

解析的平均手法を用いた複合材料の平面ひずみ有限要素

A finite element of composites in plane strain using an analytic averaging method

樋口耕平*・岩熊哲夫**・京谷孝史***・寺田賢二郎****

Kohei HIGUCHI, Tetsuo IWAKUMA, Takashi KYOYA and Kenjiro TERADA

*学生会員 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

**正会員 PhD 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻

***正会員 博(工) 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻

****正会員 PhD 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻

An analytic averaging method of moduli of composites is built into a standard constant-strain-triangular element in plane strain. Such an analytic method is useful from a designing point of view. Furthermore it may have an advantage in suggesting some bounds of behaviors of composites. The element is used to show a relation between moduli and randomness of distribution of inclusions. And two boundary value problems are examined to demonstrate feasibility of the elements, and the results are compared with those by the standard homogenization method.

Key Words : composite, Mori-Tanaka theory, finite element, bounds, homogenization method

1. はじめに

近年、コンクリートの繊維補強はもちろん、プラスチック・ベースの繊維補強材のような複合材料も、社会基盤構造物の主部材に用いられるようになってきている。複合材料はその微視構造の配合や配置によって性能と機能を自在に制御できるため、適材適所な材料開発が原則として可能である。その材料開発において何らかの平均化手法が利用できれば、介在物等の配置や配合に関する試行範囲を狭めることができ、実験コスト減につなげることができる。ひとつの解析的な手法として森・田中理論¹⁾を用いた手法が知られているが、実際に熱膨張率を制御した新材料開発²⁾でも用いられている。

一方、コンクリート等の社会基盤構造物材料の場合はその微視構造が非常に複雑であるため、解析的な手法の場合にはそれが必然的に有している仮定中の近似のため、予測の精度が悪い可能性がある。しかしながら、内部の微視構造を例えばすべて有限要素化して数値解析するのは非現実的である。そのため近年、微視的な挙動を周期境界を持つユニットセルで表現して非均質体の数値解析に用いる、均質化手法が用いられるようになってきた。よく行われている解析では、例えば実際の材料の顕微鏡写真や岩盤の表面写真等を元にユニットセルを作成することも行われ、それを有限要素等で「ミクロ解析」をし、非均質体の巨視的な挙動を数値予測している。ただユニットセルを有限要素法で解く場合にはユニットセルの力学特性が数値でしか現れないため、ケーススタディ的な結果にならざるを得ず、微視構造特性の確率的分布等による巨視的な挙動のばらつき等を予測する場合には

ある程度の困難さが伴う。

ユニットセルをどのようにミクロ解析するかは別にして、非均質体を何らかの均質な連続体に置き換えることを、ここでは広義の均質化と呼ぶことにする。その均質化の部分に、もし解析の手法を用いることができれば、微視構造の確率的な変動等の検討も比較的容易になる可能性がある。もしそれができ、離散化手法として有限要素法を用いた場合の剛性行列は、例えば微視構造の持つ配合比率や介在物の向き等についての陽な表現となるため、最適化や確率有限要素法の適用が比較的容易であると期待される。そこでここでは、解析の手法の一つである森・田中理論を利用して得られる平均挙動を、ちょうど均質化手法の「ミクロ解析」によって得られる挙動として捉え、それを標準的な有限要素法に組み込んだ場合の有用性について、簡単な数値例を対象として検討したい。

森・田中理論は、等方弾性体中に回転楕円体の非均質体が存在する場合の Eshelby の解³⁾を利用し、マイクロ・メカニクス等の等価介在物法⁴⁾と組み合わせて母材応力の平均量を算定する。これは、やや古典的な混合体理論⁵⁾に比べると介在物の形状が考慮できる点で優れている。また介在物形状が一種類で球か円柱の場合には、森・田中理論を利用した平均解が Hashin-Shtrikman⁶⁾のひとつの界(上下界の片方)に等しいこと⁷⁾もわかっている。さらにもう片方の界は、母材と介在物の材料を置き換えることによって得られる。複数の材料で構成されている場合も、母材とみなす材料を適切に選ぶことによって Hashin-Shtrikman の上下界を求めることができる。そもそも微視構造を完全にはモデル化できないこと

