

各種メッシュ制御における動的陽解法

An Explicit Dynamic Method in Various Mesh Controls

岡澤重信*・河口篤志**・藤久保昌彦***

Shigenobu OKAZAWA, Atsushi KAWAGUCHI and Masahiko FUJIKUBO

*正会員 博(工) 広島大学助教授 大学院工学研究科 社会環境システム専攻 (〒 739-8527 広島県東広島市鏡山 1-4-1)

**豊田中央研究所 (〒 480-1131 愛知県愛知郡長久手町大字長湫字横道 41-3)

***正会員 工博 広島大学教授 大学院工学研究科 社会環境システム専攻 (〒 739-8527 広島県東広島市鏡山 1-4-1)

An explicit dynamic method has recently been used in finite element structural and solid analyses especially for industry. Very little literature on the explicit dynamic method, however, exists. In addition, treatment of an arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE) and Eulerian mesh controls for the explicit dynamic method is different from a case of a implicit method. This paper describes the explicit dynamic method in various mesh controls.

Key Words : explicit dynamic method, mesh control, finite element method

1. 緒言

構造及び固体解析のための数値シミュレーション技術として有限要素法はもはや常套手段となっており、現在では数多くの書籍が出版されている¹⁾。さらに計算機ハードウェアの急速な進歩の後押しもあって、線形問題としての微小変形解析のみならず、非線形問題としての大変形解析に関しても有限要素解析は実用レベルに達し、産業界へも着実に浸透している。

非線形有限要素法のための基礎理論は、米国のカリフォルニア大学バークレー校のグループを中心にして確立されたと言っても過言ではない。バークレーのグループによる理論における解析手法は、静的・動的問題を問わずにそのほとんどが陰解法であり、その成果として陰解法に主眼をおいた書籍も多数出版されている²⁾³⁾⁴⁾。そして現在でも学術的な研究機関においては、Newton-Raphson 法による反復計算を要する陰解法が好まれる傾向にある。それに対して、陽解法は兵器解析などの軍事目的のために冷戦時代に米国でその産声をあげた。間もなく接線剛性マトリクスを必要としない動的陽解法の理論が確立されたが、安全保障上の制約からその詳細がすぐに世間に公表されることはなかった。

以上のように、非線形有限要素解析における陰解法と陽解法とで、それぞれが確立された背景は違う。最近では、動的陽解法の需要は特に実務現場において大きくなっているにもかかわらず、その詳細について書かれた文献は国内外を問わず極めて少ないのが現状である。

また、構造及び固体解析においては、計算メッシュが物質の変形と共に移動する Lagrange 表記での有限要素法が一般に採用されてきた。Lagrange 表記を採用することによって、弾塑性材料に代表されるような経路依存

性を容易に扱うことができ、境界面を明確にさせるという要請にも応えることができる。しかし、Lagrange 表記の解析には以下の 2 つの問題点がある。1 つは、物体の変形が極めて大きくなると計算メッシュの健全性が損なわれて計算不能となること。もう 1 つは、新たな自由境界面が生成する破断などを再現するためには、2 重節点を用いる必要があるため計算コードが煩雑になることである。このような問題点を解決するために、計算メッシュを任意に制御する Arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE) 表記さらには計算メッシュを空間に固定する Euler 表記での解析が適用される場合もある。ただし、動的陽解法における ALE 又は Euler 表記での計算手法としては陰解法における手法とは異なるものが必要になる。

本研究では、Lagrange, Euler そして ALE 表記での各種メッシュ制御における動的陽解法について述べる。さらに動的陽解法における時間増分制御の物理的意味についても考察する。そして、ここで述べる各種メッシュ制御による動的陽解法を例題計算に適用する。

2. operator split 法によるメッシュ制御

まず、構造及び固体解析で一般的に用いられる Lagrange 表記での支配方程式を考える。Lagrange 表記における有限要素解析では、図-1 に示すように計算メッシュが物質と共に移動する。Lagrange 表記での支配方程式は一般的に次のように表現できる。

$$\phi = f \quad (1)$$

ここで、 ϕ は任意の関数、 f は外力項である。上付きの $\cdot$ は物質時間導関数であり、それぞれの物質点の任意変数 ϕ が時間と共に変化する速度を意味している。

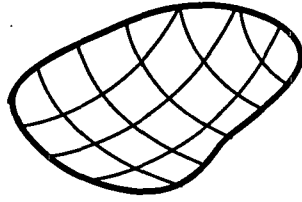


図-1 Lagrange 表記

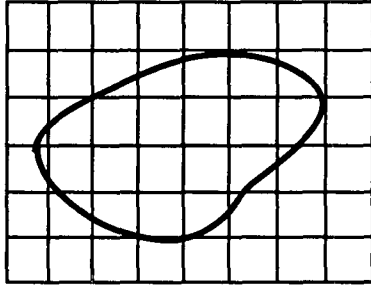


図-2 Euler 表記

それに対して、図-2のような計算メッシュが空間に固定された Euler 表記での有限要素解析は、空間に固定された点における任意変数の変化速度を意味する空間時間導関数によって表現される。式(1)で用いられている物質時間導関数と空間時間導関数 $\partial/\partial t$ の関係は以下のような⁵⁾。

