

相対不連続変位を付加自由度とした修正 X-FEM 解析

A modified X-FEM analysis with an enriched freedom of relative discontinuous displacement

柳井 竜*, 矢富盟祥**

Toru Yanai, Chikayoshi Yatomi

*学生会員 修士(工学) 金沢大学大学院自然科学研究科 (〒920-8667 石川県金沢市小立野 2-40-20)

**正会員 Ph.D. 金沢大学大学院教授, 自然科学研究科 (〒920-8667 石川県金沢市小立野 2-40-20)

In this paper, X-FEM (eXtended FEM) proposed by Belytschko et al⁽¹⁾, Mose et al⁽²⁾ is modified by means of a relative discontinuous displacement on the crack surface. In comparison with the relative discontinuous displacement, the enriched nodal degree freedoms in the X-FEM have no direct physical meaning. Also, the number of enriched freedom decreases in this modified X-FEM. For the problem of infinite plate with a crack, the result of the modified X-FEM shows better approximation than that of the original X-FEM.

Key Words: *X-FEM, enrichment, relative discontinuous displacement, number of enriched freedom*

1. はじめに

有限要素法は現在、物理現象や物体の挙動を数値的に解析する方法として広く用いられている。そして、その解析対象もより複雑な挙動を示すようなものに拡がりつつある。その中でも、本論文では不連続な未知量を伴う場合に注目し、物体内にき裂が存在し未知量である変位が不連続となるものを例にとり、その解析手法について議論する。

物体内にき裂が存在する場合、破壊力学で汎用されているのは、要素分割においてき裂を要素辺と一致させ、その部分の節点を分離することによりき裂上面、下面を表現する方法である。

この様な面倒な要素のリメッシュを避けるため、Simo⁽³⁾, Oliver⁽⁴⁾ や Ortiz ら⁽⁵⁾によって不連続な形状関数を用いる強不連続解析手法が提案された。この方法により荷重-荷重点変位関係などの解の要素依存性が大幅に軽減し、損傷モデルや弾塑性体などの裂進展解析が数多く報告された。しかし、この手法によると、不連続な形状関数の作成が非常に複雑となり、き裂によって分割され独立なひずみを持つはずの2つの部分が独立でなくなる。例えば、この研究で汎用されている階段関数から1次の3角形状関数を用いることにより作成された不連続な形状関数を用いた場合、一般には、不連続面に沿う方向のひずみは不連続になるが、不連続面両側の全ひずみ成分が常に同一になり、き裂

進展挙動を捉える上では致命的な欠点を有する⁽⁶⁾。一方、この強不連続解析手法に対し、上記の欠点を持たない、より簡便で有効な手法として、X-FEM と呼ばれる方法が Belytschko ら⁽¹⁾や Moes ら⁽²⁾によって提案されている。この方法は、き裂などの変位の不連続面を有する要素に対して、要素節点に新たな自由度を付加することにより変位の不連続を表現できるようにしたものである。この方法では、未知量の増加により計算時間は増加するが、従来の有限要素法に付加的な自由度を加えるだけでよく、比較的容易に導入することが可能である。

本論文では、従来の X-FEM の要素節点への付加自由度の代わりに、物理的意味が明解な相対不連続変位の付加自由度をき裂面上に付加した修正 X-FEM を提案する。そして、その修正によりどのように要素内の近似方法が変わったかを1次元の簡単な例を用いて説明する。最後に、その離散化に基づいて作成した有限要素法プログラム(以下 MX-FEM ; Modified X-FEM と呼ぶ)により、き裂を有する無限板の解析を行い、理論解と比較しその精度について検討する。また、簡単なモデルでの解析における利点を示す。

