

均質化法を応用したロックボルト打設間隔の最適化

Optimization of the Installation Spacing of Rockbolts by Homogenization method

京谷孝史*・谷 宗行**

Takashi KYOYA and Muneyuki TANI

*正会員 工博 東北大学大学院 助教授 工学研究科土木工学専攻 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

**正会員 工修 (株) 日揮 (〒 100-0004 千代田区大手町 2-2-1)

An optimization method for design of the reinforcement of rock mass structures by rockbolts is presented. The method utilizes the topology optimization scheme that has been developed on the basis of the mathematical homogenization theory. The installation spacing among rockbolts is employed as a single design parameter. The mechanical reinforcement by rockbolts is quantitatively evaluated through the homogenization analysis and represented by two characteristic functions of the design parameter, such as the homogenized elastic tensor and the quadratic safety factor which are defined over the reinforced rock mass. By use of these two functions, three functionals representing a sort of stiffness or a safety index of the reinforced rock mass structure are defined. Then, by employing these functionals three kinds of optimization problems are formulated in the form of mathematical constrained maximization or minimization schemes and solved by the optimal criteria method. Optimal distribution of spacing of rockbolts is determined for a model rock slope through these optimization schemes, and their validity is examined and discussed.

Key Words : optimization of spacing of rockbolts, topology optimization method, homogenization theory

1. はじめに

ロックボルトは岩盤補強工として様々な構造物に用いられており、その有用性は多くの実績が物語っている。しかし、ロックボルトの補強効果は力学的に解明されていないことも多く、必ずしも合理的に設計されてはいない。

例えば、節理など中小規模の不連続面が発達した岩盤斜面を補強する場合、ロックボルトの補強効果が定量的に明らかになっていないため、やむを得ず「適当な滑り面を仮定して、それに沿って岩塊が滑らないようにつなぎ止める」設計が行われている。そうすれば荷重とそれに抵抗するロックボルトという設計の図式が明瞭になるからである。しかし、ロックボルトの補強効果は岩盤が変形することによって初めて発揮されるもので、そうした岩盤との力学的相互作用に基づく設計法が確立されるべきであるが、未だにそのような取り組みは見あたらない。

本論文は、ロックボルトによって岩盤を補強する問題について、岩盤とロックボルトの相互作用による岩盤の剛性や強度の増加に着目して、ロックボルトの打設間隔を最適化する計算力学的手法を提案するものである。

ロックボルトが打設された岩盤は一種の複合材料と見なすことができる。そうすると、均質化法に基づくトポロジー最適化手法^{1),2),3)}を応用して最適な打設間隔を合理的に決定することが出来る。

ここにいうトポロジー最適化手法とは、設計領域の材料配置問題として最適形状の決定を図るもので、Bensøe and Kikuchi¹⁾によって定式化されて以来、材料非線形や幾何学的非線形を考慮した形状最適化⁴⁾、動的荷重に

対する形状の最適化⁵⁾など様々な問題へと拡張されている極めて汎用性に富む手法である⁶⁾。

ロックボルトを打設した岩盤の弾性係数および巨視的強度は、均質化法によって評価することができる⁷⁾。これを用いて岩盤の弾性係数や強度を、ロックボルト打設間隔をパラメータとする関数として表現する。そして、それらを用いて岩盤の構造体としての剛性や強度を表す目的関数を適切に定めることにより、打設間隔を設計変数とする最適化問題が定式化できる。

本論文では、そのような剛性および強度に関して3種類の目的関数を提案し、その最小化あるいは最大化を通してロックボルトの最適打設間隔を決定する方法を示すとともに、モデル斜面に適用してその妥当性を検証する。

2. ロックボルトを打設した岩盤の弾性係数と破壊危険度関数

2.1 均質化法による岩盤の弾性係数と破壊基準の決定法

均質化法を用いれば、次のような手順で岩盤の均質化弾性係数と巨視的な破壊基準が得られる⁷⁾。

岩盤を構成する岩石の弾性係数 E_{ijkl} および強度特性 (例えば Drucker-Prager 型の破壊基準 $f(\sigma_{ij}) = 0$ など) は、岩石供試体に対する室内試験によってあらかじめ判っているとする。

不連続面が分布した岩盤に対して、岩盤の特徴を表している代表要素をユニットセルとして抜き出す (図-1)。もし、ロックボルトが打設された状態を考えるのなら、ロックボルトを含めたユニットセルを考えれば

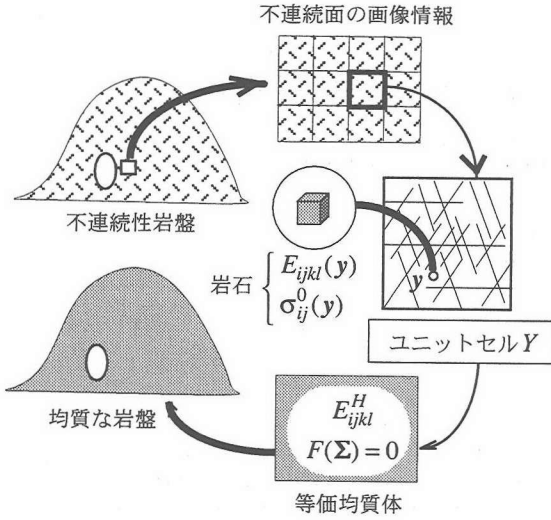


図-1 均質化法による不連続性岩盤のモデル化

ばよい⁸⁾。

ユニットセル Y に含まれる不連続面を小さな弾性係数を有する薄い弱層として理想化することにより、岩盤の均質化弾性係数 E_{ijkl}^H が、ユニットセル Y に関する次式を計算することによって与えられる。

$$E_{ijkl}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left(E_{ijkl}(\mathbf{y}) - E_{ijpq}(\mathbf{y}) \frac{\partial \chi_p^{kl}(\mathbf{y})}{\partial y_q} \right) d\mathbf{y} \quad (1)$$