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \quad (2)$$

$\mathbf{x}$, $\mathbf{v}$ はそれぞれ物質点の位置ベクトル及び速度ベクトルである。また右边第2項は移流項と呼ばれる。

式(1)(2)より、Euler 表記での支配方程式は以下ようになる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} = f \quad (3)$$

まず、Euler 表記での支配方程式(3)を解く事を考える。解法としては operator split 法⁶⁾を採用する。operator split 法では、式(3)を以下の2つに分離する。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = f \quad (4)$$

$$\frac{\partial^* \phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} = 0 \quad (5)$$

式(4)は時間を進める Lagrange ステップであり、式(5)は時間を止めた Euler ステップである。Euler ステップでは時間を止めているという解釈であるので、式(5)中の ϕ の空間時間導関数である左辺第1項は厳密には存在しないが、静的な極いの擬似的な空間時間導関数として*を付けて記してある。

図-3は operator split 法の概念を図示したものである。まず式(4)に対応した時間を進める Lagrange ス

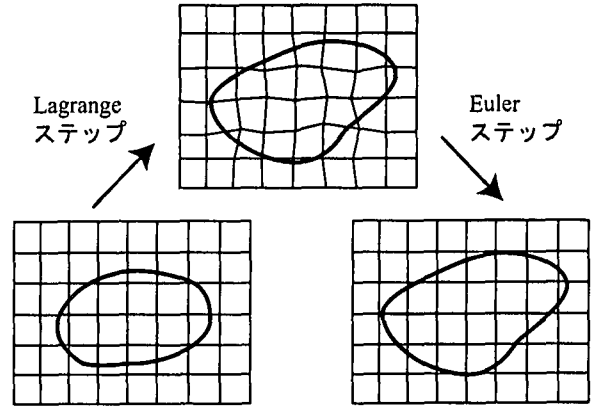


図-3 operator split 法

テップにおいて、物質の変形と共に計算メッシュが歪む。式(4)を一般的な Lagrange 表記での支配方程式(1)と比べると時間導関数の種類が違うが、Euler 表記では計算格子が固定されているので、この時間導関数の種類の差異は無視できる。次に式(5)に対応した時間を止めた Euler ステップにおいて、移流方程式を解くことにより歪んだ計算メッシュを空間に固定された元の位置に引き戻す操作を行う。このような操作をそれぞれの時間ステップでくり返しながらか算を進めていくことにより、計算メッシュを固定した Euler 表記での解法が可能となる。

次に、上記で述べた Euler 表記における operator split 法を、ALE 表記でのメッシュ制御に拡張することを考える。Euler ステップにおいて、Euler 表記のメッシュ制御では歪んだ計算メッシュを固定されたメッシュに戻す操作を行った。ALE 表記では、引き戻し先として任意の座標系を選択すればよい。その場合には、式(5)の移流方程式で扱う物質点の速度 $\mathbf{v}$ を、任意に制御する計算メッシュの移動速度との差として扱うことになる。

具体的には、まず以下のように制御する計算メッシュの移動速度 $\hat{\mathbf{v}}$ を求める。

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{x}^{n+1} - \mathbf{x}^n}{\Delta t} \quad (6)$$

ここで $\mathbf{x}^n$ はすでに解析済みの既知の計算メッシュの座標、 $\mathbf{x}^{n+1}$ は時間増分 Δt 後の次に制御すべき計算メッシュの座標である。そして、式(5)での速度 $\mathbf{v}$ を、

$$\mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}} \quad (7)$$

と変換するだけで、Euler 表記のメッシュ制御における解析方法と全く同じ方法で、ALE 表記での解析が可能となる。

以上のように、Lagrange 表記のメッシュ制御に対して移流方程式を解くといった操作を加えるだけで、Euler 及び ALE 表記でのメッシュ制御における解析が可能となる。

3. 動的陽解法

前節の operator split 法における Lagrange ステップにおいて動的陽解法を用いる。動的陽解法の時間積分で一般に用いられる中央差分法⁷⁾を示した後、それに対応した応力積分法について述べる。

3.1 中央差分法

仮想仕事式を解析領域全体で離散化した以下のような平衡方程式を考える。

$$M\mathbf{a} + \mathbf{F}_{int} = \mathbf{F}_{ext} \quad (8)$$

ここで、 $\mathbf{a}$ は加速度ベクトルであり、速度ベクトル $\mathbf{v}$ の物質時間導関数である。また $\mathbf{F}_{int}$ と $\mathbf{F}_{ext}$ は、それぞれ内力及び外力ベクトルである。 M に関しては、対角化された集中質量マトリクスを用いることによって連立方程式の解法が不要となる。