を考えると、このような上下界の情報はいくつかの平均的な解のみの情報よりも有用な場合もあり得ると考えられる。

ここでは一例として、一方向には無限に長い楕円柱介在物が存在する場合を対象とし、平面ひずみ状態での有限要素を構築し、その要素の特性を明らかにした上で具体的な境界値問題の解析を行い、その利用可能性を示す。さらにユニットセルを有限要素解析する標準的な均質化手法による解との比較を行い、森・田中手法を利用して均質化に用いた場合の解の位置付けと精度の確認をする。

2. 構成則と有限要素

2.1 森・田中理論を用いた平均弾性係数

この理論によれば、例えば文献⁸⁾にもあるように、等方弾性体中に等方弾性な回転楕円体介在物が分布している場合、複合材料全体の平均弾性係数 $\bar{C}$ は

$$\bar{C} = C_M \{ C_M - (1-f)(C_M - C_I) S \}^{-1} [C_M - (C_M - C_I) \{ S - f(S - I) \}] \quad (1)$$

と求められる。ここに f は介在物の占める体積比率であり、 I は 4 階の単位テンソルである。 C_M と C_I はそれぞれ母材と介在物の弾性係数で

$$(C_{ijkl})_\alpha = \mu_\alpha (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \lambda_\alpha \delta_{ij}\delta_{kl} \quad (2)$$

と表される。ここに μ と λ は Lamé の定数であり、 δ_{ij} は Kronecker のデルタである。添え字 α は母材なら M で介在物なら I である。

また S は Eshelby のテンソルと呼ばれ、母材のポアソン比と介在物の半径比だけで決まる量である。回転楕円形状の介在物の 3 主軸方向を座標軸に取り、その径を a_i ($i = 1, 2, 3$) とすると、 $a_3 = \infty$ な楕円柱の場合には、例えば

$$S_{1111} = \frac{1}{2(1-\nu_M)} \left\{ \frac{\alpha^2 + 2\alpha}{(1+\alpha)^2} + (1-2\nu_M) \frac{\alpha}{1+\alpha} \right\} \quad (3)$$

となる。ここに ν_M は母材のポアソン比で、 α は残る二つの半径比で

$$\alpha \equiv \frac{a_2}{a_1} \quad (4)$$

と定義した。ここでは平面ひずみ状態を例にしたいので、上述のように x_3 軸方向には無限に長い楕円柱介在物のみを取り扱う。もし後述の図-2 のように、楕円の長軸が座標軸と角 θ だけ傾いている場合には、Eshelby のテンソル S は ν_M と α に加えて θ の関数になる。したがって、式 (1) の剛性は、2 つの材料の材料定数と、 f と α と θ の関数として表される。

2.2 森・田中有限要素

式 (1) の弾性係数は、無限体の複合材料全体の平均的な応力とひずみを

$$\bar{\sigma} = \bar{C} \bar{\epsilon} \quad (5)$$

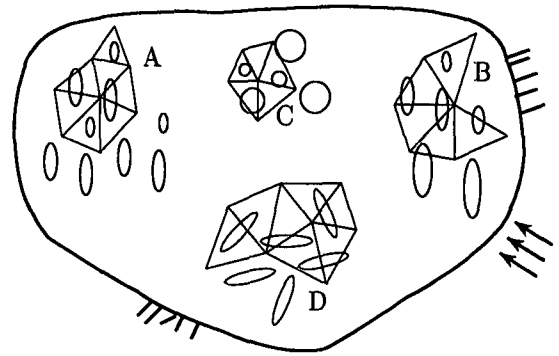


図-1 有限要素を小さくしたときに生じる事象

と関係づけている。本定式化では、この関係式 (5) が均質化された非均質体の近似構成則とみなせると捉えることを提案する。ユニットセルを用いた標準的な均質化手法では、ミクロとマクロの場の関係を特異摂動法の strained coordinate に用いる座標スケールの摂動パラメータ ϵ でつなぎ、そのパラメータが $\epsilon \rightarrow 0$ になるように取ることを「均質化」と呼び、それが理論的な根拠になっている。本定式化ではそういった数学的証明無しに、単なるアナロジーとして、無限体に対する挙動をミクロ解析の結果とみなすことを提案している。

