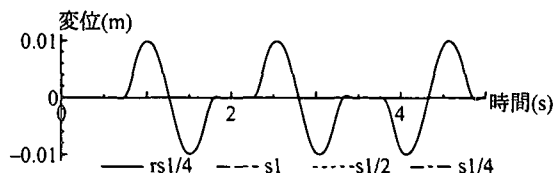


図-8 変位の時刻歴応答 (入力波 1Hz, 寸法が異なる場合)

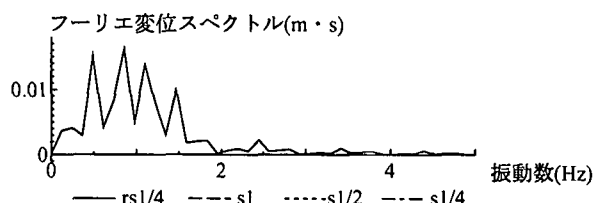


図-10 フーリエ変位スペクトル (入力波 1Hz, 寸法が異なる場合)

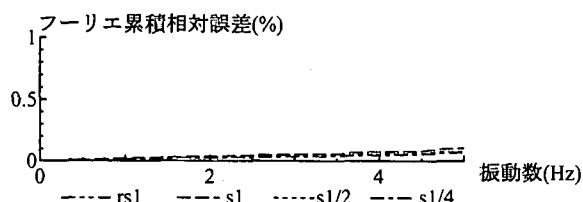


図-12 フーリエ累積相対誤差 (入力波 1Hz, 寸法が異なる場合)

凡例は図-10, 11 と同じである。入力波の振動数が大きくなると、要素が表現できる波の成分の限界に近くなるため誤差が増加するが、いずれの誤差も1%以下と非常に小さい。また、領域2の要素寸法が小さくなるほど累積相対誤差は小さくなっており、メッシュが整合しない界面で要素寸法比が大きくなっても誤差は累積しないことが分かる。

以上より、不整合メッシュで要素寸法が異なることが解の精度に及ぼす影響は非常に小さいと考えられる。

ところで、前節の通常の有限要素モデル rs1 は、本節の領域1と同じ要素寸法を持つ。また、s1 では界面における要素寸法が同じである。このため、rs1 と s1 は、メッシュ数、配置ともに同じである。ただし、ここでの dual-Schur mortar FEM による解析では、領域1と領域2間の表面力は Lagrange 未定乗数により近似され、式(5)で表される界面上にあるそれぞれの領域の節点と同じ点において評価される。向かい合う領域の節点が1対1に対応する s1 のような場合、表面力の評価点もそれぞれの領域の節点に1対1に対応するので、節点間で補間誤差が生じない。このため、Lagrange 未定乗数が適切に評価されていれば、界面で要素寸法が同じ s1 の場合の応答は、s1 と同じ要素寸法を持つ解析モデル rs1 を FEM により解析した場合と全く同じ応答が得られるはずである。rs1 の応答を図-12, 13 に二点鎖線で表す。これらの図より、rs1 の応答と s1 の応答は全く同じであり、本研究で用いる解析手法が適確に Lagrange 未定乗数を評価していることが確認できる。

3.3 要素寸法と材料の違いが解の精度に及ぼす影響

ここでは、図-3の領域1と領域2のメッシュが整合しない界面で要素寸法と材料が異なる解析モデルに対し、強制変位 $u(t)$ として振幅 0.01(m) で振動数 1Hz, 5Hz の2種類の正弦波1波を与えたときの図-3の白丸

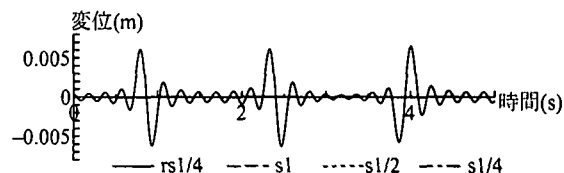


図-9 変位の時刻歴応答 (入力波 5Hz, 寸法が異なる場合)

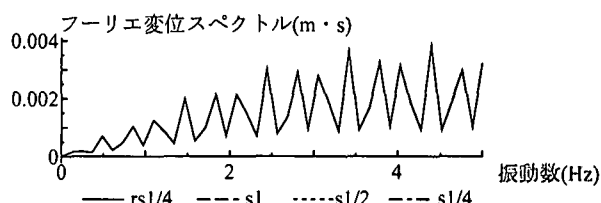


図-11 フーリエ変位スペクトル (入力波 5Hz, 寸法が異なる場合)

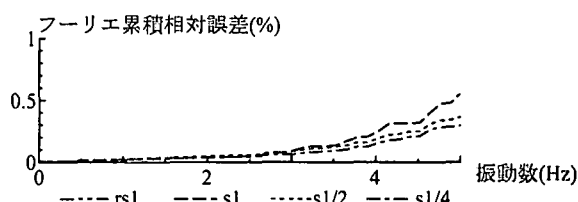


図-13 フーリエ累積相対誤差 (入力波 5Hz, 寸法が異なる場合)

で表される界面上の点 A の応答を rs1/4 の応答と比較する。前節と同様に、解析モデル s1, s1/2, s1/4 を用意する。ただし、材料定数には、領域1には第3.1節と同じものを用い、領域2には領域1に比べて縦波速度の速い、ヤング率 $2.5 \times 10^8 \text{ N/m}^2$ 、ポアソン比 0.25、単位体積質量 625 kg/m^3 (縦波速度 693m/s, せん断波速度 400m/s) を用いる。この材料定数を用いた場合、本節の第3.1節に比べて縦波の速度が速い材料を用いることになるので、本節で用いる解析モデルはやはり 5Hz の波を十分表すことができるモデルであるといえる。