ここに、 $E_{ijkl}(\mathbf{y})$ などはユニットセル内の位置 $\mathbf{y}$ にある材料（岩石または不連続面、あるいはロックボルト）の弾性係数を表す。 $\chi_p^{kl}(\mathbf{y})$ はユニットセルの特性関数と呼ばれ、同じユニットセルに関する次の方程式の解として与えられる。

$$\int_Y E_{ijpq} \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_q} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} d\mathbf{y} = \int_Y E_{ijkl} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} d\mathbf{y}, \quad \forall v_i \quad (2)$$

上式 (1), (2) は、ユニットセルの画像をデジタル化して1画素を1要素とする有限要素モデルを作成して数値解析される。式 (1), (2) を解いて均質化弾性係数などの巨視量を求める過程を均質化過程（解析）と呼ぶ。このとき、ユニットセルの奥行き方向の構造についても同様に画像データがあれば三次元構造のユニットセル有限要素モデルが作成できる。奥行き方向の画像データが無ければ、1つの画像データが示す構造が奥行き方向にも続く擬似三次元モデルを解析することになる。

また、均質化法では、岩盤内部のある位置 $\mathbf{x}$ に作用する巨視応力が $\Sigma_{mn}(\mathbf{x})$ であるとき、 $\mathbf{x}$ 近傍に存在する微視構造を示すユニットセル内部における微視応力分布 σ_{ij}^0 が、ユニットセル内の弾性係数分布 $E_{ijkl}(\mathbf{y})$ と特性関数 $\chi_p^{kl}(\mathbf{y})$ を用いた線形変換

$$\sigma_{ij}^0(\mathbf{y}) = \left[E_{ijkl} - E_{ijpq} \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_q} \right] (E^H)^{-1}_{klmn} \Sigma_{mn}(\mathbf{x}) \quad (3)$$

によって与えられる。巨視量から微視量を導くことからこれを局所化過程（解析）と呼ぶ。

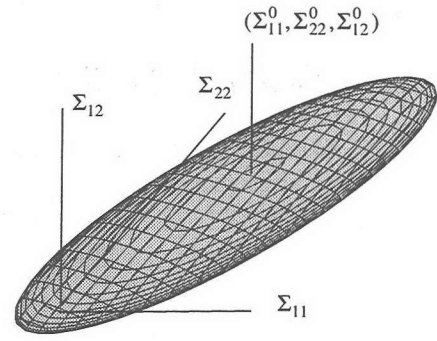


図-2 破壊基準 $F(\Sigma) = 1$ (および $G(\Sigma) = 1$) の楕円体 (圧縮を正)

この線形変換式 (3) の右辺に単位大きさの巨視応力 Σ_{mn} を与えてユニットセル内部の微視応力分布 $\sigma_{ij}^0(\mathbf{y})$ を調べ、その比例倍が、ユニットセル内部の至る所で岩石の強度基準 $f(\beta\sigma_{ij}^0) \leq 0$ を超えることがないような最大倍率 β を求める。すると、その倍率を掛けた $\beta\Sigma_{mn}$ が破壊を引き起こす巨視応力点を与えることになる。そして、様々な方向の単位巨視応力 Σ_{mn} について、こうした巨視応力点を調べて二次曲面近似すれば、岩盤の破壊基準が行列表示によって

$$F(\Sigma) = \{\Sigma\}' [A] \{\Sigma\} + \{b\}' \{\Sigma\} = 1 \quad (4)$$

のように与えられる。

ちなみに、この破壊基準を二次元平面ひずみ条件の下で図示すると、弱層の存在によって引張り応力に対してはもちろんのこと、圧縮応力によっても破壊するということが数値的に評価されることから、ほとんどの場合図-2 のような楕円体になることが判っている。

2.2 破壊危険度関数の導入

岩盤の破壊基準式 (4) を次のような標準型に書き換える。

$$(\{\Sigma\} - \{\Sigma^0\})' [A'] (\{\Sigma\} - \{\Sigma^0\}) = 1 \quad (5)$$

ここに、

$$\{\Sigma^0\} = -\frac{1}{2} [A]^{-1} \{b\}, \quad [A'] = -\frac{[A]}{1 + \{\Sigma^0\}' [A] \{\Sigma^0\}} \quad (6)$$

もちろん式 (5) が表す曲面は図-2 のままである。しかし、式 (4) の $F(\Sigma)$ とは異なり、式 (5) 左辺の二次形式

$$G(\Sigma) \equiv \{\Sigma'\}' [A'] \{\Sigma'\}, \quad (\{\Sigma'\} = \{\Sigma\} - \{\Sigma^0\}) \\ = \begin{Bmatrix} \Sigma'_{11} \\ \Sigma'_{22} \\ \Sigma'_{12} \end{Bmatrix}' \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} & A'_{13} \\ & A'_{22} & A'_{23} \\ \text{Sym.} & & A'_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Sigma'_{11} \\ \Sigma'_{22} \\ \Sigma'_{12} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

は、破壊基準面が楕円体 ($[A']$ が正定値行列) であることから、 $0 \leq G(\Sigma) \leq 1$ の範囲の値を取るようになる。

この $G(\Sigma)$ は、応力 $\{\Sigma\}$ が破壊基準面上にある時に $G = 1$ 、破壊基準面から遠ざかるにつれて 0 に近づく正値を取るもので、ある点の応力状態が破壊に近いかどうかを示す計量指標に使える。この $G(\Sigma)$ を、破壊状態への接近度を表す「破壊危険度関数」と定義する。