2. 支配方程式と離散化

この章では、不連続変位場を有する物体の支配方程式とその離散化を示す。ここでは変形は微小であると

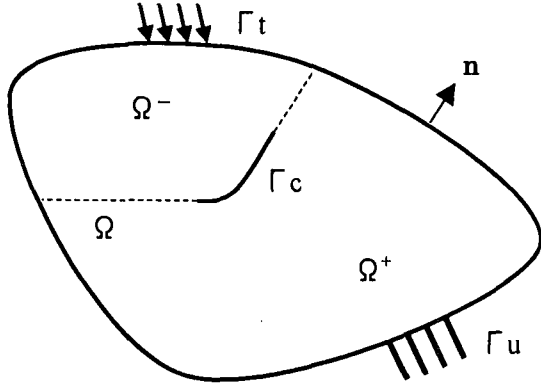


図-1 物体の領域と境界

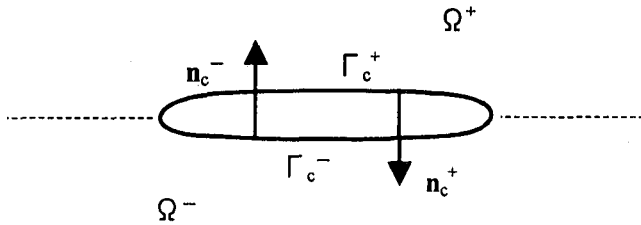


図-2 き裂部分の領域と境界

する。また議論を簡単にするため、運動は静的であり、物体力も無いものとする。更に、き裂表面は自由表面であり、き裂面間に結合力や摩擦などの表面力は生じないものとする。

2.1. 支配方程式と境界条件

図-1に示すような物体Ωを考える。き裂とその先端における接線を延長した線(図-1中の破線)によって分割される2つの領域を、それぞれΩ⁺, Ω⁻とする。図-1には、Ω⁺を灰色で塗りつぶして示す。Γで物体の全境界を表し、変位が既知であるΓ_u、表面力が既知であるΓ_t、き裂の面Γ_cを合わせたものである。

$$\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_t + \Gamma_c \quad (1)$$

き裂面Γ_cは、図-2に示すように、Ω⁺側の面Γ_c⁺とΩ⁻側の面Γ_c⁻からなる。そして、釣り合い方程式と境界条件は以下のとおりである。

$$\nabla \cdot \sigma = 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} \quad \text{on } \Gamma_u \\ \sigma \cdot n &= \bar{t} \quad \text{on } \Gamma_t \\ \sigma \cdot n_c^+ &= 0 \quad \text{on } \Gamma_c^+ \\ \sigma \cdot n_c^- &= 0 \quad \text{on } \Gamma_c^- \end{aligned} \quad (3)$$

ここで∇はナブラ演算子、σはCauchyの応力テンソル、uは変位、n、n_c⁺、n_c⁻はそれぞれ境界およびき裂面Γ_c⁺、Γ_c⁻の外向き法線ベクトルを表している。(・)はテンソルとベクトルの内積を示している。また上付きの(−)は既知量であることを示す。

ひずみは変位より以下のように示される。

$$\varepsilon = (\nabla \otimes u)^s \quad (4)$$

εはひずみテンソルを表し、⊗はテンソル積である。上式の右肩のsは対称成分であることを表す。

応力とひずみを関係付ける構成関係は次のようなHookeの法則に従うものとする。

$$\sigma = C : \varepsilon \quad (5)$$

ここでCは弾性構成テンソルで、(:)は4階のテンソルと2階のテンソルの内積を示す。

2.2. 弱形式化

式(2)を弱形式化するため次のようなΓ_c上で不連続となる試験関数ηを考える。

$$\eta := \{ \eta : \Omega \rightarrow R^3 \mid \eta(x) = 0, x \in \Gamma_u \} \quad (6)$$

この試験関数を式(2)の両辺に掛け、物体の領域Ω全体で積分しGaussの発散定理を用いると次式となる。

$$\int_{\Omega} n \cdot \sigma \cdot \eta d\Gamma = \int_{\Omega} \sigma : (\nabla \otimes \eta) d\Omega \quad (7)$$

更に、境界条件(3)、式(4)、式(5)、およびσとεの対称性を考慮して変形すると、

$$\int_{\Omega} \varepsilon : C : (\nabla \otimes \eta) d\Omega = \int_{\Gamma} \bar{t} \cdot \eta d\Gamma \quad (8)$$