図-14, 15 に点 A における変位の時刻歴応答、図-16, 17 にそのフーリエ変位スペクトル、図-18, 19 にそのフーリエ累積相対誤差を示す。ただし、図-14, 15 は 5Hz 以下のローパスフィルタを通した応答であり、図-18, 19 において $f_{\max} = 5 \text{ Hz}$ であるとする。実線が rs1/4 の応答、鎖線が s1 の応答、点線が s1/2 の応答、一点鎖線が s1/4 の応答である。図-14~17 より、いずれのモデルを用いた応答も rs1/4 の応答によく一致している。図-18, 19 においても、累積相対誤差は1%と非常に小さい。また、領域2の要素寸法が小さくても累積相対誤差は変わらない。これは、領域1の要素寸法では領域2に比べて低周波成分の波しか表すことが出来ないため、ここで生じる累積相対誤差は領域1の要素性能に依存するからである。したがって、界面で要素寸法比が大きくなっても誤差は累積しないと考えられる。

以上より、不整合メッシュ境界で要素寸法と材料が異なっても、解の精度に及ぼす影響は非常に小さいと結論付けられる。

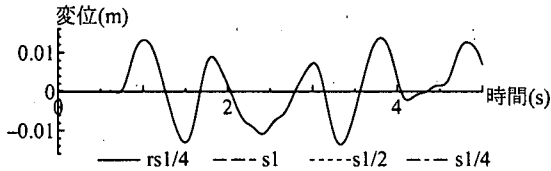


図-14 変位の時刻歴応答 (入力波 1Hz, 寸法, 材料が異なる場合)

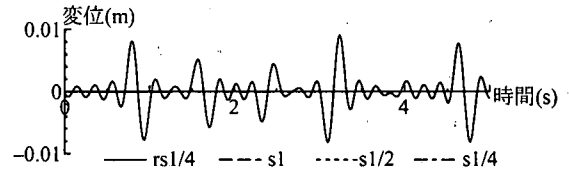


図-15 変位の時刻歴応答 (入力波 5Hz, 寸法, 材料が異なる場合)

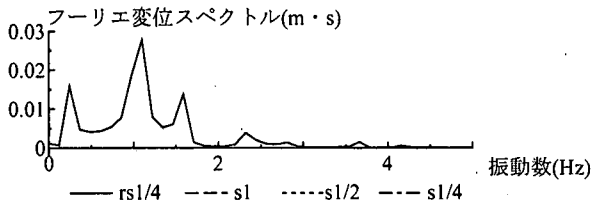


図-16 フーリエ変位スペクトル (入力波 1Hz, 寸法, 材料が異なる場合)

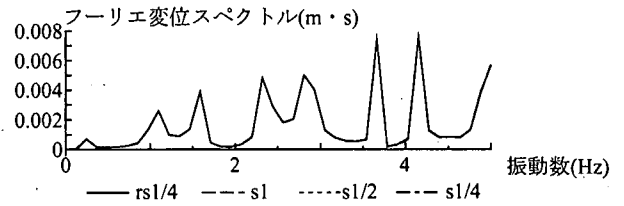


図-17 フーリエ変位スペクトル (入力波 5Hz, 寸法, 材料が異なる場合)

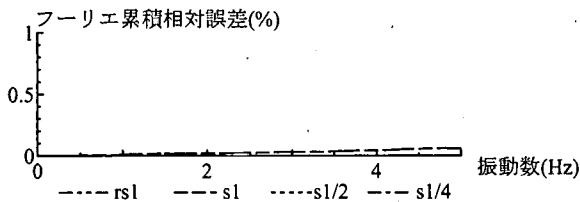


図-18 フーリエ累積相対誤差 (入力波 1Hz, 寸法, 材料が異なる場合)

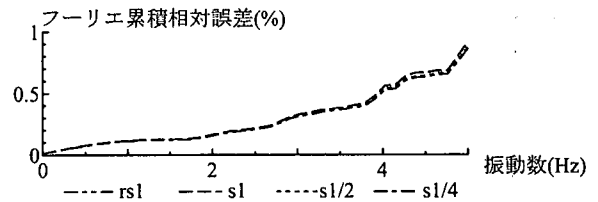


図-19 フーリエ累積相対誤差 (入力波 5Hz, 寸法, 材料が異なる場合)

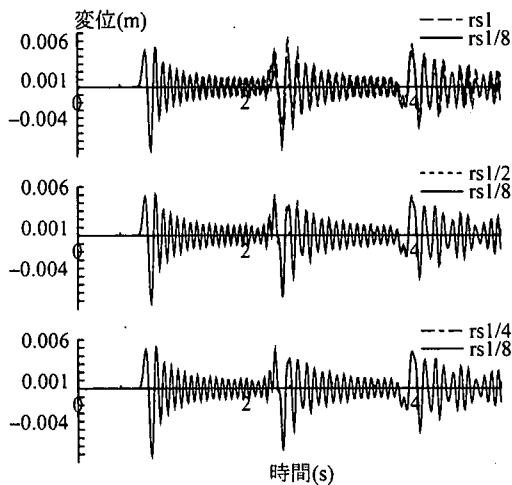


図-20 変位の時刻歴応答

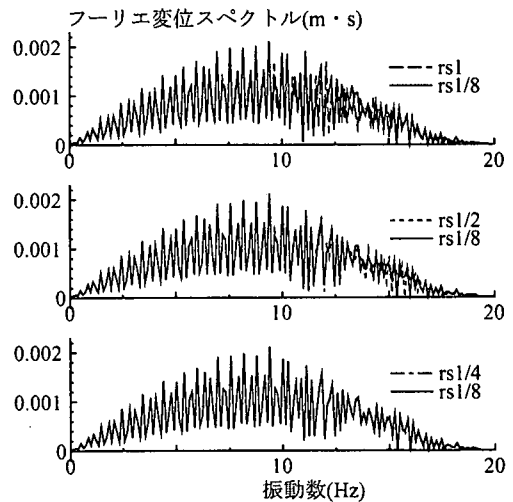


図-21 フーリエ変位スペクトル

4. 実際の動的解析を想定した検討

第3節では解析モデルとして十分解が収束するものを用いたが、実際の多くの動的解析では、「実体波1波長を表すのに10要素程度が必要である」という基準を用いて解析モデルを設定している。そこで、この基準を用いて、構造物などの動的解析で必要となる20Hzまでの波を表すことができる解析モデルを設定し、FEMによる応答と dual-Schur mortar FEM の応答を比較することで、不整合メッシュの界面において要素の寸法と材料種類が異なることが解の精度にどのような影響を及ぼすのかについて検討する。