今、時刻 t^n での力学挙動が既知であるとして、 Δt 後の時刻 t^{n+1} での力学挙動を求めることを考える。一般的な関数 ϕ に対してテイラー展開を行う。ただし、時刻 t^n と時刻 t^{n+1} の中間時刻を時刻 $t^{n+\frac{1}{2}}$ とする。

$$\phi^n = \phi^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\partial \phi^{n+\frac{1}{2}}}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \Delta t \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi^{n+\frac{1}{2}}}{\partial t^2} \left(\frac{1}{2} \Delta t \right)^2 - \dots \quad (9)$$

$$\phi^{n+1} = \phi^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\partial \phi^{n+\frac{1}{2}}}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \Delta t \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi^{n+\frac{1}{2}}}{\partial t^2} \left(\frac{1}{2} \Delta t \right)^2 + \dots \quad (10)$$

Δt^2 のオーダーの項まで考慮して、式 (10) から式 (9) を引くと以下ようになる。

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \frac{\partial \phi^{n+\frac{1}{2}}}{\partial t} (\Delta t) \quad (11)$$

式 (11) は中央差分法といわれる手法であり、これを適用すると時刻 t^{n+1} における位置ベクトル $\mathbf{x}^{n+1}$ は、時刻 $t^{n+\frac{1}{2}}$ での速度ベクトル $\mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}$ により、次のように評価できる。

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t \quad (12)$$

また、時刻 $t^{n+\frac{1}{2}}$ の速度ベクトル $\mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}$ は、時刻 t^n での加速度ベクトル $\mathbf{a}^n$ を用いて次のようになる。

$$\mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{v}^{n-\frac{1}{2}} + \mathbf{a}^n \Delta t \quad (13)$$

ここで、時刻 t^n での加速度ベクトル $\mathbf{a}^n$ は、式 (8) から求められる。

$$\mathbf{a}^n = M^{-1}(\mathbf{F}_{ext}^n - \mathbf{F}_{int}^n) \quad (14)$$

一般的な中央差分法の流れを表-1 に示す。

3.2 応力積分

動的陽解法による非線形有限要素解析で扱うような問題は、大変位のみならず、大ひずみも含んだ有限変

形問題がほとんどである。有限変形問題を扱うためには、有限要素解析の中で用いる構成方程式が客観性のあるものでなければならない。

Cauchy 応力速度テンソル $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ と微小ひずみ速度テンソル $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ を関連付ける 4 階の弾塑性構成テンソル $\mathbf{C}^{ep}$ を用いた場合の微小変形問題における構成関係

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^{ep} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (15)$$

において、微小ひずみテンソル速度 $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ は客観性のあるストレッチングテンソル $\mathbf{D}$ に、Cauchy 応力テンソル速度 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ は客観応力速度に置き換えられるものとする。客観応力速度については、回転が著しい問題では Green-Naghdi 速度が用いられることもあるが、その取り扱いが容易である Jaumann 速度 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^J$ が用いられることが圧倒的に多い。その場合の有限変形状態での構成方程式は以下ようになる。

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^J = \mathbf{C}^{ep} : \mathbf{D} \quad (16)$$

ストレッチングテンソル $\mathbf{D}$ は物質点の座標の関数であり、物質点と共に移動する観測者から見たひずみテンソル速度の定義に一致する。Cauchy 応力の Jaumann 速度 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^J$ に関しても移動する観測者から見た応力速度という意味合いを持つ。つまり有限変形問題においては、応力速度、ひずみ速度を両方とも客観性のあるものに置き換え、どれだけ物質がゆがんだとしても微小変形状態での弾塑性理論が成立すると考える。よって構成テンソル $\mathbf{C}^{ep}$ は微小変形理論におけるものと同一である。

ストレッチングテンソル $\mathbf{D}$ は、速度勾配テンソル $\mathbf{L}$ を加算分解した対称部分として求められる。

$$\mathbf{L} = \mathbf{v} \otimes \nabla_x \quad (17)$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \quad (18)$$

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \quad (19)$$

また、 $\mathbf{W}$ はスピンテンソルであり、このスピンテンソルを用いて、Cauchy 応力速度テンソル $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ と Cauchy 応力の Jaumann 速度 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^J$ が以下のように関係づけられる。

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^J = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W} \quad (20)$$

有限要素解析コードで必要とされる応力は Cauchy 応力である。しかし、有限変形問題のための構成方程式 (16) をそのまま積分しても Cauchy 応力とはならない。よって式 (20) の関係を用いて Cauchy 応力を積分する必要がある。以下に half-step rotation と呼ばれる応力積分法の流れを示す。

まず時刻 $t^{n+\frac{1}{2}}$ でのストレッチングテンソル $\mathbf{D}^{n+\frac{1}{2}}$ 及びスピンテンソル $\mathbf{W}^{n+\frac{1}{2}}$ を求める。

$$\mathbf{D}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\mathbf{L}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{L}^{n+\frac{1}{2}T}) \quad (21)$$