となる。

2.3. 不連続変位の離散化

この節では有限要素法に適用するため、式(8)の離散化を行う。一般に、有限要素法では連続節点変位dを未知量として計算を行うが、本解析ではき裂面での変位の不連続性を表すために、付加的な自由度としてき裂面と要素辺の交点での相対不連続変位eと、き裂を含む要素のΩ⁺側の節点の不連続変位成分d⁺、を連続節点変位とともに用いる。以下、これらの付加的な自由度をそれぞれ、き裂面不連続量e、節点不連続量d⁺

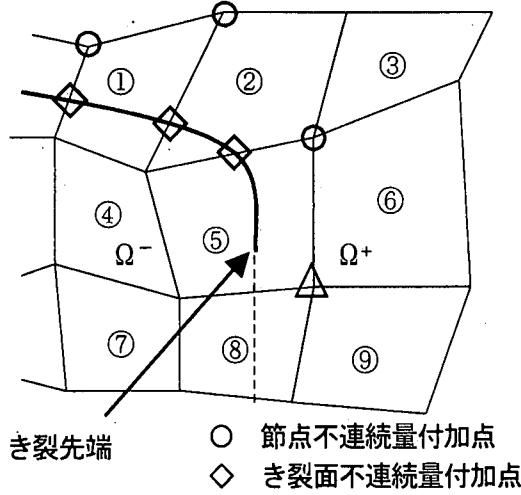


図-3 付加的な自由度を持つ点

と呼ぶ。これらの付加項を加える点は図-3 の通りである。要素⑤内のき裂先端点では、き裂が閉じていることを保証するため、き裂面不連続量 e を付加しない。同様の理由により、△で示される点においても節点不連続量 d^+ は付加されない。

節点変位 d 、き裂面不連続量 e 、節点不連続量 d^+ を用いてき裂面 Γ_c で変位 u が不連続となるように離散化する変位 u は次式のように表せる。

$$u = [N]\{d\} + [H(x)N_c^e]\{e\} + [H(x)N_c^+]\{d^+\} \quad (9)$$

ただし、第 2,3 項はき裂が存在する要素に(図-3 中、①, ②, ⑤要素)のみ付加される。ここで $[N]$ は節点変位 d に対する形状関数行列、 $\{d\}$ は節点変位ベクトル、 $\{e\}$ はき裂面不連続量ベクトル、 $\{d^+\}$ は節点不連続量ベクトル、 $[N_c^e]$ は、き裂面不連続量 $\{e\}$ の形状関数行列、 $[N_c^+]$ は節点不連続量 $\{d^+\}$ の形状関数行列、 $H(x)$ はき裂面により分割された Ω^+ 、 Ω^- に対して以下のような値を持つ階段関数である。

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x \in \Omega^+ \\ 0 & x \in \Omega^- \end{cases} \quad (10)$$

式(9)を指標を用いて表すと、次式のように表せる。

$$u_i = [N]_{ij}\{d\}_j + [H(x)N_c^e]_{ik}\{e\}_k + [H(x)N_c^+]_{il}\{d^+\}_l \quad (11)$$

ひずみも式(9)を微分して、次式のように表せる。

$$\varepsilon = [B]\{d\} + [B_{ch}^e(x)]\{e\} + [B_{ch}^+(x)]\{d^+\}, x \notin \Gamma_c \quad (12)$$

ここで、 $[B]$ 、 $[B_{ch}^e(x)]$ 、 $[B_{ch}^+(x)]$ はそれぞれ $[N]$ 、 $[N_c^e]$ 、 $[N_c^+]$ の各成分を x, y で微分した行列である。

試験関数 η に関しても同様に離散化を行うと、式(12)中の d, e, d^+ に対応する未知量 α, β, γ を用いて、

$$\eta = [N]\{\alpha\} + [H(x)N_c^e]\{\beta\} + [H(x)N_c^+]\{\gamma\} \quad (13)$$

また、 $\nabla \otimes \eta$ も、次式のように表せる。

$$\nabla \otimes \eta = [B]\{\alpha\} + [B_{ch}^e(x)]\{\beta\} + [B_{ch}^+(x)]\{\gamma\}, x \notin \Gamma_c \quad (14)$$