4.1 参照解析モデルの設定

まず始めに、本節で行う比較・検討に必要な参照解のための参照解析モデルを設定する。

材料定数は第3.1節と同じものを用いることにする

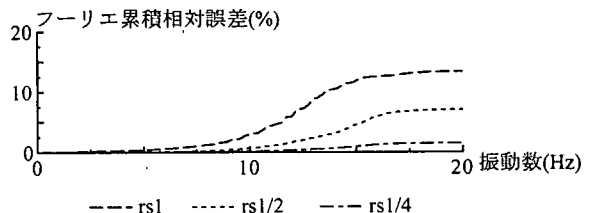


図-22 フーリエ累積相対誤差

と、「実体波において1波長を表すのに10要素程度が必要」であることから、20Hz程度の実体波を表現できる解析モデルは要素寸法が1m以下であればよいことになる。そこで、第3.1節と同様に、要素寸法を1m, 1/2m, 1/4m, 1/8mにした解析モデルを用意し、それぞれをrs1, rs1/2, rs1/4, rs1/8と呼ぶことにする。先

ほどの基準に照らせば、これらの解析モデル $rs1 \sim rs1/8$ は、それぞれ 20Hz, 40Hz, 80Hz, 160Hz 程度の実体波を表すことができるモデルである。強制変位 $u(t)$ として振幅 0.01(m) で 10Hz の振動数の正弦波 1 波を与えたときの図-3 の白丸で表される点 A の応答を求め、20Hz までの成分を含んだ応答波形が十分収束するものを本節の検討に用いる参照解析モデルとする。

図-20 に点 A における変位の時刻歴応答を、図-21 にそのフーリエ変位スペクトルを、図-22 にそのフーリエ累積相対誤差を示す。ただし、図-20 は 20Hz 以下のローパスフィルタを通した応答であり、図-22 において $f_{max} = 20\text{Hz}$ である。鎖線が $rs1$ の応答、点線が $rs1/2$ の応答、一点鎖線が $rs1/4$ の応答、実線が $rs1/8$ の応答である。解の収束性を見るために、最も要素寸法が小さい $rs1/8$ の応答とそれぞれの応答を比較して表示する。図-20、図-21 より、 $rs1$ 、 $rs1/2$ では誤差は大きい、 $rs1/4$ のとき $rs1/8$ の応答とほぼ一致し、解の収束が見られる。また、図-22 より、20Hz 程度の実体波を表すことができるとされている $rs1$ の応答は 10Hz 付近から誤差が増加し、20Hz 付近で 12~13% 程度の誤差が累積する。また、40Hz 程度の実体波を表すことができるとされている $rs1/2$ の応答でも 10Hz 付近から徐々に誤差が増加し、20Hz 付近で 5~6% 程度の誤差が累積する。そこで、ここでは 20Hz の成分を含む波を十分表すことができる参照解析モデルとして、累積相対誤差が 2% 程度に抑えられる $rs1/4$ を用いることにする。

4.2 要素寸法の違いが解の精度に及ぼす影響

ここでは、メッシュが整合しない界面において要素寸法が異なることが解に及ぼす影響を見るために、異なる要素寸法を持つ領域 1 と領域 2 を用いた dual-Schur mortar FEM の応答と $rs1/4$ の応答を比較する。第 3.2 節と同様に、領域 1 と領域 2 で要素寸法の異なる 3 種類の解析モデル $s1$ 、 $s1/2$ 、 $s1/4$ を用意し、材料定数は、第 3.1 節と同様のものを用いる。この材料定数を用いた場合、「実体波 1 波長を表すのに 10 要素程度が必要である」という基準から、領域 1 は 20Hz、領域 2 は $s1$ では 20Hz、 $s1/2$ では 40Hz、 $s1/4$ では 80Hz 程度の実体波を表すことができるモデルとみなされる。強制変位 $u(t)$ として振幅 0.01(m) で振動数 1Hz, 5Hz, 10Hz, 20Hz の 4 種類の正弦波 1 波を与えたときの図-3 の白丸で表される領域 1 と領域 2 の界面上にある点 A の応答を求め、 $rs1/4$ の応答と比較し、要素寸法が解の精度に及ぼす影響について検討する。

図-23~26 に各入力波を与えたときの点 A における変位の時刻歴応答を、図-27~30 にそのフーリエ変位スペクトルを、図-31~34 にそのフーリエ累積相対誤差を示す。ただし、図-23~26 は 20Hz 以下のローパスフィルタを通した応答であり、図-31~34 において $f_{max} = 20\text{Hz}$ である。実線が $rs1/4$ の応答、鎖線が $s1$ の応答、点線が $s1/2$ の応答、一点鎖線が $s1/4$ の応答である。また、図-31~34 には、領域 1 と要素寸法が同じ FEM のための解析モデル $rs1$ の応答を二点鎖線で示す。この図から、入力波が異なっても、領域 1 と領域 2 の要素寸法が同じ $s1$ の応答は $rs1$ の応答と同じであることが分かる。図に示すように、得られた応答

は入力波によって大きな累積相対誤差を生じているが、これらのメッシュ $s1$ と $rs1$ はともに 20Hz 程度の実体波を表すことができるものであることに注意されたい。

1Hz~5Hz の低周波の波を入力したとき、図-23, 24, 27, 28 に示すようにいずれのモデルを用いた応答も $rs1/4$ の応答に一致する。一方、10Hz~20Hz の高周波の波を入力したとき、図-25, 26 に示すように応答波形の誤差が顕著となり、図-29, 30 よりその誤差が 10Hz 以上の高周波成分の応答に集中していることが分かる。このことは、図-32~34 を見ても明らかである。