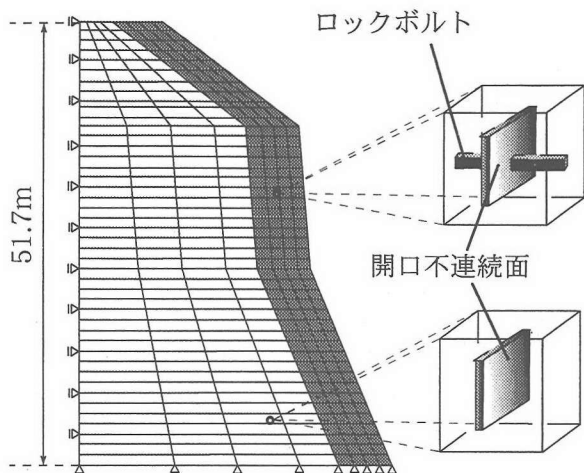


図-3 岩盤斜面の有限要素モデルとユニットセル

表-1 岩石(安山岩)とロックボルトの材料定数

	安山岩	ロックボルト
ヤング率(GPa)	38.9	205
ポアソン比	0.2	0.3
粘着力(MPa)	60.5	245
内部摩擦角(度)	35	0
単位体積重量(kN/m ³)	26.8	—

3. ロックボルト打設間隔の最適化

問題を単純化する目的で、解析対象の岩盤モデルは図-3に示すように鉛直方向の規則的な不連続面群を含んでいるとし、その不連続面群を貫くように所定の長さのロックボルトを水平に挿入するものとする。

この岩盤モデルに対して、岩盤部分およびロックボルト打設部分のユニットセルを同図に示すように設定する。図中の灰色の部分にロックボルト打設領域である。

岩盤を構成している岩石およびロックボルトの材料定数には表-1に示す値を用いる。岩石のそれらは安山岩(宮城県蔵王町)の実測値である。また、不連続面部分は柔らかい弾性体としてヤング率 $E = 1.0\text{MPa}$ 、ポアソン比 $\nu = 0$ を与える。

以下では、この岩盤斜面を対象として、ロックボルトによる岩盤の剛性ならびに強度増加に着目した打設間隔の最適化手法について述べる。

3.1 ロックボルト打設間隔をパラメーターとした均質化弾性係数、破壊危険度関数

ロックボルト打設部分のユニットセルについては、所定の打設間隔に対応する複数のモデルを準備する。そして、それぞれについて均質化弾性係数 E_{ijkl}^H (式(1))と破壊危険度関数 $G(\Sigma)$ (式(7))を求め、 E_{ijkl}^H ならびに $G(\Sigma)$ の中の係数行列 $[A']$ の全ての成分の変化の様子を打設間隔 p に関して整理する。

例として、図-4に、平面ひずみ条件で整理した均質

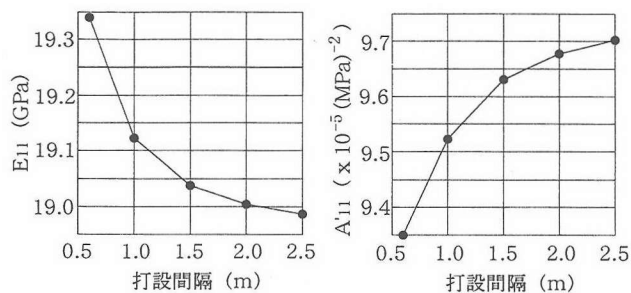


図-4 異なるロックボルト打設間隔に対する均質化弾性係数と破壊危険度関数の行列成分の変化

化弾性係数行列 $[E^H]$ と破壊危険度関数の行列 $[A']$ (いずれも 3×3 行列) の第(1,1)成分の変化の様子を示す。

図-4のようにして全ての成分の変化を調べ、それらを p を変数とする適当な次数の多項式で補間近似する。そうすれば弾性係数行列 $[E^H(p)]$ ならびに破壊危険度関数 $G(\Sigma, p)$ が打設間隔 p の関数として表現できる。

$$[E^H(p)] = \begin{bmatrix} E_{11}^H(p) & E_{12}^H(p) & E_{13}^H(p) \\ E_{22}^H(p) & E_{23}^H(p) & E_{33}^H(p) \\ \text{Sym.} & & \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$G(\Sigma, p) = \{\Sigma'\}^t [A'(p)] \{\Sigma'\},$$

$$[A'(p)] = \begin{bmatrix} A'_{11}(p) & A'_{12}(p) & A'_{13}(p) \\ A'_{22}(p) & A'_{23}(p) & A'_{33}(p) \\ \text{Sym.} & & \end{bmatrix} \quad (9)$$

こうして、ロックボルト打設間隔と岩盤の変形強度特性改善効果が定量的に関係づけられる。

3.2 岩盤の剛性の増大に注目した打設間隔の最適化

(1) 最適化問題定式化と有限要素法による離散化

ここでは Bense らの手法^{1),2),3)}に沿って、所与の外力に対する岩盤の剛性(変形抵抗)が最大になるようにロックボルト打設間隔を最適化する手法を示す。以下、設計変数である打設間隔 p は岩盤が占める空間領域上の連続関数 $p(x)$ として扱う。

一定の荷重に対する変形抵抗を最大にするということは、その荷重が成す仕事を最小にすることを意味する。

今、対象とする岩盤は打設間隔 $p(x)$ のロックボルトで補強されているとし、荷重によって岩盤に実現する変位ベクトルを u と表す。打設間隔 $p(x)$ が変われば岩盤の剛性が変わって u も変化する。この意味で u は p の関数(汎関数)であることに注意する。