この試験関数においても、変位と同じく第 2,3 項はき裂が存在する要素にのみ付加される。

各要素ごとに式(12)、式(14)を式(8)に代入すると次式を得る。

$$\begin{bmatrix} K_{dd} & K_{de} & K_{d+} \\ K_{ed} & K_{ee} & K_{e+} \\ K_{+d} & K_{+e} & K_{++} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d \\ e \\ d^+ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_d \\ f_e \\ f_+ \end{Bmatrix} \quad (15)$$

ここで左辺の行列の項はそれぞれ

$$\begin{aligned} K_{dd} &= \int_{\Omega_e} [B]^T [C] [B] d\Omega \\ K_{de} &= \int_{\Omega_e} [B]^T [C] [B_{ch}^e(x)] d\Omega \\ K_{d+} &= \int_{\Omega_e} [B]^T [C] [B_{ch}^+(x)] d\Omega \\ K_{ed} &= \int_{\Omega_e} [B_{ch}^e(x)]^T [C] [B] d\Omega \\ K_{ee} &= \int_{\Omega_e} [B_{ch}^e(x)]^T [C] [B_{ch}^e(x)] d\Omega \\ K_{e+} &= \int_{\Omega_e} [B_{ch}^e(x)]^T [C] [B_{ch}^+(x)] d\Omega \\ K_{+d} &= \int_{\Omega_e} [B_{ch}^+(x)]^T [C] [B] d\Omega \\ K_{+e} &= \int_{\Omega_e} [B_{ch}^+(x)]^T [C] [B_{ch}^e(x)] d\Omega \\ K_{++} &= \int_{\Omega_e} [B_{ch}^+(x)]^T [C] [B_{ch}^+(x)] d\Omega \end{aligned} \quad (16)$$

ここで Ω_e は各要素の領域を表す。また右辺は

$$\begin{aligned} f_d &= \int_{(\Gamma)_e} \{\bar{t}\} [N] d\Gamma \\ f_e &= \int_{(\Gamma)_e} \{\bar{t}\} [H(x)N_c^e] d\Gamma \\ f_+ &= \int_{(\Gamma)_e} \{\bar{t}\} [H(x)N_c^+] d\Gamma \end{aligned} \quad (17)$$

(Γ)_e は各要素の表面力境界 Γ_t を示している。

3. X-FEM と MX-FEM の比較

この章では、簡単な例により X-FEM と MX-FEM の近似方法の違いについて議論する。X-FEM の定式化の詳細は、Belytschko ら⁴⁾の報告を参照していただきたい。

3.1. 近似方法

図-4 に示す長さ L 、左端から不連続点までの長さが L_c の 2 節点 1 次元要素を考える。式(10)で区別される領域は、不連続点より右側を Ω^+ 、左側を Ω^- とする。ここでは、節点 1 から x 軸を要素の軸と同方向にとる。図中の変数 d_1, d_2 の位置は、その変数が属する節点を表している。また、塗りつぶされた三角形は節点 1 の形状関数 N_1 の値の分布を示す。形状関数 N_2 の分布は、 N_1 の三角形の向きを反対にしたものである。図-5, 6 は、それぞれ MX-FEM, X-FEM で変位不連続を表現するために付加される未知量とその値を持つ点、その値に対する形状関数を表している。この時、節点変位が与えられたとすると形状関数により要素内の変位 u はそれぞれ図-7, 8 の太線のように与えられる。これから明らかなように、X-FEM では d_1^+ は物理的な意味を持たず、近似のための量でしかない。しかし MX-FEM では不連続点における相対変位という意味づけがなされる。ここでき裂面不連続量 e を X-FEM の d_1^+, d_2^+ を用いて表すと、

$$e = \frac{1}{L}(1 - L_c)d_1^+ + \frac{L_c}{L}d_2^+ \quad (18)$$

となる。この様な自由度 e を導入することは、き裂面に生じる結合力が相対変位の関数となるような場合や、圧縮荷重下にあるき裂面に摩擦力が生じ接触判定が必要となる解析において非常に有用であると考えられる。