ここでは有限要素法を、境界値問題を解くマクロ解析のための離散化手法として選択し、この式 (1) をそのまま有限要素の要素剛性行列の算定に用いる。したがって以下では、この森・田中理論を利用した解析的な平均解を利用した有限要素を簡単のために「森・田中有限要素」と呼ぶことにする。これに対してユニットセルを用いた標準的な解法を、これも簡単のために単に「均質化手法による解析」と略記する。

前述のようにアナロジーで森・田中理論による結果を用いていることから、その利用可能性についての数学的根拠は明確ではない。しかもマクロ解析に有限要素法を用いるため、その要素のスケールと実際の材料の微視構造のスケールとの関係も明確でない。しかし、微視構造を有するある非均質領域の剛性を式 (1) で置き換えるということは、その領域を均質体で近似してしまったことを意味する。したがって、有限要素のサイズを細かく設定した場合に生じ得る現実的な状況、例えば図-1 に故意に描いたように、微視構造の介在物をまたいで要素分割がなされるような状況を、本定式化では問題視しない。また式 (3) のように、Eshelby のテンソルは寸法比の関数ではあっても寸法そのものは含まれないので、式表現上としても、介在物の実際のスケールそのものを憂慮する必要は無い。

この図-1 を解くべき境界値問題の例として、本手法による解法の手順を概説しておく。領域 A や領域 B が例えば同じ体積比率 20% で分布した同じ半径比 $\alpha = 4$

の同じ材料の介在物がその長軸を鉛直方向に向けて分布している部分だと観察されたとする。そこでこの部分の要素剛性方程式は、式(1)で $f = 0.2$ と設定し、式(3)のテンソル中で $\alpha = 4$ と置いて決定される。同様に領域Cは円形介在物が例えば体積比率15%で分布しているという測定であれば、上式で $f = 0.15$, $\alpha = 1$ として要素剛性行列を算定する。また領域Dにはいろいろな向きや大きさを持った介在物があるとすると、一例としては、その領域をできるだけたくさんの有限要素に分割した上で、ひとつひとつの要素は一種類の楕円介在物を持つものとし、要素ごとにその寸法比や向きが異なるものを分布させるというやり方が考えられる。

したがって有限要素法の剛性方程式の定式化において、式(1)の弾性係数を用いれば要素剛性行列が算定できる。ただしここでは簡単のために、ひとつの要素は一種類の介在物しか含まないものとする。要素の弾性係数が等方ではなく直交異方性になることを除けば有限要素定式化で特別な配慮は不要なので、その具体的な式の展開は省略するが、ここでは例えば文献⁹⁾の手法を用いて定ひずみ三角形要素を定式化した。また式(1)等に現れるテンソル演算は、文献¹⁰⁾にある方法を用いて行列計算で実行している。

また式(5)から明らかのように、以上のような有限要素で求められる定ひずみ要素内の応力は式(5)左辺の要素内の代表的な応力 $\bar{\sigma}$ であり、要素内の平均値として捉えられる。定ひずみ要素ではない場合には、式(5)を評価した積分点等における応力と捉えていいかもしれない。森・田中理論によれば、この応力を用いて、母材中と介在物中の平均応力も

$$\begin{aligned}\sigma_M &= \left[I + f C_M (S - I) \{ C_M - (C_M - C_I) S \}^{-1} \times \right. \\ &\quad \left. (C_M - C_I) C_M^{-1} \right]^{-1} \bar{\sigma} \\ \sigma_I &= \left[I + C_M (S - I) \{ C_M - (C_M - C_I) S \}^{-1} \times \right. \\ &\quad \left. (C_M - C_I) C_M^{-1} \right] \sigma_M\end{aligned}\quad (6)$$

と求められるため、微視領域での平均場の計算には有限要素分割は必要無い。この簡便さが本手法とユニットセルを用いた標準的な均質化手法との違いであるが、後述の例題でも示すように、あくまでも平均場のみが求められることには注意が必要である。