図-32~34 から分かるように、20Hz 程度の実体波を表すことができるとされている $rs1$ 、 $s1$ の応答において累積相対誤差が最も発生しやすく、 $s1$ より要素寸法が小さくなるにつれてその誤差は減少している。このことは、誤差の原因として要素寸法と波の周波数帯域の関係が大きく関与していることを意味しており、不整合メッシュで要素寸法比の影響が小さいことを示唆している。

また、累積相対誤差の増加傾向は入力波の振動数によっても異なる。入力波の振動数が小さい図-31 の場合、構造体を通る波の主成分が要素の表現できる周波数帯に十分含まれているため累積相対誤差は小さい。一方、入力波の振動数が大きくなると、図-32~34 に見られるように高周波成分だけではなく、低周波成分の応答にも累積相対誤差を生じるようになる。これは、構造体を通る波の主成分が要素の表現できる周波数帯を上回り、高周波成分の応答に誤差が生じ、低周波成分の応答もそれに励起されて誤差を生じるからであると考えられる。また、低周波成分への影響は、入力波の振動数が大きくなるほど高周波側に移動している。これは、図-29, 30 に見られるように、入力波の振動数が大きくなるほどスペクトル応答のピーク値が高周波側に移動するのに伴って、低周波成分への影響範囲も移動するからであると考えられる。ただし、 $rs1$ の応答も同じ傾向を示しているため、入力波によって累積相対誤差の傾向が変わることは不整合メッシュを対象とした場合に特出するものではなく FEM の応答一般にみえる現象であると考えられる。したがって、dual-Schur mortar FEM は FEM とほとんどほど変わらない性質を持つことがいえる。

以上のことから、dual-Schur mortar FEM の応答は FEM の応答とほとんど変わらなく、不整合メッシュにおいて要素寸法が異なることは解の精度にそれ程影響を与えないということが分かる。

4.3 要素寸法と材料の違いが解の精度に及ぼす影響

ここでは、図-3 の領域 1 と領域 2 で要素の寸法と材料が異なる解析モデルに対し、強制変位 $u(t)$ として振幅 0.01(m) で振動数 1Hz, 5Hz, 10Hz, 20Hz の 4 種類の正弦波 1 波を与えたときの図-3 の白丸で表される界面上の点 A の応答を $rs1/4$ の応答と比較し、界面において要素寸法と材料が異なることが解の精度に及ぼす影響について検討する。解析モデルには第 3.2 節と同じ要素分割を行った $s1$ 、 $s1/2$ 、 $s1/4$ を用いる。ただし、領域 2 の材料定数として、縦波の速度が領域 1 より遅いものと速いものを考え、それぞれについて検討を行う。

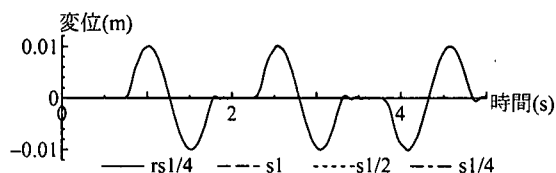


図-23 変位の時刻歴応答 (入力波 1Hz, 寸法が異なる場合)

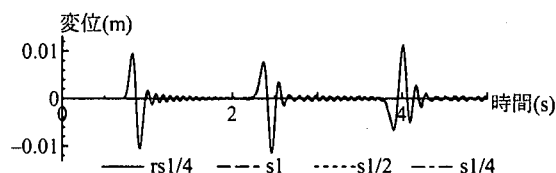


図-24 変位の時刻歴応答 (入力波 5Hz, 寸法が異なる場合)

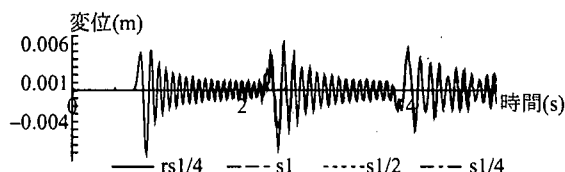


図-25 変位の時刻歴応答 (入力波 10Hz, 寸法が異なる場合)

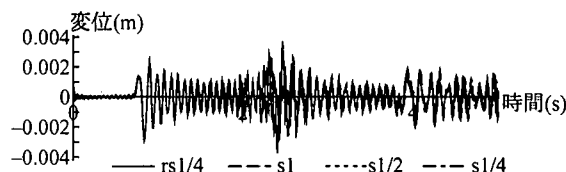


図-26 変位の時刻歴応答 (入力波 20Hz, 寸法が異なる場合)

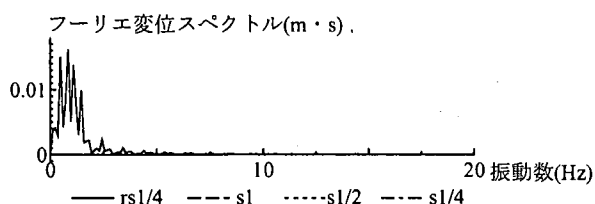


図-27 フーリエ変位スペクトル (入力波 1Hz, 寸法が異なる場合)

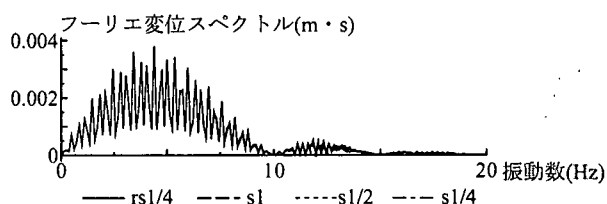


図-28 フーリエ変位スペクトル (入力波 5Hz, 寸法が異なる場合)

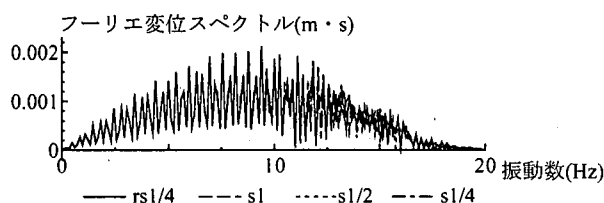


図-29 フーリエ変位スペクトル (入力波 10Hz, 寸法が異なる場合)