3.2. 付加未知量

次に、2 次元 4 節点 4 角形アイソパラメトリック要素を用いて付加される未知量の数の比較を行う。直線き裂が向かい合う 2 辺を横切って通過する要素では X-FEM では一般にその要素の全点に 2 自由度ずつ付加され全体として 8 自由度ほど増加する。MX-FEM でも Ω^+ 側の節点に 2 自由度、き裂面上の点に 2 自由度ずつの 8 が付加自由度となる(図-9 参照)。

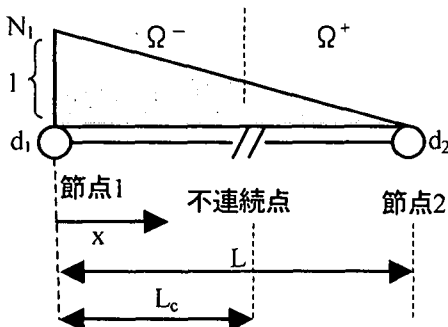


図-4 1次元モデル

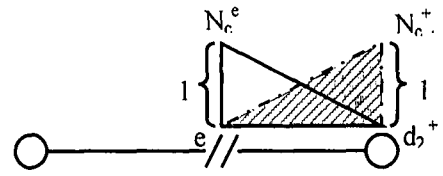


図-5 MX-FEM で付加される未知量

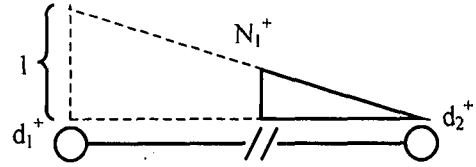


図-6 X-FEM で付加される未知量

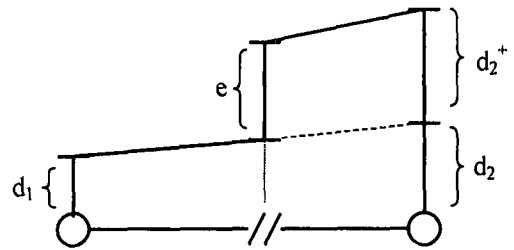


図-7 MX-FEM による u の補間

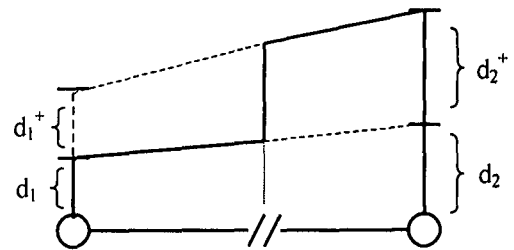


図-8 X-FEM による u の補間

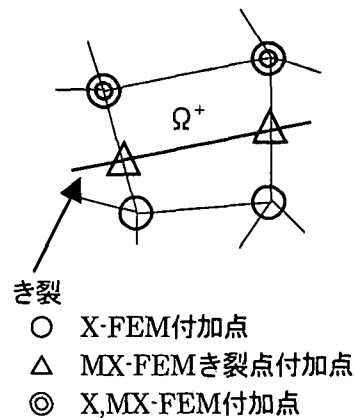
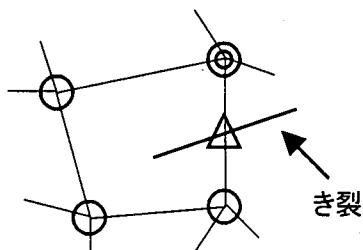


図-9 き裂が通過する要素の付加項



- X・FEM付加点
- △ MX・FEM点付加点
- ◎ X,MX-FEM付加点

図-10 き裂先端を有する要素の付加項

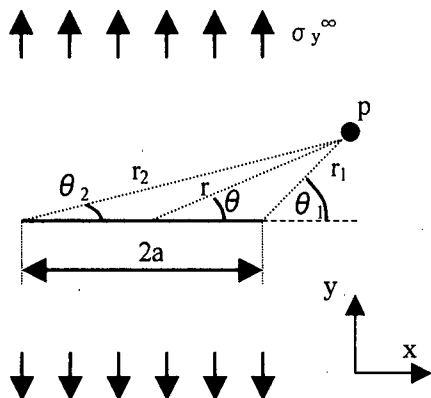


図-11 一様引張りを受けるき裂を有する無限板

それに対し、き裂先端が在る要素では、X-FEM は各点に 8 自由度ずつの、全体で 32 自由度が付加される。MX-FEM ではき裂先端では相対変位が生じないことから、2 点にのみ付加自由度 2 ずつを加え、全体として増加する自由度を 4 に抑えることができる(図-10 参照)。なお式(16)の数値積分に関しては付録で詳述する。