3. 一様場の挙動

3.1 ランダムさと横等方性

境界値問題を解く前に一様場の挙動を模擬し、この要素が示す特性について検討する。最初の応用例は巨視的にはほぼ均質な場である。すなわち、微視的な異方性が物体中にランダムにある程度数多く散在している場合を対象としており、このような場合には、巨視的には等方性を示すはずである。このような特性をここでまず検討

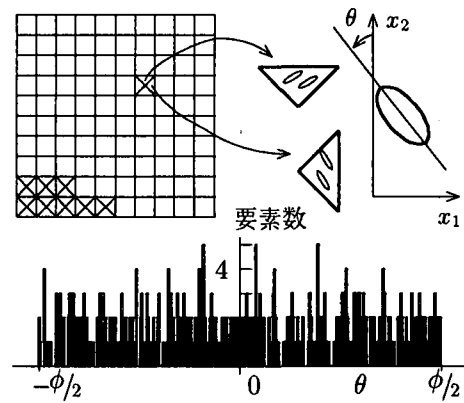


図-2 一様場のマクロモデルと、介在物の長軸方向の分布範囲とそのランダム分布

する。図-2の左上に示したように、大きな正方形領域（マクロ領域）を一例として400個の三角形有限要素に分割し、同図の右に示したように、個々の要素には x_2 軸から反時計回りに θ だけ傾いた半径比 $\alpha = 5$ の一種類の介在物だけが、その体積比率 $f = 0.2$ で含まれているものとする。そして、この大きな正方形領域の400の各要素ごとの楕円長軸の傾き角 θ は、同図下に示したような頻度分布になっているとする。すなわち、 $|\theta| \leq \phi/2$ の範囲に乱数で与える角度方向を持つ介在物が400の個々の要素の中に1種類ずつ分布しているものとする。異方性の分布をできるだけランダムにした場合にどの程度の等方性が得られるかを調べることで目的なので、要素の数を400に設定した理由は特に無い。

このとき $\phi = 0$ 度であれば、400要素すべてには x_2 方向に長軸を持つ楕円柱介在物しか存在しないことになる。逆に $\phi = 180$ 度の場合には、あらゆる方向に乱数で発生させた程度のランダムさで長軸の向きが分布した、異なる400要素でできた正方形領域になる。このように ϕ の値が異方性分布のランダムさを代表している。

材料定数は、母材のヤング率が $E_M = 60 \text{ GN/m}^2$ でポアソン比が $\nu_M = 0.3$ とし、介在物のヤング率が $E_I = 400 \text{ GN/m}^2$ でポアソン比が $\nu_I = 0.2$ とした。正方形領域の外周の適切な節点に単位の力を加えることにより変形させ、対応する周上の節点変位から平均的なひずみを算定し、それで正方形領域のみかけの弾性係数（以下、「正方形領域のみかけの弾性係数」と称する）を求める。

図-3には、そのようにして求めた正方形領域のみかけの弾性係数を示した。縦軸の $\tilde{C}$ は正方形領域のみかけの弾性係数であり、式(1)の係数ではない。またここでは弾性係数について Voigt の表記を用いているため、 $\tilde{C}_{66}$ はテンソル成分表記のときの $\tilde{C}_{1212}$ のことであり、 $\tilde{C}_{12}$ は $\tilde{C}_{1122}$ のことである。横軸が ϕ すなわち介在物の長軸の分布のランダムさを表しており、零度のときはすべての介在物が x_2 方向を向いており、右端の180度の