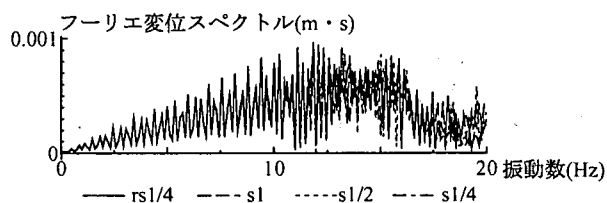


図-30 フーリエ変位スペクトル (入力波 20Hz, 寸法が異なる場合)

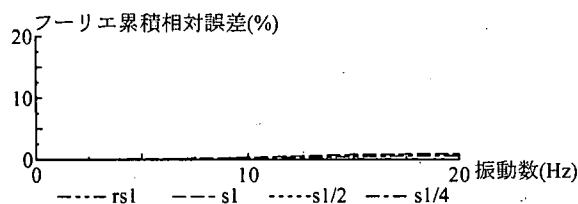


図-31 フーリエ累積相対誤差 (入力波 1Hz, 寸法が異なる場合)

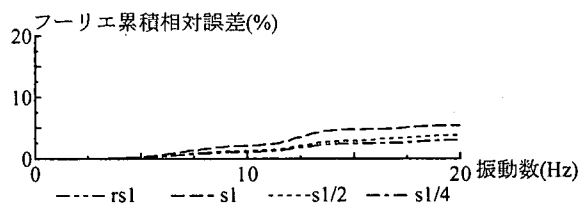


図-32 フーリエ累積相対誤差 (入力波 5Hz, 寸法が異なる場合)

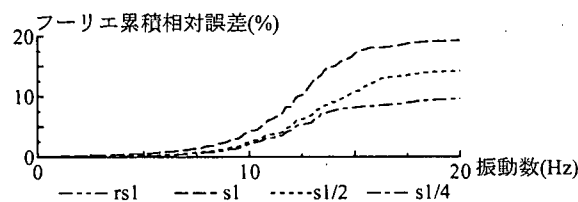


図-33 フーリエ累積相対誤差 (入力波 10Hz, 寸法が異なる場合)

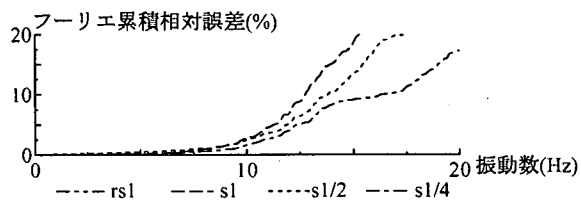


図-34 フーリエ累積相対誤差 (入力波 20Hz, 寸法が異なる場合)

(1) 領域 2 の縦波速度が遅い場合

材料定数として、領域 1 には第 3.1 節と同じものを用い、領域 2 には領域 1 に比べて縦波速度の遅い、ヤング率 $2.5 \times 10^8 \text{ N/m}^2$ 、ポアソン比 0.25、単位体積質量 10000 kg/m^3 (縦波速度 173 m/s 、せん断波速度 100 m/s) を用いることにする。この材料定数を用いた場合、「実体波 1 波長を表すのに 10 要素程度が必要である」という基準から、rs1/4 のとき 40 Hz 程度の実体波を表す

ことができ、領域 1 では 20 Hz 程度、領域 2 では s1 のとき 10 Hz 程度、s1/2 のとき 20 Hz 程度、s1/4 のとき 40 Hz 程度の実体波を表すことができるとみなされる。

図-35~38 に点 A における変位の時刻歴応答を、図-39~42 にそのフーリエ変位スペクトルを、図-43~46 にそのフーリエ累積相対誤差を示す。ただし、図-35~38 は 20 Hz 以下のローパスフィルタを通した応答であり、図-43~46 において $f_{\max} = 20 \text{ Hz}$ である。実

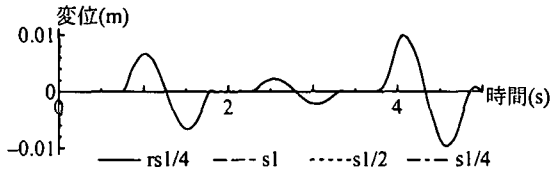


図-35 変位の時刻歴応答 (入力波 1Hz, 縦波速度が遅い場合)

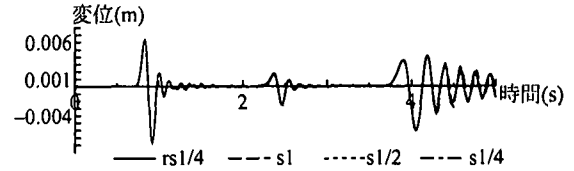


図-36 変位の時刻歴応答 (入力波 5Hz, 縦波速度が遅い場合)

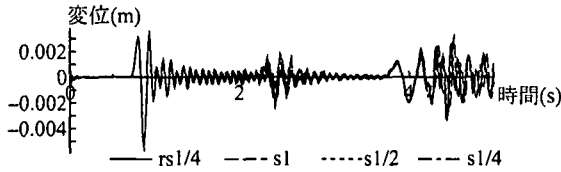


図-37 変位の時刻歴応答 (入力波 10Hz, 縦波速度が遅い場合)

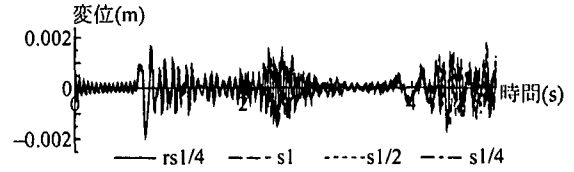


図-38 変位の時刻歴応答 (入力波 20Hz, 縦波速度が遅い場合)

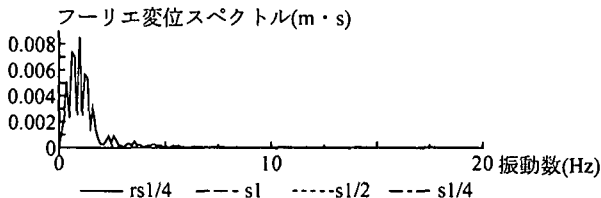


図-39 フーリエ変位スペクトル (入力波 1Hz, 縦波速度が遅い場合)