この様に自由度の低下と付加項に物理的な意味を持たせることで、より直感的に分かりやすく簡便な方法となる。次章ではこの方法の精度の比較を行う。

4. 解析方法の検証

この章では、前章で展開した式に基づき、有限要素法プログラムコードを作成し、理論解、X-FEM の結果との比較を行う。全て解析は線形等方弾性体の平面ひずみ状態とする。体積弾性係数 E は 7.0GPa 、ポアソン比 ν は 0.3 を用いる。図-11 に示す、き裂を有する無限板を考える。角度 θ 、 θ_1 、 θ_2 および長さ r 、 r_1 、 r_2 はそれぞれき裂中央、右端、左端での値、 σ_y^∞ は無限遠点での一様引張り応力である。このような場合の σ_y の理論解は Westergaard の応力関数を使用することにより式(19)で与えられる⁷⁾。数値解析は、図-12 のような要素分割により、無限板を近似する。き裂は中央に長さ 4 で水平に入っている。

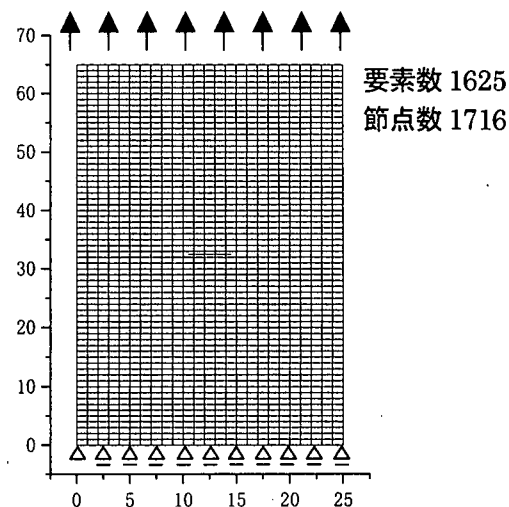


図-12 要素分割

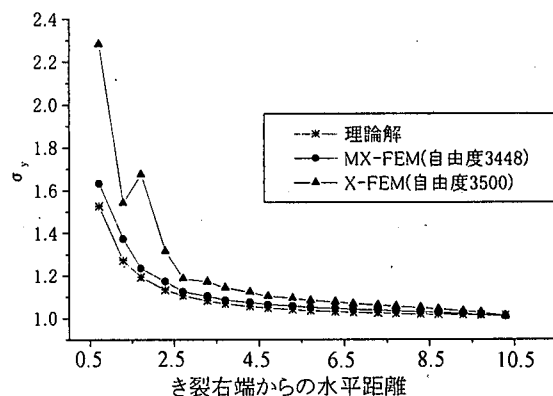


図-13 σ_y 分布

$$\sigma_y = \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \sigma_y^\infty \left[\cos \left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) + \frac{a^2}{r_1 r_2} \sin \theta \sin \left\{ \frac{3}{2} (\theta_1 + \theta_2) \right\} \right] \quad (19)$$

図-13 に、き裂右端から右側の応力 σ_y を理論値とともに示す。ガウスの積分点の値であるため、き裂延長線上より少し下の位置での値である。両手法とも、き裂先端付近で応力が增大する理論解の特徴を表しているが、X-FEM の値はき裂先端に近づくとも理論解から大きく値が離れている。これより本 MX-FEM 解析手法が精度の向上も伴っていることが分かる。

5. 結論

電算機の急速な発達と、土木への有限要素法の普及

により、その解析対象も等方弾性体のような比較的簡単なものから、非等方性や弾塑性体、せん断帯や不連続性など、より複雑な特性を持つものへの拡張もなされてきた。その中で、不連続性を対象とする研究では、要素分割的な方法から、不連続な形状関数を用いる強不連続解析手法の使用、X-FEM など要素の近似性能の向上による方法へと移ってきた。そして本研究では、その中の X-FEM を修正しその比較と精度の検証を行った。以下に要点を列挙する。