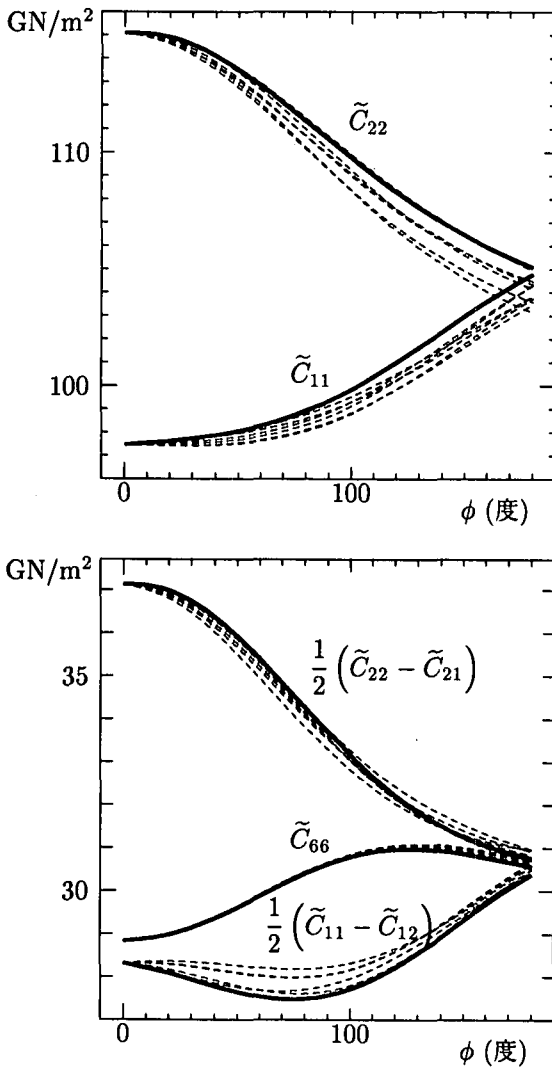


図-3 ランダムさと正方形領域のみかけの弾性係数との関係

ときが発生させた乱数の程度でランダムな方向分布をしている。図にはそれぞれ数本の実線・破線の曲線が描いてあるが、これは発生した乱数の違いによる結果のばらつきを示したものである。φ = 0 度の場合には直交異方性を明確に示しており、長軸方向に関連する 2 つの係数の場合、 $\tilde{C}_{22}$ が $\tilde{C}_{11}$ よりも大きい。また同図-3 の下図には、せん断に関する 3 種類の係数を示したが、横等方性を有すれば一致するはずの 3 つの係数がお互いに異なる値を持つ。

φ が大きくなるにつれて、どちらの図でも係数の値がひとつに収束している。最終的にランダムさが一番大きい φ = 180 度では、材料は発生させた乱数程度の横等方性になる。材料が横等方である場合には、 $\tilde{C}_{22}$ は $\tilde{C}_{11}$ に一致し、せん断に関する係数は

$$\tilde{C}_{66} = \frac{1}{2}(\tilde{C}_{11} - \tilde{C}_{12}) = \frac{1}{2}(\tilde{C}_{22} - \tilde{C}_{21}) \quad (7)$$

が成立する。図-3 はこの性質をよく表している。ミクロ構造も数値解析する標準的な均質化手法では可能な微視構造の詳細な考慮は、本アプローチではできないが、

このように任意に与えた分布で異なる微視構造を配置することは比較的容易である。

3.2 上下界との関係

2 相材料の場合で球状あるいは円柱状の介在物しか存在しない場合、二つの材料のどちらを母材に選ぶかによって、森・田中手法に基づいて得られる二種類の平均弾性が Hashin-Shtrikman の上下界に一致する⁷⁾ことがわかっている。しかし形状がそれ以外の場合の上下界については解析的な陽な解は誘導されていない。前節で求めた正方形領域のみかけの挙動で、最もランダムさが大きい φ = 180 度の場合のみかけの挙動は横等方性になるため、介在物が円柱だけの場合の上下界とはほぼ同様の性質を持つか、あるいはそれに近い特性を有することが予想される。

そこで、φ = 180 度として 400 要素にランダムに介在物を分布させた場合で、介在物の半径比が α = 5, 100 の場合の正方形領域のみかけの弾性係数と、円柱介在物の場合の Hashin-Shtrikman の上下界との関係を調べる。材料は前節と同じものを用い、ランダムさは図-3 の太い実曲線の結果を与える乱数で与えた。介在物の体積比率に対する大きい正方形領域のみかけの弾性係数の関係を図-4 に示した。横軸はヤング率の大きい 400 GN/m² の材料が占める体積比率である。それぞれの半径比 α に対して、二本ずつ結果が示してあるが、ここでの設定の場合には、低い方の結果が上述の材料定数の取り方と同じ考えで母材に柔らかい材料を選んだときの解である。高い方の結果はヤング率の大きい 400 GN/m² の方を母材と「みなして」算定した、いわゆる「逆の森・田中」評価による解である。