表-1 中央差分法の流れ

1. 式 (14) より, 時刻 t^n での加速度ベクトル a^n を求める
2. 式 (13) より, 時刻 $t^{n+\frac{1}{2}}$ での速度ベクトル $v^{n+\frac{1}{2}}$ を求める
3. 式 (12) より, 時刻 t^{n+1} での位置ベクトル x^{n+1} を求める
4. 時刻 t^n から t^{n+1} までの応力積分を行い, 時刻 t^{n+1} での応力を求める (3.2 節参照)

$$W^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(L^{n+\frac{1}{2}} - L^{n+\frac{1}{2}T}) \quad (22)$$

ここで,

$$L^{n+\frac{1}{2}} = v^{n+\frac{1}{2}} \otimes \nabla_{x^{n+\frac{1}{2}}} \quad (23)$$

$$x^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x^n + x^{n+1}) \quad (24)$$

次に, 時刻 $t^{n+\frac{1}{2}}$ での Cauchy 応力テンソルを以下のよう
に評価する.

$$\sigma^{n+\frac{1}{2}} = \sigma^n + \frac{1}{2}\Delta t W^{n+\frac{1}{2}} \cdot \sigma^n - \frac{1}{2}\Delta t \sigma^n \cdot W^{n+\frac{1}{2}} \quad (25)$$

そして, 時刻 $t^{n+\frac{1}{2}}$ での Cauchy 応力の Jaumann 速度
を求める.

$$\dot{\sigma}^J(n+\frac{1}{2}) = C^{ep}(n+\frac{1}{2}) : D^{n+\frac{1}{2}} \quad (26)$$

中間 Cauchy 応力テンソル σ^* を求める.

$$\sigma^* = \sigma^{n+\frac{1}{2}} + \dot{\sigma}^J(n+\frac{1}{2})\Delta t \quad (27)$$

時刻 t^{n+1} での Cauchy 応力テンソルを計算する.

$$\sigma^{n+1} = \sigma^* + \frac{1}{2}\Delta t W^{n+\frac{1}{2}} \cdot \sigma^* - \frac{1}{2}\Delta t \sigma^* \cdot W^{n+\frac{1}{2}} \quad (28)$$

このように, half-step rotation を用いることによ
って, 中央差分法と同様な 2 次のオーダーでの陽的な応
力積分が可能となる.

3.3 長所と短所

動的陽解法の長所と短所を以下にまとめる.

(1) 長所

- **ロバスト性** 動的陽解法では反復計算が不要である
ため, Newton-Raphson 法による反復計算を用いた
陰解法 (静的問題の弧長法や動的問題の Newmark-
 β 法など) でありがちな, 計算途中で収束が得ら
れずに解析が停止するブレイクダウンの頻度が少
ない.
- **計算手法の簡便性** 計算手法が非常に簡便である.
例えば, 陰解法において健全な収束を得るための
接線剛性マトリクスの導出に際しては, 非常に煩
雑な理論展開が必要となるが, 動的陽解法ではそ
の接線剛性マトリクスが不要である.

- **計算機メモリの節約** 接線剛性マトリクスが不要
であるために, 解析で必要とされるメモリが陰解
法に比べて少ない.
- **並列処理との相性の良さ** 解析の並列処理を考
えた場合, 内力及び外力ベクトルのみを分割すべ
ばよいので, 並列処理の実行が容易である.

(2) 短所

- **時間増分制限** 動的陽解法で安定した解を得るた
めには, 時間増分をある値以下にしなくてはなら
ない (5 章参照). そのために膨大な計算ステップ
が必要になる.
しかしながら, 最近では様々な力学的要因を非
線形有限要素解析に取り入れる必要があり, その
計算においては例えば陰解法でさえも必然的に小さ
な時間増分が要求される. よって動的陽解法にお
ける最大の短所であると思われる小さな時間増分
の必要性は, 現在の非線形有限要素解析において
決定的な短所とはならないと考えられる.
- **力学情報の喪失** 接線剛性マトリクスは計算対象
とする力学挙動の数多くの情報を持っており, 座
屈などの不安定解析や感度解析等において頻繁に
用いられる. 接線剛性マトリクスを用いない動的
陽解法では, その情報は喪失する.

4. 移流方程式の解法

先でも述べたように operator split 法における Euler
ステップは, 移流方程式を解くことに帰着される. こ
こでは移流方程式の解法として有限差分法を適用する.
移流方程式を解くための様々な有限差分法⁷⁾⁸⁾が提案さ
れているが, どの手法も operator split 法に適用でき
る. ただ, 構造及び固体解析で移流を扱う際には, 応
力や構成方程式パラメーターなど経路依存性のある諸
量すべてを移流させる必要がある. 本研究では最も単
純な 1 次の風上差分法を採用する. まず要素内の積分
点における諸量を移流させた後, スタガードメッシュ
を用いて節点の速度を質量を乗じた運動量として移流
させる⁷⁾.