この岩盤に対して外力がなす仕事は、

$$l(u) = \int_{\Omega} f_i u_i d\Omega + \int_{S_t} t_i u_i dS_t \quad (10)$$

である。ここに、 Ω は対象とする岩盤が占める空間領域、 f_i は重力である。また、 S_t は表面荷重ベクトル t_i が与えられる境界を表す。

一方、この岩盤全体のポテンシャルエネルギー $\Pi(u, p)$ は次式で表される。

$$\Pi(u, p) = \frac{1}{2} a(u, u, p) - l(u) \quad (11)$$

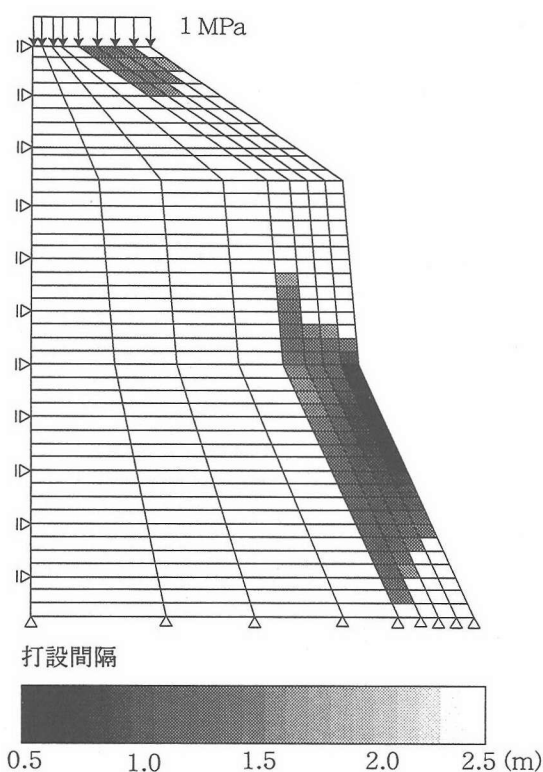


図-5 外力仕事を最小にするロックボルトの最適打設間隔

ここに、 $a(u, v, p)$ は変位ベクトルに関する双一次形式

$$a(u, v, p) = \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(v) E_{ijkl}^H(p) \varepsilon_{kl}(u) d\Omega \quad (12)$$

を表す。ここで仮想仕事式が任意の許容変位 v と、当然のことながら正解の変位 u について成立し

$$a(u, v, p) = l(v), \quad a(u, u, p) = l(u) \quad (13)$$

なので、

$$l(u) = -2\Pi(u, p) \quad (14)$$

なる関係が導かれる。

こうして、「剛性を最大にする（外力仕事 $l(u)$ を最小にする）問題」は「ポテンシャルエネルギー $\Pi(u, p)$ を最大にする問題」に置き換えられることが示される。このことを踏まえて、以下では $\Pi(u, p)$ の最大化問題として扱う。

この問題について以下のような制約条件を設定する。

- 1) 総工費など上位の条件からロックボルトの長さおよび使用本数の上限は決まっている。
- 2) 問題の単純化のため、ロックボルトは斜面勾配に関わらず水平に打設する。

上記の条件の 1) は問題を力学の範囲に限定するため、2) は本節冒頭に述べたように検証例題の単純化を意図している。

今、ロックボルトによって補強される斜面の表層領域を Ω_b と表す。制約条件 1) を設計変数 $p(x)$ を用いて記述するために、設計変数の逆数 $1/p(x)$ が厳密ではないが単位領域当たりの本数に対応する量になることを

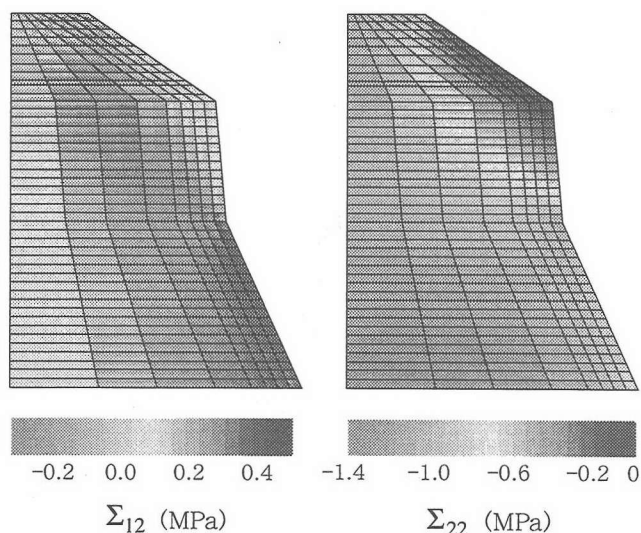


図-6 ロックボルト均等打設時の応力分布

利用する。すなわち、「使用本数が決まっている」ことを「領域 Ω_b に均等に打設する際の間隔 p_{av} が決まっている」と置き換えて次のような不等式で表現する。

$$\int_{\Omega_b} \frac{d\Omega}{p(x)} \leq \frac{\Omega_b}{p_{av}} \quad (15)$$

さらに、通常は打設間隔が 0.5～2.5mであることを考慮する。

こうして「岩盤の剛性を最大にするロックボルト打設間隔の最適化問題」は次のように定式化できる。

(問題-i) 岩盤の剛性を最大にするロックボルトの最適打設間隔の決定

目的関数 $\Pi(u, p) \xrightarrow{p(x)} \text{最大}$

制約条件 1) $a(u, v, p) = l(v), \forall v$

$$2) \int_{\Omega_b} \frac{d\Omega}{p(x)} \leq \Omega_b / p_{av}$$

$$3) 0.5 \leq p(x) \leq 2.5$$

以下の有限要素モデルによる解析では、初めにつり合い式を解いて解 u を求めるので、上記の制約条件 1) は常に満たされているとしてよい。したがって、この制約条件付き最大化問題の Lagrange 関数は次式とすればよい。

$$L(p) = \Pi(u, p) - \Lambda \left(\int_{\Omega_b} \frac{d\Omega}{p(x)} - \frac{\Omega_b}{p_{av}} \right) - \lambda_{\min}(0.5 - p) - \lambda_{\max}(p - 2.5) \quad (16)$$