同図には円柱の場合の結果も比較のために一点鎖線で示してあるが、これも逆の森・田中算定をしてあり、この二本の一点鎖線が前述の Hashin-Shtrikman の上下界に一致する。大きな正方形領域には楕円形の介在物がその向きもほぼランダムに分布していることから、そのみかけの弾性係数は円柱の場合に近い挙動を示すと予測していたが、半径比によって異なる特性を有していることが明らかになった。すなわち、半径比が大きくなるにつれて円柱の場合の上下界からはお互いに離れていき、半径比が 100 の場合は、森・田中予測と逆の森・田中予測がほとんど同じになってしまっている。これは、そもそも森・田中理論を用いた平均弾性の評価において半径比 α がある程度より大きくなると、平均剛性等に及ぼす半径比の影響がほとんど現れず、同じ剛性になってしまう欠点あるいは解析解の限界が影響している。

ただし、いずれの係数も円柱の上下界の内側に位置することは興味深い。つまり設計という観点から見た場合、円柱介在物を仮定した上下界の予測が得られれば、楕円柱介在物がランダムに分布した場合の材料の特性はおおよそ把握できることを示している。ただし、 $\tilde{C}_{12}$ は

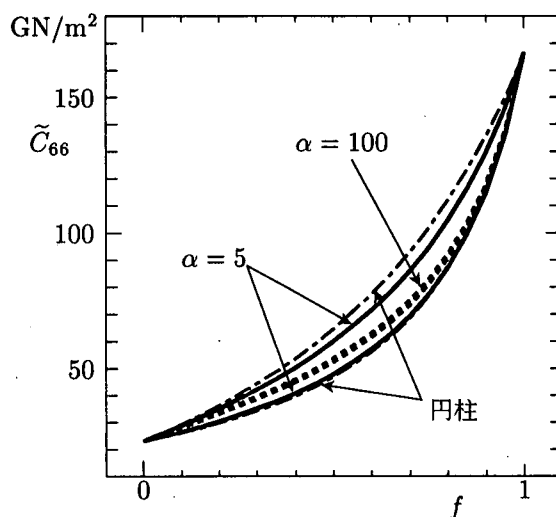
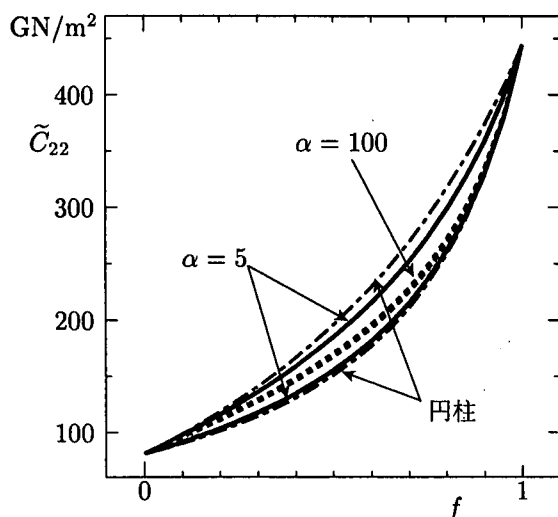
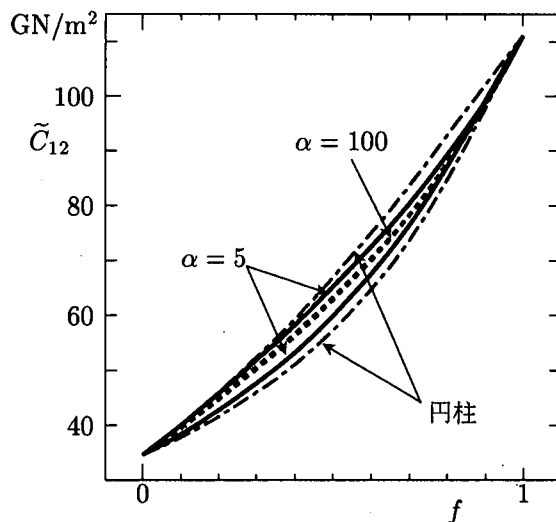
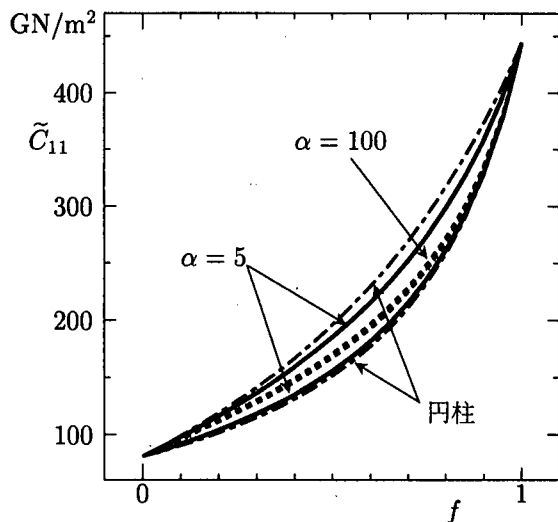