また Euler 表記および解析対象の境界に計算メッシュ
を適合させない ALE 表記においては, 計算メッシュ内
に空隙が存在し得る. そこで要素内の物質の含有率を

0 から 1 で設定した密度関数を移流させる Vofule of Fluid (VOF) 法によって要素内の境界面を追跡する⁹⁾。さらに、この密度関数を用いることによって、空隙を有する計算メッシュの応力の評価も可能となる¹⁰⁾。

5. 時間増分制御

動的陽解法を安定に実行するためには、時間増分はある限界を超えてはならないとされている。その限界 Δt_{lcr} は以下のものであり Courant 条件と呼ばれる。

$$\Delta t_{lcr} = \frac{L_{min}}{c} \quad (29)$$

ここで、 L_{min} は解析対象を構成する要素の中で最も小さな節点間距離である。また、 c は構造物の中を伝播する応力波の速度であり、1 次元の伝播を考えると c は次式で与えられる。

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (30)$$

なお、 E はヤング率、 ρ は密度である。

ここでは動的陽解法での時間増分制御において課せられる Courant 条件の物理的意味を考察する。今、図-4 のような片持ち梁の縦振動の問題を考える。ここで集中質量の慣性力と断面に生じる力のつり合いより固有周期 T を導く。

$$\frac{m}{2} \ddot{x} = -\frac{x}{l/2} EA \quad (31)$$

ここで、 A は梁の断面積、 l は 1 要素の長さ、 m は集中質量である。式 (31) から式 (32) のような微分方程式を得る。

$$\ddot{x} + \frac{4EA}{ml} x = 0 \quad (32)$$

ここで、 $x = X e^{i\omega t}$ と仮定して微分方程式を解く。

$$-\omega^2 X + \frac{4EA}{ml} X = 0 \quad (33)$$

式 (33) を固有円振動数 ω について解くと、その ω から固有周期が以下のように求まる。ただし、ここでは密度 ρ を用いて集中質量 m を $\rho A l$ としている。

$$\omega = \frac{2}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (34)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi l}{\sqrt{E/\rho}} = \frac{\pi l}{c} \quad (35)$$

よって、最も短い周期の振動は最小の要素 l_{min} で発生し、系全体としての最高次固有周期 T_{min} は次のようになる。

$$T_{min} = \frac{\pi l_{min}}{c} \quad (36)$$

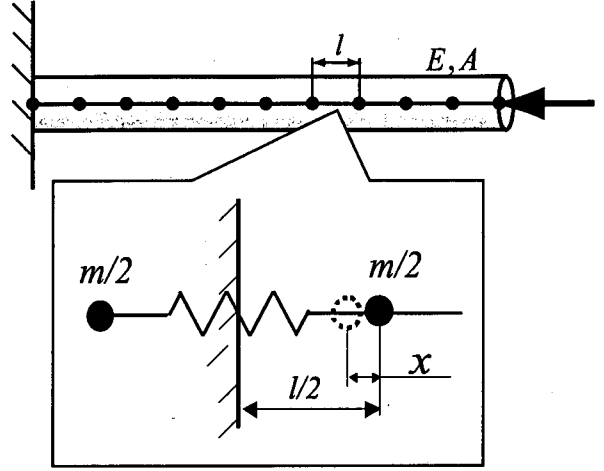


図-4 片持ち梁の縦振動

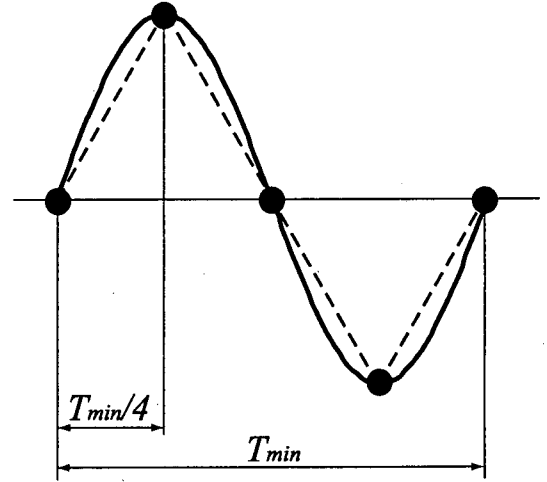


図-5 最高次固有周期を再現するために必要となる時間増分

図-5 は T_{min} の 1 周期を示している。この 1 周期の挙動を再現するためには、少なくとも図-5 に示すような周期を 4 つ以上に分割する時間増分が必要である。この場合の時間増分の限界値は最高次固有周期の 1/4 である。この限界値は式 (29) の Courant 条件と比べて僅かに小さな値となるが、ほぼ一致していることがわかる。

$$\frac{T_{min}}{4} = \frac{\pi l_{min}}{4c} \approx \Delta t_{lcr} \quad (37)$$

以上が、operator split 法の Lagrange ステップでの動的陽解法の時間増分制御である。さらに、Euler ステップで移流方程式を解く際の時間増分にも制限が課せられる。Euler ステップでは、時間増分中に物質の移動距離が L_{min} を超えてはならない。よって物質の 1 次元的速度を v として、ここでの時間増分限界 Δt_{lcr}