そして、有限要素法によって離散化した KKT(Karush-Kuhn-Tacker) 条件は、式 (8), (11), (12) を参照して次

のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial p^k} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_b} \{\varepsilon\}^t \left[\frac{\partial E^H(p^k)}{\partial p^k} \right] \{\varepsilon\} d\Omega \\ &\quad + \Lambda \frac{\Omega_b^k}{(p^k)^2} + \lambda_{min}^k - \lambda_{max}^k \quad (17) \\ &= 0, \quad (k = 1, 2, \dots, N_b) \end{aligned}$$

$$\Lambda \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{N_b} \frac{\Omega_b^k}{p^k} - \frac{\Omega_b}{p_{av}} \leq 0, \quad \Lambda \left(\sum_{k=1}^{N_b} \frac{\Omega_b^k}{p^k} - \frac{\Omega_b}{p_{av}} \right) = 0 \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{min}^k &\geq 0, \quad 0.5 - p^k \leq 0, \quad \lambda_{min}^k (0.5 - p^k) = 0 \\ \lambda_{max}^k &\geq 0, \quad p^k - 2.5 \leq 0, \quad \lambda_{max}^k (p^k - 2.5) = 0 \quad (19) \\ &\quad (k = 1, 2, \dots, N_b) \end{aligned}$$

上式において N_b はロックボルト打設領域 Ω_b の要素数である。添字 k はそれが k 番目の要素の値であることを表す。 Λ , λ_{min} , λ_{max} はラグランジュ乗数であり、設計変数 p および λ_{min} , λ_{max} は要素ごとに異なる値 p^k , λ_{min}^k , λ_{max}^k ($k = 1, 2, \dots, N_b$) を取る。

この KKT 条件 (17)~(19) を満たす最適解の求解には、Bensøe ら^{1),2)} の最適性基準法 (optimality criteria method) を用いた。これは目的関数の一次微分のみを用いた指標を手掛かりにして設計変数を逐次更新する方法であり、目的関数の設計変数に関するヘッセ行列が求められないような場合に適した方法である。

(2) 解析例 (外力仕事最小化)

図-3 に示した岩盤斜面モデルに対する解析例を示す。ロックボルトの本数に関する制約条件については、式 (15) の均等打設間隔を $p_{av} = 1.50\text{m}$ に設定した。この均等間隔を各要素の p^k の初期値として与え、最適性基準法によって最適間隔を決定した。

図-5 に自重と岩盤斜面上部に $1(\text{MPa})$ の等分布荷重を加えたときの最適なロックボルト打設間隔分布を示す。色が濃いほど間隔を密にして打設することを表している。

図-6 にはロックボルトを均等に打設した初期状態でのせん断応力成分 Σ_{12} と鉛直方向成分 Σ_{22} の分布を示す。図-5 と見比べれば、せん断力や鉛直圧縮力が卓越した部分の打設間隔が密になっていることがわかる。図-7 には、初期状態からこの最適解が得られるまでの過程における目的関数値 (外力仕事量) の減少の様子を示す。

3.3 岩盤の強度増加に注目した打設間隔の最適化

ここでは、岩盤の強度を増加させて斜面の安全性を向上させるような打設間隔の最適化を考える。そのため式 (9) に定義した破壊危険度関数を用いた二通りの目的関数を提案し、それらを用いた打設間隔の最適化を検証する。

(1) 斜面全体の破壊危険度の最小化

ロックボルトによって補強する領域における破壊危険度の総和

$$z(u, p) = \int_{\Omega_b} G(\Sigma(u), p) d\Omega \quad (20)$$

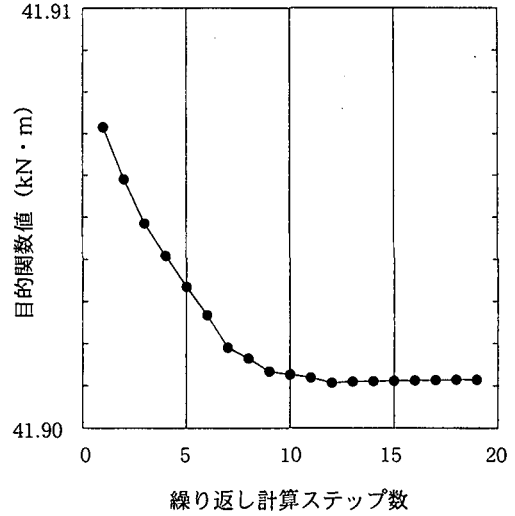


図-7 目的関数値 (外力がなす仕事量) の変化

を最小にすることを考える。仮に斜面のどこか一カ所の危険度が大きくても、対象領域での危険度の総和が小さければ良いという考え方であり、場合によっては工学的に容認できないような結果がえられることもあるかも知れない。

式 (20) の目的関数 $z(u, p)$ では、ロックボルトの打設によって岩盤の均質化弾性係数 $E_{ijkl}^H(p)$ が変化することを介して応力分布 Σ_{ij} も変化する。 Σ_{ij} は p の汎関数であることに注意する。

問題は以下のように定式化できる。

(問題-ii) 斜面の破壊危険度の総和を最小にするロックボルトの最適打設間隔の決定

$$\begin{aligned} \text{目的関数 } z(u, p) &\xrightarrow{p(x)} \text{最小} \\ \text{制約条件 1) } a(u, v, p) &= l(v), \quad \forall v \\ \text{2) } \int_{\Omega_b} d\Omega/p(x) &\leq \Omega_b/p_{av} \\ \text{3) } 0.5 \leq p(x) &\leq 2.5 \end{aligned}$$

この問題のラグランジュ関数は以下の通り。問題 (i) と同様の理由から制約条件 1) は考慮する必要がない。

$$\begin{aligned} L(p) &= z(u, p) - \Lambda \left(\int_{\Omega_b} \frac{d\Omega}{p(x)} - \frac{\Omega_b}{p_{av}} \right) \\ &\quad - \lambda_{min}(0.5 - p) - \lambda_{max}(p - 2.5) \end{aligned} \quad (21)$$