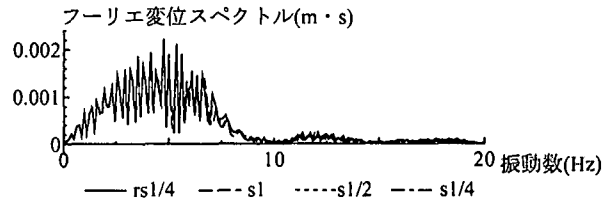


図-40 フーリエ変位スペクトル (入力波 5Hz, 縦波速度が遅い場合)

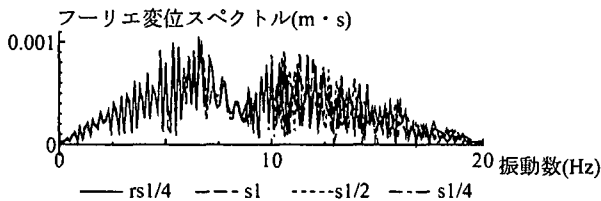


図-41 フーリエ変位スペクトル (入力波 10Hz, 縦波速度が遅い場合)

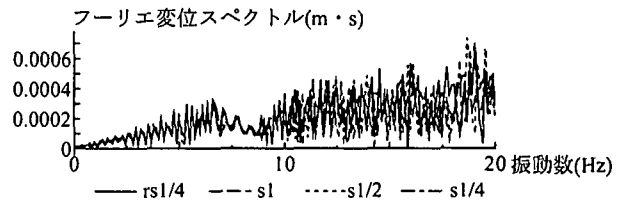


図-42 フーリエ変位スペクトル (入力波 20Hz, 縦波速度が遅い場合)

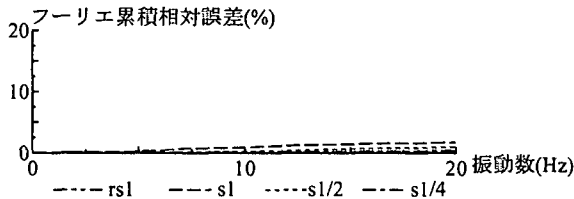


図-43 フーリエ累積相対誤差 (入力波 1Hz, 縦波速度が遅い場合)

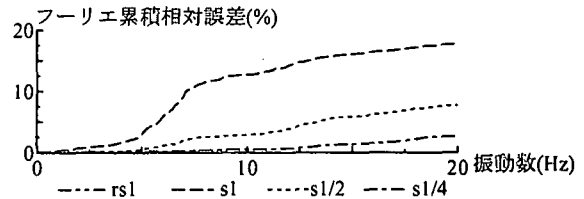


図-44 フーリエ累積相対誤差 (入力波 5Hz, 縦波速度が遅い場合)

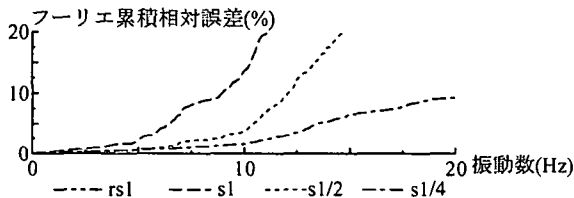


図-45 フーリエ累積相対誤差 (入力波 10Hz, 縦波速度が遅い場合)

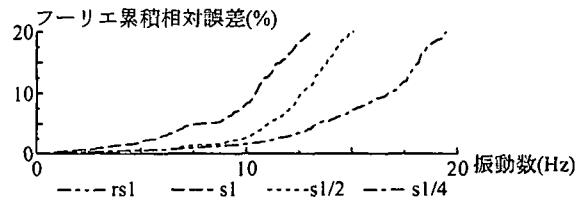


図-46 フーリエ累積相対誤差 (入力波 20Hz, 縦波速度が遅い場合)

線が $rs1/4$ の応答、鎖線が $s1$ の応答、点線が $s1/2$ の応答、一点鎖線が $s1/4$ の応答である。また、図-43～46には、領域1と要素寸法が同じ $rs1$ の応答を二点鎖線で表す。領域1と領域2の要素寸法が異なり、領域1の縦波速度が領域2の縦波速度に比べて遅い場合でも、 $s1$ の応答は $rs1$ の応答と全く同じ応答を示す。ただし、10Hz程度の実体波を表すことができるといわれているこの解析モデルであっても前節と同様に入力波

によっては大きな累積相対誤差を生じることには注意されたい。

入力波の振動数が小さいとき、図-35、39に見られるように、各応答は $rs1/4$ の応答によく一致している。入力波の振動数が大きくなると、図-36～38に見られるように誤差が顕在化し、それは図-40～42に見られるように5Hz以上の成分に集中することが分かる。これらの誤差について、フーリエ累積相対誤差を用いて

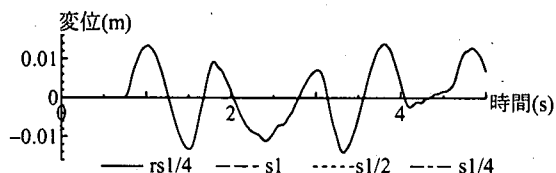


図-47 変位の時刻歴応答 (入力波 1Hz, 縦波速度が遅い場合)

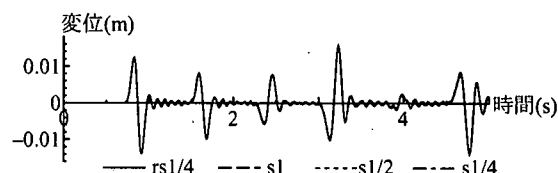


図-48 変位の時刻歴応答 (入力波 5Hz, 縦波速度が遅い場合)