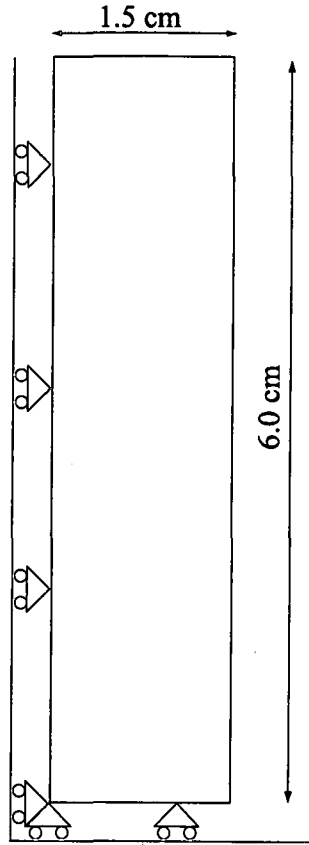


図-6 衝撃解析モデル

は以下ようになる。

$$\Delta t_{ecr} = \frac{L_{min}}{|v|} \quad (38)$$

ゆえに、operator split 法による解析全体の時間増分 Δt においては、Lagrange ステップの Courant 条件式 (29) と Euler ステップでの移流方程式を解く際の時間増分制限 (38) を同時に満足するために、

$$\Delta t < \frac{L_{min}}{\max(c + |v|)} \quad (39)$$

となる条件を課すことになる。

6. 例題

これまで述べた各種メッシュ制御での動的陽解法を、3つの例題計算に適用する。有限要素として選択型低減積分による平面ひずみ要素を用いる。

6.1 衝撃解析

最初の例題は、ベンチマークモデルとして有名な弾塑性材料の衝撃解析である。図-6は解析モデルである。Lagrange 及び Euler 座標系でのメッシュ制御により解析を行う。材料モデルはバイリニア硬化型の J_2 流れ則

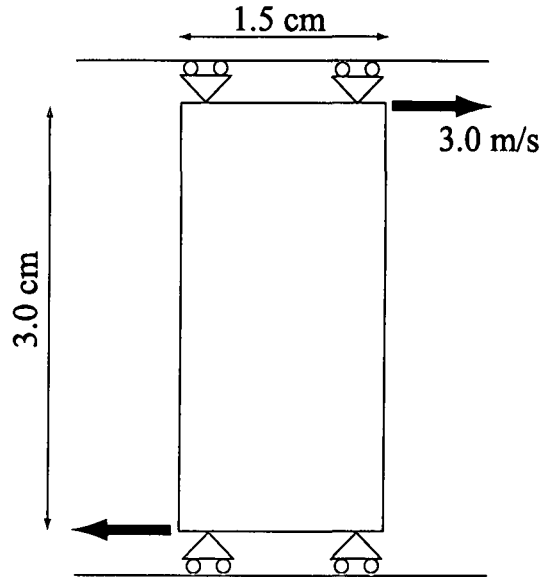


図-7 せん断解析モデル

を使用し、ヤング率は 21.8 GPa, ポアソン比 0.28, 塑性係数としては 0.10 GPa, 降伏応力は 0.02 GPa, そして密度は 1710 kg/m^3 である。初速度として、300m/s を与える。

図-9 は Lagrange 座標系における解析結果、そして図-10 は Euler 座標系における解析結果である。白い実線は有限要素つまり計算メッシュを示し、赤色の部分は材料である。Lagrange 表記では材料と共に計算メッシュが変形し、Euler 表記では固定された計算メッシュを越えて材料が移動する。また、図-9 及び図-10 のそれぞれの右側の図は相当塑性ひずみ分布を示している。両メッシュ制御において、相当塑性ひずみ分布に多少の差異はあるが、ほぼ等しい解析結果が確認できる。

6.2 せん断解析

前の衝撃解析においては、計算メッシュの回転の影響はほとんど存在しなかった。そこで次の例題として、図-7 のような回転の影響が大きいせん断解析を選んだ。材料モデルは先ほどの衝撃解析で用いたものと同じである。ここでも Lagrange 及び Euler 座標系でのメッシュ制御を用いる。上下端部のせん断方向に速度 3m/s を作用させる。

図-11 は、 $200\mu\text{s}$ 後の Lagrange 及び Euler 座標系における解析結果である。Lagrange 及び Euler 表記において整合性のある解析結果を得ることができる。

6.3 くびれ解析

最後はくびれ解析である。図-8に解析モデルを示す。材料として、バイリニア硬化型の J_2 流れ則を使用する。ヤング率は 211 GPa, ポアソン比 0.30, 塑性係数

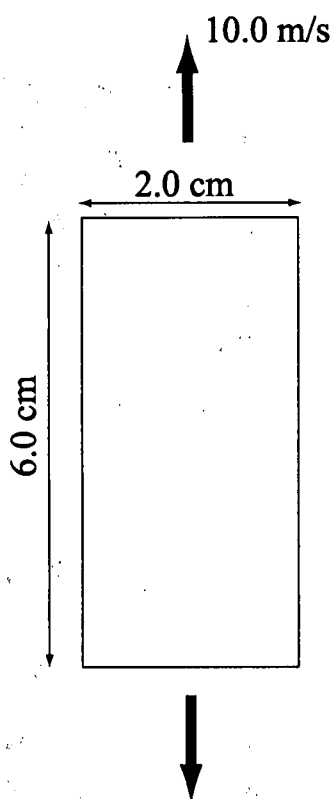


図-8 くびれ解析モデル

としては2.11 GPa, 降伏応力は0.20 GPa, 密度は7800 kg/m³である。端部に10m/sの速度を与え, 境界条件として材料両端部を固定とした。