1. 要素に付加される自由度に相対不連続変位 e という物理的な意味を持たせた。
2. き裂先端を有する要素の付加項を変えることで、大幅に未知数の数を減らすことができた。
3. 本論文の例題において、き裂右端から右側の応力 σ_y の分布に関して、理論解との比較により X-FEM よりも MX-FEM のほうがより良い近似解が得ることが分かった。

参考文献

- 1) T. Belytscheko, and T. Black : Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing , Int. J. Num. Meths. Engng, 45, pp.601-620, 1999.
- 2) N. Moes, J. Dolbow, and T. Belytschko : A finite element method for crack growth without remeshing, Int. J. Num. Meths. Engng, 46, pp.131-150, 1999.
- 3) J.C.Simo : On the variational foundations of assumed strain methods, J. Appl. Mech. 53 , pp.51-54, 1986.
- 4) Oliver, J. : Modeling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part 2 : Numerical simulation, Int. J. Num. Meths. Engng. 39, pp.3601-3623, 1996.
- 5) Ortiz M, Leroy Y, Needleman A : A finite element method for localized failure analysis , Comput. Meths. Appl. Mech. Engng. 61, pp.189-214, 1987.
- 6) M. Jirásek and T. Belytschko: Computational resolution of strong discontinuities , Proc. MCCM-V, Vienna, Austria, pp.7-12 , 2002.
- 7) 岡村弘之 : 線形破壊力学入門, 培風館, 1976

付録

数値積分の方法

X-FEM で不連続性を有する要素を用いる場合、その要素における数値積分は非常に重要である。例えば 4 節点四角形要素で Gauss の 4 点積分を用い、以下の 2 つの場合を考える(図-14)。

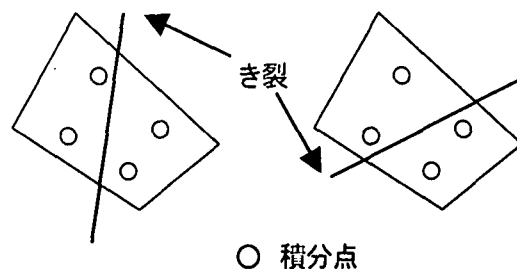


図-14 積分と不連続性の関係

この数値積分を行うと積分点が 2 つずつに分けられることから結果は同じものとなる。そのため本解析では以下のような手順で、式(16)の数値積分を行った。

1. き裂で分割された四辺形領域を新たな 4 節点 4 角形アイソパラメトリック要素とみなした Gauss 積分点を決める。
2. 上記の積分点の全体座標を (x, y) を求める
3. 2. で求めた座標の、分割前の要素における Gauss 点の正規座標系における座標 (ξ, η) を求める。
4. その点で必要な値を計算し数値積分を行う。
5. 分割された他方の領域でも同様の作業を行う。

上記手順を、図-15 に示す。この様に数値積分を改良することにより、図-14 のような場合でもそれぞれに対応した積分値を得ることが可能となる。

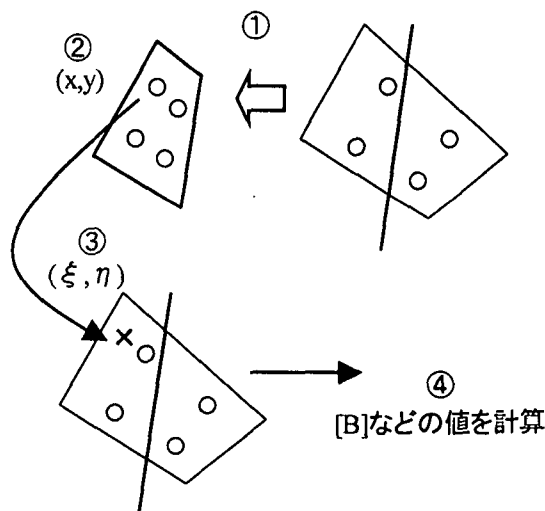


図-15 積分領域の分割

(2003 年 4 月 18 日受付)