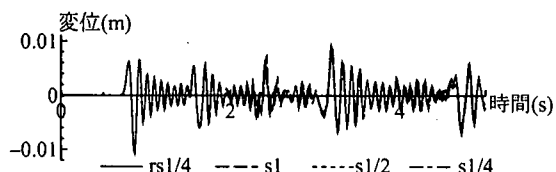


図-49 変位の時刻歴応答 (入力波 10Hz, 縦波速度が遅い場合)

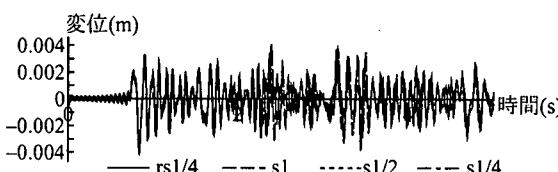


図-50 変位の時刻歴応答 (入力波 20Hz, 縦波速度が遅い場合)

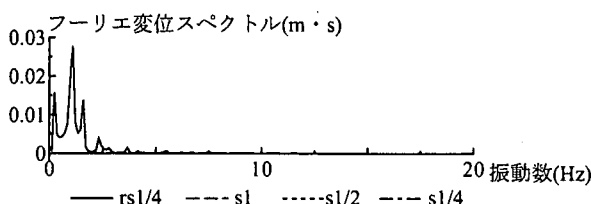


図-51 フーリエ変位スペクトル (入力波 1Hz, 縦波速度が遅い場合)

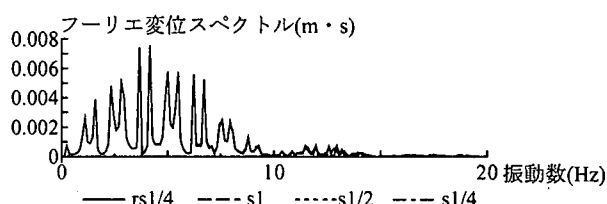


図-52 フーリエ変位スペクトル (入力波 5Hz, 縦波速度が遅い場合)

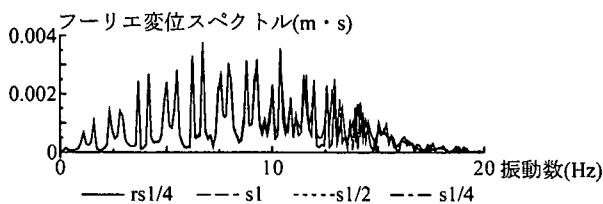


図-53 フーリエ変位スペクトル (入力波 10Hz, 縦波速度が遅い場合)

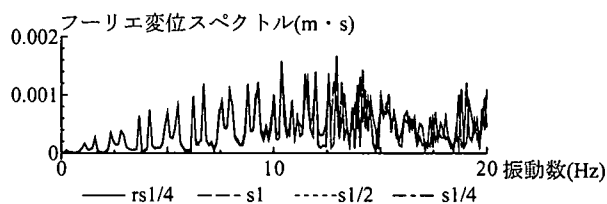


図-54 フーリエ変位スペクトル (入力波 20Hz, 縦波速度が遅い場合)

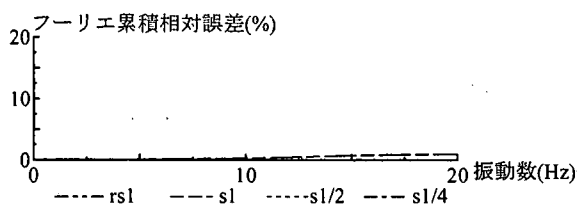


図-55 フーリエ累積相対誤差 (入力波 1Hz, 縦波速度が遅い場合)

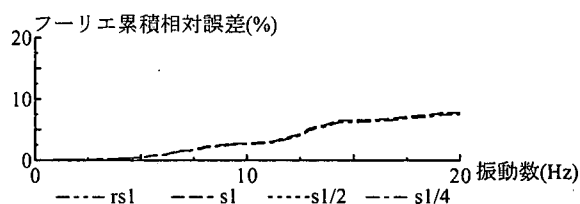


図-56 フーリエ累積相対誤差 (入力波 5Hz, 縦波速度が遅い場合)

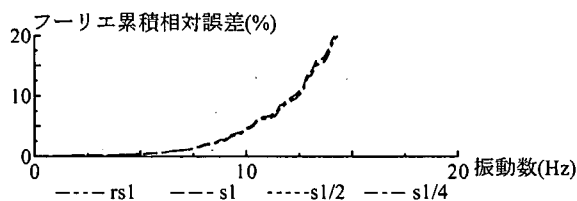


図-57 フーリエ累積相対誤差 (入力波 10Hz, 縦波速度が遅い場合)

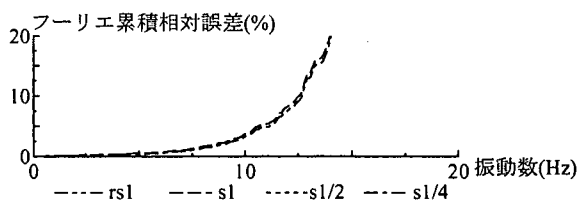


図-58 フーリエ累積相対誤差 (入力波 20Hz, 縦波速度が遅い場合)

考察する。まず、入力波の振動数が小さいとき、累積相対誤差は図-43に見られるように材料定数に同じものを用いた前節と同様に非常に小さい。しかし、入力波の振動数が大きくなると、図-44~46に見られるように、領域2の要素寸法が大きくと誤差が大変大きく、反対に小さいと大幅に誤差が小さくなるという前節とは異なる結果を示す。これは、領域2に領域1よりも縦波速度の遅い材料を用いた場合、領域2の要素寸法

で表すことができる波の周波数成分が領域1に比べて小さく、このことが応答に大きく反映されてしまうためであると考えられる。ただし、いずれの応答も、最も要素寸法が大きく10Hz程度の実体波を表すことができるといわれているrs1の応答と同じ応答を示すs1の応答より誤差が小さい。したがって、領域2に領域1よりも縦波速度が遅い材料を用いた不整合メッシュを有する解析モデルの応答は、FEMによる応答以上の誤