本解析では, 物体の上下端の外向き法線方向に速度を与えているため, 材料が変形と共に速度方向に伸びる。よって Euler 座標系で解析を行った場合には, その材料がメッシュを越えて不都合が生じる。そこで, 上下端部を速度と共に移動させ, メッシュ数が増えたり減ったりしないようにそれぞれの方向に等間隔な新たにメッシュを作り直す。つまり Lagrange 座標系でも Euler 座標系でもない任意の座標系を新たに設定する ALE 法を採用している。図-12 に解析結果を示す。ALE 座標系の移動と共に拡散くびれの発生を確認できる。

7. 結言

本研究では, まずこれまでその詳細について明らかにされることの少なかった動的陽解法について述べた。動的陽解法は本来, 構造及び固体解析のための解析手法であるため, 通常は Lagrange 表記のメッシュ制御が用いられる。その Lagrange 表記での動的陽解法に, 移流方程式を解くといった操作を加えることによって Euler さらには ALE 表記のメッシュ制御での解析が可能となることを示した。ここで示したメッシュ制御方

法は, 既存の解析コードに容易に組み込むことができるといった点で有用であると考えられる。また, 時間増分制御の物理的意味についての考察も本研究における新たな知見である。

周知の通り動的陽解法は極めて時間スケールの短い現象の解析に向いているものの, 時間スケールの長い問題に対しては時間増分の制約から計算効率が悪い。時間スケールの長い問題や静的問題に対しては時間増分の制約の無い陰解法の適用が必要であり, ここで述べたメッシュ制御方法を陰解法に拡張することが課題となる。

また本研究の例題計算においては2次元ソリッド要素だけを扱っているが, 特に Euler メッシュ制御で3次元ソリッド要素やシェル要素などの構造要素を用いた場合には膨大な計算量になることは容易に想像がつく。このような膨大な計算を扱うためには並列処理等の導入が不可欠である。

謝辞: 本研究は文部科学省科学研究費補助金(若手研究 B: 15760605)の援助を受けた。また著者が所属している研究室の諸氏からの多大な協力を得た。特に, 5 節に関しては浅津聡一氏・廣居真也氏¹¹⁾に, また 3.2 節, 6.2 節は高浦弘志氏・高野真弘氏¹²⁾(現タカラスタンダード)に負う所が大きい。ここに記して謝意を表します。

参考文献

- 1) <http://ohio.ikp.liu.se/fe/index.html>
- 2) Bathe, K.J.: *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, 1996.
- 3) Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L.: *The Finite Element Method, 5th edition, Vol 1: The Basis, Vol 2: Solid Mechanics, Vol 3: Fluid Dynamics*, Butterworth-Heinemann, 2000.
- 4) 久田俊明, 野口裕久: 非線形有限要素法の基礎と応用, 丸善, 1995.
- 5) 久田俊明: 非線形有限要素法のためにテンソル解析の基礎, 丸善, 1992.
- 6) Chorin, A.J.: Flame advection and propagation algorithms, *J. Comput. Phys.*, 35, pp.1-31, 1980.
- 7) Benson, D.J.: Computational methods in Lagrangian and Eulerian hydrocodes, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 99, pp.235-394, 1992.
- 8) 藤井孝蔵: 流体力学の数値計算法, 東京大学出版会, 1994.
- 9) Benson, D.J.: Volume of fluid interface reconstruction methods for multi-material problems, *Appl. Mech. Rev.*, ASME, 55, pp.151-165, 2002.
- 10) Benson, D.J.: A mixture theory for contact in multi-material Eulerian formulations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 140, pp.59-86, 1997.
- 11) 浅津聡一, 廣居真也: 理想化構造要素法への動的陽解法の適用に関する研究, 平成 14 年度広島大学工学部卒業論文, 2003.
- 12) 高浦弘志, 高野真弘: 各種客観応力速度を用いた大変形有限要素解析に関する研究, 平成 14 年度広島大学工学部卒業論文, 2003.