そして、有限要素法によって離散化した KKT 条件は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial p^k} &= \int_{\Omega_b} \frac{\partial G}{\partial p^k} d\Omega - \Lambda \frac{\Omega_b^k}{(p^k)^2} - \lambda_{min}^k + \lambda_{max}^k \quad (22) \\ &= 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N_b) \end{aligned}$$

$$\Lambda \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{N_b} \frac{\Omega_b^k}{p^k} - \frac{\Omega_b}{p_{av}} \leq 0, \quad \Lambda \left(\sum_{k=1}^{N_b} \frac{\Omega_b^k}{p^k} - \frac{\Omega_b}{p_{av}} \right) = 0 \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{min}^k &\geq 0, \quad 0.5 - p^k \leq 0, \quad \lambda_{min}^k (0.5 - p^k) = 0 \\ \lambda_{max}^k &\geq 0, \quad p^k - 2.5 \leq 0, \quad \lambda_{max}^k (p^k - 2.5) = 0 \quad (24) \\ &\quad (k = 1, 2, \dots, N_b) \end{aligned}$$

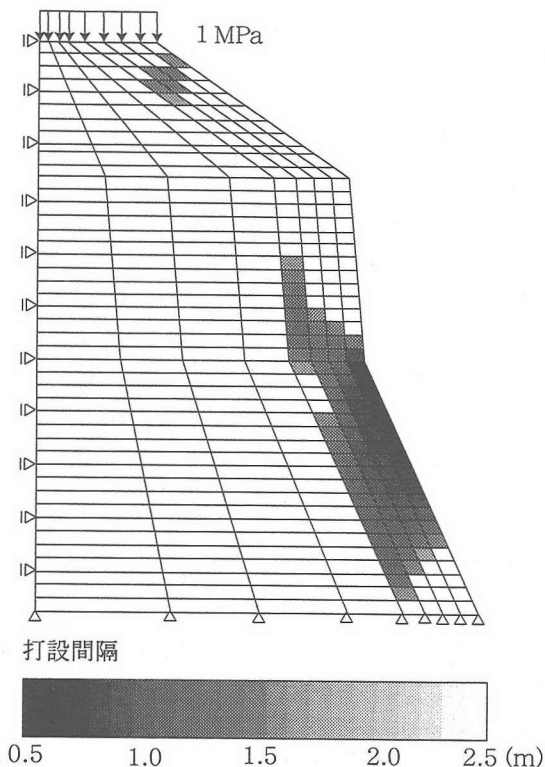


図-8 破壊危険度の総和を最小にするロックボルトの最適打設間隔

となる。式(22)の右辺第1項にある $\partial G / \partial p^k$ については、要素の応力ひずみ関係式が

$$\{\Sigma\} = [E^H] \{\varepsilon\} \quad (25)$$

であること、および式(9)を用いれば次のように展開できる。なお、以下では表記が煩雑にならないよう式(9)の応力 $\{\Sigma'\}$ を $\{\Sigma\}$ と表す。

$$\frac{\partial G}{\partial p^k} = \{\Sigma\}^T \left[\frac{\partial A'(p^k)}{\partial p^k} \right] \{\Sigma\} + 2 \left[A'(p^k) \right] \left[\frac{\partial E^H(p^k)}{\partial p^k} \right] \{\varepsilon\} \quad (26)$$

このKKT条件式を満たす最適解についても、式(17)～(19)と同様にして最適化基準法によって求めることができる。

問題(i)と同様、図-5と同じ外力を考える。また、制約条件式(15)の均等打設間隔も同様に $p_{av} = 1.50\text{m}$ に設定し、各要素の打設間隔 p^k の初期値としてKKT条件式(22)～(24)を満たす最適解を求めた。

得られた最適打設間隔の分布を図-8に示す。また、図-9には、初期状態(均等間隔)での各要素の破壊危険度の分布を示している。ただし、値は1万倍にして表示している。図中の黒い部分ほど危険度が高いことを表している。図-8と合わせると、確かに初期状態において危険度が高い部分にロックボルトを密に打設するような最適解が得られている。