図-4 ある程度ランダムに介在物が分布している場合の2手法による正方形領域のみかけの弾性係数

材料係数行列の非対角成分なので、その上下界という考えはそのままでは当てはまらないが、図から明らかなように、その場合であっても円柱の場合の2つの答の間に含まれている。

ところで、楕円柱介在物の半径比とは無関係に、介在物の体積比率 f が小さいときは円柱の上界（実際には体積比率が小さい介在物の方を母材と「みなした」場合の答）に近寄り、逆に体積比率 f が大きい場合には下界に近づいている。これは Hill の self-consistent 法¹¹⁾ による予測が示す特性と全く逆の傾向を示しており、興味深い。またエネルギー的な考察から尤度の高い平均場を誘導¹²⁾ した場合の特性とも逆になっている。近年、森・田中手法では母材と介在物の間の相互作用を過小評価しているという指摘¹³⁾ もある。体積比率が大きい方を母材と捉える方が自然であるという考え方を念頭に置くと、Hashin-Strikman の上界（逆の森・田中予測）は、そうした相互作用を最も強めに見積もったときの解と考えられる。

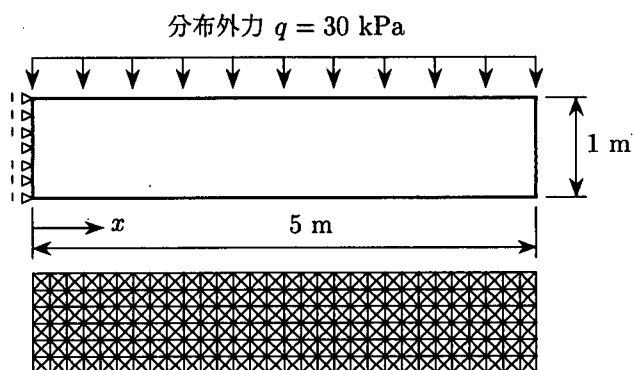


図-5 構造部材の解析対象と要素分割

4. 境界値問題の例

4.1 繊維補強コンクリート梁 — 構造部材の例

構造部材の例として、コンクリート片持ち梁の炭素繊維による補強を検討する。解析対象を図-5に示した

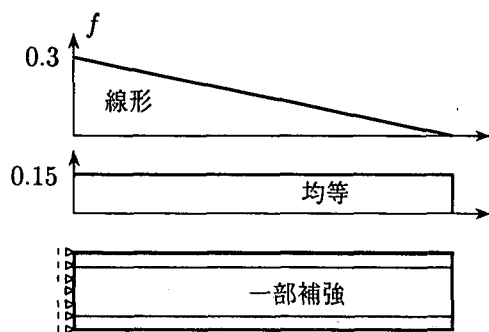


図-6 部分的補強の場合の介在物の分布

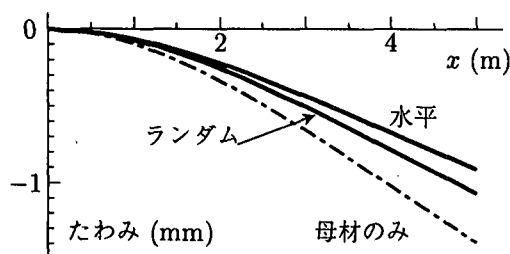


図-7 全領域補強の場合のたわみ

が、スパンが5 m でけた高が1 m の長方形領域を左側辺で図示したように支え、上辺に等分布外力を与えた。要素分割は同図に示したように6層30列の計720要素とした。なお、平面ひずみ連続体要素で構造解析をした場合に誤差が大きいことはよく知られているが、ここでの目的はその精度検証ではなく繊維補強効果の比較なので、わかり易い例として梁を対象とした。

材料は炭素繊維で補強されたコンクリートを想定し、母材のヤング率を $E_M = 20 \text{ GN/m}^2$ 、ポアソン比を $\nu_M = 0.2$ とし、介在物のヤング率を $E_I = 400 \text{ GN/m}^2$ 、ポアソン比を $\nu_I = 0.2$ と設定した。実際の炭素繊維は径と長さの比が30から50等と考えられるが、ここでは平面ひずみ問題としてしまっているために膜状の介在物を導入していることになるので、あまり現実的なことには執着せず、 $\alpha = 5$ の半径比とした。また繊維の含有率も実際には重量比率で5%弱程度までで、体積比率でも1~2%程度であるが、ここでは介在物の影響がより顕著に現れるように多目の15%とした。