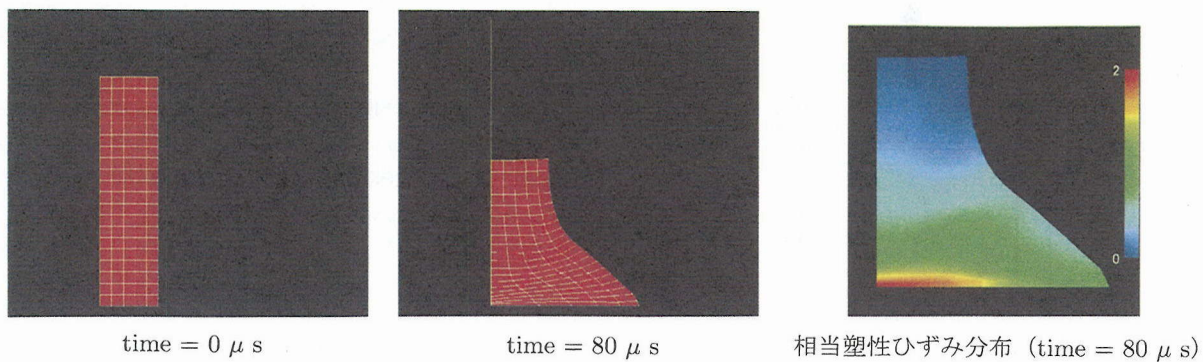


図-9 Lagrange メッシュ制御での衝撃解析結果

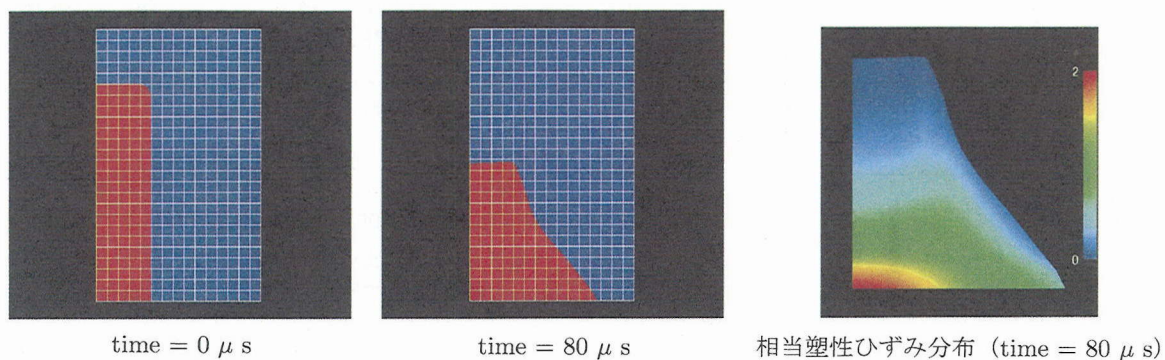


図-10 Euler メッシュ制御での衝撃解析結果

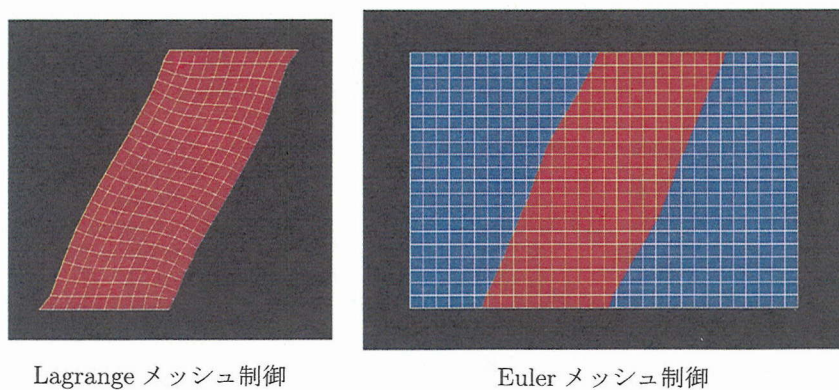


図-11 せん断解析結果

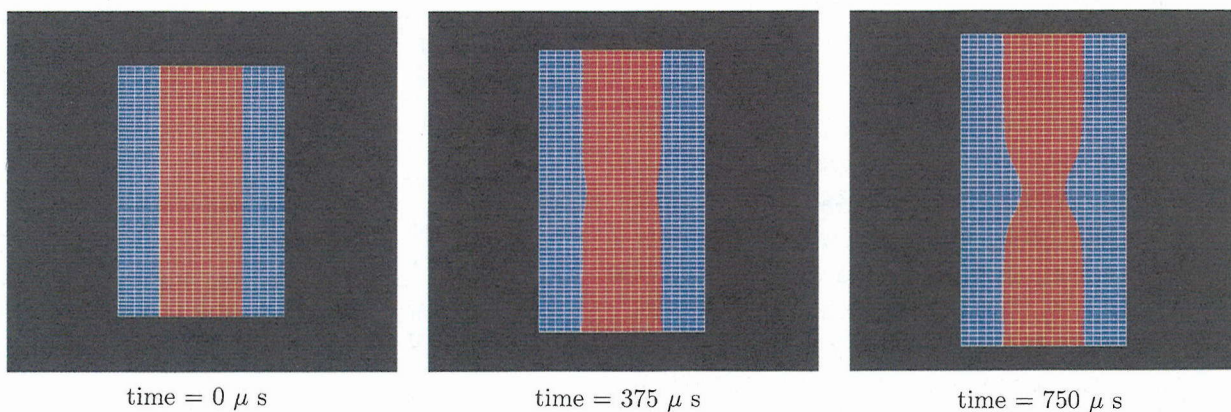


図-12 くびれ解析結果

(2003 年 4 月 18 日 受付)