図-5比べると下部の方に濃色が広がっているが、これは岩盤の破壊強度は一樣としている一方で、自重による応力が下部では高くなるので、結果的に斜面下部

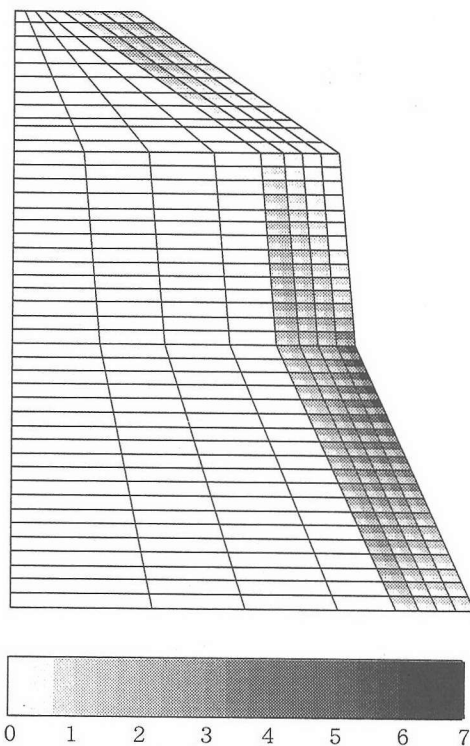


図-9 ロックボルト均等打設時の破壊危険度分布

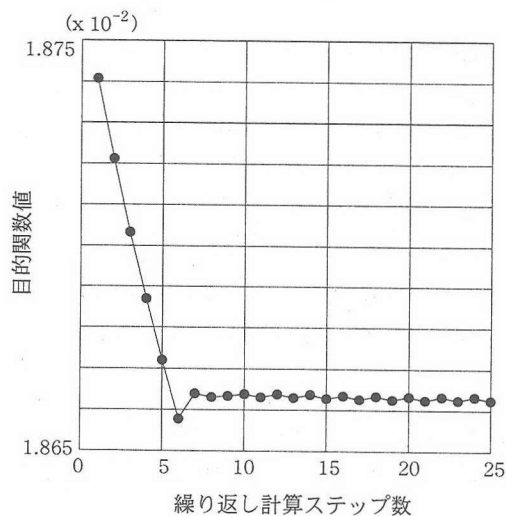


図-10 目的関数値(破壊危険度の総和)の変化

において破壊危険度が大きくなることによる。実際の設計にはそぐわない点である。

初期状態から最適解が得られるまでの目的関数 $z(u, p)$ の値の変化を図-10に示す。

(2) 破壊危険度分布の平滑化

前項の破壊危険度の総和を最小化する方法では、斜面下部にボルトが集まるような実際の設計とは異なる傾向の解が得られた。また、破壊危険度の総和には、局所的に高い応力を受けている箇所は大きく影響せず、結果的にそうした局所的な危険箇所には必ずしもロックボルトが集中しないことも考えられる。ところが、実

際の岩盤を考えると、そうした箇所を補強することも現実的な要請であろう。

そこで、破壊危険度関数の斜面領域上での分布曲面を出来るだけ平滑にすることを考える。斜面のある点に局所的に大きな応力が作用していれば、破壊危険度の分布曲面はその点で大きく凹凸を示す筈である。そのような凹凸をなくして分布が平滑になるようにロックボルトを配置することにすれば、上記の要請に応えられる可能性がある。

曲面の凹凸の程度は分布関数のラプラシアン $\nabla^2 G$ によって評価することができる。すなわち

$$w(u, p) = \int_{\Omega_b} [\nabla^2 G(\Sigma(u), p)]^2 d\Omega \quad (27)$$

を最小化すべき目的関数に選ぶ。問題は以下のように定式化できる。

(問題-iii) 破壊危険度分布を平滑にするロックボルトの最適打設間隔の決定

目的関数 $w(u, p) \xrightarrow{p(x)}$ 最小

制約条件 1) $a(u, v, p) = l(v), \forall v$

$$2) \int_{\Omega_b} d\Omega / p(x) \leq \Omega_b / p_{av}$$

$$3) 0.5 \leq p(x) \leq 2.5$$

この問題のラグランジュ関数は以下の通り。制約条件 1) は考慮する必要がないことはこれまでと同じ。

$$L(p) = w(u, p) - \Lambda \left(\int_{\Omega_b} \frac{d\Omega}{p(x)} - \frac{\Omega_b}{p_{av}} \right) - \lambda_{min}(0.5 - p) - \lambda_{max}(p - 2.5) \quad (28)$$

そして、有限要素法によって離散化した KKT 条件は以下のとおり。

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial p^k} &= 2 \int_{\Omega_b} \left[\nabla^2 G \cdot \nabla^2 \left(\frac{\partial G}{\partial p^k} \right) \right] d\Omega \\ &\quad - \Lambda \frac{\Omega_b^k}{(p^k)^2} - \lambda_{min}^k + \lambda_{max}^k \\ &= 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N_b) \end{aligned} \quad (29)$$

$$\Lambda \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{N_b} \frac{\Omega_b^k}{p^k} - \frac{\Omega_b}{p_{av}} \leq 0, \quad \Lambda \left(\sum_{k=1}^{N_b} \frac{\Omega_b^k}{p^k} - \frac{\Omega_b}{p_{av}} \right) = 0 \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{min}^k &\geq 0, \quad 0.5 - p^k \leq 0, \quad \lambda_{min}^k(0.5 - p^k) = 0 \\ \lambda_{max}^k &\geq 0, \quad p^k - 2.5 \leq 0, \quad \lambda_{max}^k(p^k - 2.5) = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

$$(k = 1, 2, \dots, N_b)$$

なお、式 (29) 右辺の積分にある $\partial G / \partial p^k$ は式 (26) の形に展開して扱う。

この KKT 条件式 (29)~(31) についても、問題 (i), (ii) と同様にして、均等打設間隔 $p_{av} = 1.50\text{m}$ を各要素の打設間隔 p^k の初期値として与え、最適化基準法によって最適解を求める。

その際、式 (29) において破壊危険度 G およびその偏微分 $\partial G / \partial p^k$ を空間の関数と見なしてラプラシアンを

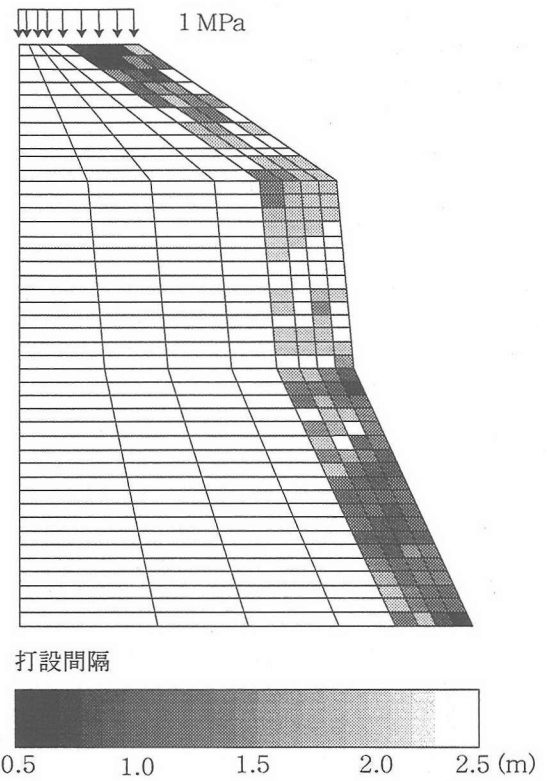


図-11 破壊危険度分布を平滑化するロックボルトの最適打設間隔

評価する必要がある。それには様々な方法が考えられるが、ここでは単に簡便さから、注目する点を中心にして一定半径の円を設定し、それに含まれる各要素のガウス点での G および $\partial G / \partial p^k$ の値を二次曲面で区分的に近似してその点のラプラシアンを評価することにした。