差を生じることはいないことがいえる。

(2) 領域 2 の縦波速度が速い場合

次に、材料定数として、領域 1 には第 3.1 節と同じものを用い、領域 2 には領域 1 に比べて縦波速度の速い、ヤング率 $2.5 \times 10^8 \text{ N/m}^2$ 、ポアソン比 0.25、単位体積質量 625 kg/m^3 (縦波速度 693 m/s 、せん断波速度 400 m/s) を用いて同様の検討を行う。この材料定数を用いた場合、「実体波 1 波長を表すのに 10 要素程度が必要である」という基準から、 $rs1/4$ のとき 160 Hz 程度の実体波を表すことができ、領域 1 では 20 Hz 程度、領域 2 では $s1$ のとき 40 Hz 程度、 $s1/2$ のとき 80 Hz 程度、 $s1/4$ のとき 160 Hz 程度の実体波を表すことができる。

図-47~50 に点 A における変位の時刻歴応答を、図-51~54 にそのフーリエ変位スペクトルを、図-55~58 にそのフーリエ累積相対誤差を示す。ただし、図-47~50 は 20 Hz 以下のローパスフィルタを通した応答であり、図-55~58 において $f_{max} = 20 \text{ Hz}$ である。実線が $rs1/4$ の応答、鎖線が $s1$ の応答、点線が $s1/2$ の応答、一点鎖線が $s1/4$ の応答である。また、図-55~58 に、領域 1 と要素寸法が同じ $rs1$ の応答を二点鎖線で示す。この場合も第 4.2 節や前節と同様に、 $s1$ の応答は $rs1$ の応答と全く同じ応答を示し、 20 Hz 程度の実体波を表すことができるといわれているにもかかわらず入力波によっては大きな累積誤差を生じる。

入力波の振動数が小さいとき、図-47, 51, 55 に与えた結果に見られるように、材料定数に同じものを用いた第 4.2 節と同様に誤差は非常に小さい。また、入力波の振動数が大きくなると、図-48~50, 52~54, 56~58 から分かるように、誤差が顕著になる。しかし、図-56~58 に見られるように、第 4.2 節および前項の結果と違って、どの解析モデルを用いた応答も同程度の誤差を生じている。これは、領域 2 に領域 1 よりも縦波速度の速い材料を用いた場合、領域 1 に比べて領域 2 で表すことができる波の周波数成分が大きいため、メッシュサイズを固定している領域 1 の波の高周波成分を表現しにくいという要素性能に支配されているためと考えられる。また、どの入力波を与えたときの応答も、最も要素寸法が大きく 20 Hz 程度の実体波を表すことができるといわれている $rs1$ の応答と同じ応答を示す $s1$ の応答と誤差の大きさはほとんど変わらない。このため、領域 2 に領域 1 よりも縦波速度が速い材料を用いた不整合メッシュを有する解析モデルの応答は、常に領域 1 の要素性能に左右され、さらに、FEM による応答以上の誤差を生じることはいないと期待される。

以上により、第 4.3 節のまとめとして、不整合メッシュで材料が異なる場合、縦波速度が遅い方の要素の性質を大きく受けた応答が得られ、不整合メッシュ自体の影響が軽微であると結論付けられる。

5. まとめ

本研究では、dual Schur を導入した mortar 有限要素法を用いて、界面で要素が必ずしも整合しない有限要素メッシュによる動的応答が、不整合メッシュで要素寸法や材料種類が異なることによる影響について検討を行い、次のことを明らかにした。

- 応答波形が十分収束する解析モデルを用いた検討

により、不整合メッシュで要素寸法や材料種類が異なることは解の精度に大きな影響を与えないことを明らかにした

- 実際の動的解析を想定して生成した解析モデルを用いた検討により、不整合メッシュ間で要素寸法や材料種類が異なると、その誤差の程度は通常の有限要素法と同程度かそれ以下であることを明らかにした

今後、本手法に非線形性を導入し、三次元化を図るなどして、異なる材料を有する複数の構造系を対象とした動的問題のための有用な解析手法として発展させる予定である。また、本手法を用いて不整合メッシュを許容することで、メッシュ生成における労力を大幅に軽減することが可能であるので、実務としての CAE 諸問題に対して大きな貢献ができることが期待される。

参考文献

- 1) A. E. Hami and B. Radi, Some decomposition methods in the analysis of repetitive structures, *Comp. and Struct.*, **58**, pp.973-980, 1996.
- 2) 土岐 憲三, 他: 講座「土と構造物の動的相互作用の解析法」, 土と基礎, **40**, No.1-12, 1992.
- 3) C. Spyarakos and G. Loannidis, Seismic behavior of a post-tensioned integral bridge including soil-structure interaction (SSI), *Int. J. Soil Dyn. Earthqu. Eng.*, **23**, pp.53-64, 2003.
- 4) O. Deck, M. A. Heib and F. Homand, Taking the soil-structure interaction into account in assessing the loading of a structure in a mining subsidence area, *Eng. Struct.*, **25**, pp.435-448, 2003.
- 5) C. Bernaid, Y. Maday and A. T. Patera, A new non-conforming approach to domain decomposition; the mortar element method, *Non Linear Partial Differential Equations and their Applications*, College de France seminar, Pitman: London, 1990.
- 6) F. Casadei, E. Gabellini, G. Fotia, F. Maggio and A. Quarteroni, A mortar spectral/finite element method for complex 2D and 3D elastodynamic problems, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, **191**, pp.5119-5148, 2002.
- 7) B. Herry, L. Di Valentin and A. Combescure, An approach to the connection between subdomains with non-matching meshes for transient mechanical analysis, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **55**, pp.973-1003, 2002.
- 8) V. Faucher and A. Combescure, A time and space mortar method for coupling linear modal subdomains and non-linear subdomains in explicit structural dynamics, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, **192**, pp.509-533, 2003.
- 9) A. Gravouil and A. Combescure, Multi-time-step explicit-implicit method for non-linear structural dynamics, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **50**, pp.199-225, 2001.

(2003 年 4 月 18 日 受付)