そのようにして得られた最適打設間隔の分布を図-11に示す。外力仕事最小化 (問題 (i)) や総破壊危険度最小化 (問題 (ii)) とは異なり、等分布荷重の直下および斜面形状がくびれた箇所など、破壊のきっかけとなりそうな箇所が局所的に色が濃くなっており、部分的に見れば望むような結果が得られたと言える。

しかし、全体的に見れば、濃淡が入り組んでおり解釈が難しい結果となっていることは否めない。この原因を探ったところ、 G と $\partial G / \partial p^k$ を独立に区分近似して評価したために、最適化基準法の繰り返し計算過程において、いくつかの要素で G と $\partial G / \partial p^k$ の増減傾向が矛盾する現象が起こってしまうことが判明した。局所的な危険箇所にロックボルトを集中させるためには、この点を改善するかまたは別の目的関数を考える必要がある。次の課題である。

4. おわりに

本論文では、均質化法に基づいたトポロジー最適化手法を応用してロックボルト打設間隔を最適化する方法を提案した。

ロックボルトの打設による岩盤の変形強度特性の改

善効果は、均質化法によって均質化弾性係数ならびに破壊危険度関数の変化として定量的に表すことができる。これを用いた3つの目的関数を設定して、岩盤斜面モデルを用いて、ロックボルトの使用量が限られているという制約条件の下での最適なロックボルトの打設間隔の評価を試みた。本論文の例題では、外荷重として等分布荷重（表面荷重）と自重（体積力）を考えたが、体積力として震度法に基づく水平方向地震力を与えた場合なども併せて考えれば、今にも落ちそうな不安定な岩塊の補強なども議論できると考えている。

均質化弾性係数を用いて外力による仕事量を目的関数として、その最小化を目指した場合、ひずみエネルギーが大きくなっている部分（要素）、すなわち大きなひずみが生じている部分にロックボルトが集中するという合理的な結果が結果が得られた。

しかし、実際には変形が問題となるよりは強度的な意味合いでの補強効果が望まれる。そこで、まず斜面補強領域における破壊危険度の総和を最小化することを考えた。その場合には、破壊危険度の高い箇所にロックボルトが集中するという合理的な結果を得た。しかし、自重によって応力が高くなる斜面下部にややもするとロックボルトが集中してしまうという非現実的な傾向が現れた。

さらに、総破壊危険度では局所的な危険箇所を見逃してしまう可能性があるため、破壊危険度分布を平滑にするという最適化を試みた。その結果、局所的に危険な箇所にロックボルトが配置されるという好ましい結果は得ることが出来たが、全体的には打設間隔を示す濃淡が入り組んだ分布図となり、提案法には改善の余地があることが示唆された。

目的関数値の改善の程度を示しているが、現段階では補強効果の大小と明確には結びついていない。他の補強工を用いた場合と比較する必要がある。

なお、本論文では打設間隔のみを設計変数としたが、打設間隔に加えて打設角度をも変えたユニットセルを多数準備して、同様のことを行えば打設角度をも含めた最適化が図れるであろう。それは本論文に続く発展型である。

本論文の問題設定では、ロックボルトの使用本数が予め制限されているとしたが、それは、ロックボルト

は長ければ長いほど、多ければ多いほど、岩盤の剛性や強度が増加することは明白であり、力学的効果のみに注目した目的関数ではこれらの量の最適化は極えないからである。それには、ロックボルトを使用する際の費用と斜面破壊による損失といったような、力学的視点を包含しつつ経済的視点に立った目的関数を設定する必要がある。今後の方向である。

参考文献

- 1) Bensøe, M. P., and Kikuchi, N. : Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, *Comp. Meths. Appl. Mechs. Engng.*, 71, pp.197–224, 1988.
- 2) Suzuki, K. and Kikuchi, N. : A homogenization method for shape and topology optimization, *Comp. Meths. Appl. Mechs. Engng.*, 93, pp.291–318, 1991.
- 3) Bensøe, M. P., Diaz, A. and Kikuchi, N. : Topology and generalized layout optimization of elastic structures, *Topology Design of Structures*, Kluwer Academic Pub., pp.159–205, 1993.
- 4) Yuge, K., Iwai, N. and Kikuchi, N. : Optimization of 2-D structures subjected to nonlinear deformations using the homogenization method, *Structural Optimization*, 17, pp.286–299, 1999.
- 5) Min, S. and Kikuchi, N. : Optimal topology design of structures under dynamic loads, *Structural Optimization*, 17, pp.208–218, 1999.
- 6) Hassini, B. and Hinton, E. : A review of homogenization and topology optimization I to III, *Computers and Structures*, 69, pp.707–756, 1998.
- 7) 京谷孝史, 欧陽立珠, 寺田賢二郎 : 岩石の力学特性と不連続面画像情報による岩盤の変形強度特性評価, 土木学会論文集, 第 631 号/III-48, pp.131–150, 1999.
- 8) Kyoya, T. and Kawamoto, T. : Quantitative evaluation of effect of pattern bolting by the homogenization method, *Procs. Int. Symp. Assessment & Prevention of Failure Phenomena in Rock Engineering*, A.A.Blkema. pp.641–646, 1993.

(2003 年 4 月 18 日 受付)