補強の仕方は次のように

1. 比較のためのコンクリートのみの場合 [母材のみ]
2. 全領域に炭素繊維を分布させる場合で
 - (a) 乱数発生に基づいた任意の方向に15%の介在物を分布させた場合 [ランダム]
 - (b) 水平方向のみに15%の介在物を分布させた場合 [水平]
3. 図-6のように6層の要素のうち上下2層の計240

表-1 補強の仕方とたわみ比の改善度

	森・田中	逆の森・田中
母材のみ	1	1
ランダム	0.770	0.495
水平	0.658	0.325
一部均等	0.734	0.417
一部線形	0.614	0.314

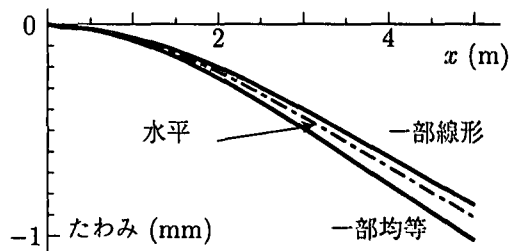


図-8 部分補強の場合のたわみ

要素 (網掛けした部分) のみを部分的に炭素繊維で補強する場合で

- (a) 15% の水平方向の介在物を均等に分布させた場合 [一部均等]
- (b) 図-6 の上に示したように、埋め込み端側を大目にするが平均は15%になるよう、左端から正方形を形成する4要素毎に30%から28%...2%, 0%と線形に分布させた場合 [一部線形]

と、無補強を含めて5種類を想定した。

まず、全領域を補強した場合の結果をそのたわみ形状によって図-7に示した。当然補強によって剛性が増しているし、主に水平方向の直応力で抵抗するのが梁であることから、「水平」補強が最も剛性を改善している。「母材のみ」の場合と比較して補強効果を比較するために、先端のたわみの比率を表-1に示した。「ランダム」な場合には約30%、「水平」の場合には約52%もその剛性が改善されている。表-1には、前節で上下界と比較したときに説明した逆の森・田中評価によるたわみ比も示した。逆の森・田中理論を利用した剛性の上界を予測することから、たわみはより小さめに予測されている。オリジナルの森・田中と逆のそれを上下界のようにみなすと、ここでの予測は少し幅の大きい予測になっている。

次に、鉄筋コンクリート梁の引張り側亀裂のブリッジング対策を兼ねる場合を想定した、部分的な補強を検討する。その2つの補強策によるたわみ性状を図-8に示した。同図には、全領域を補強した場合に最も改善度が高かった「水平」分布の場合のたわみも含めてある。こ

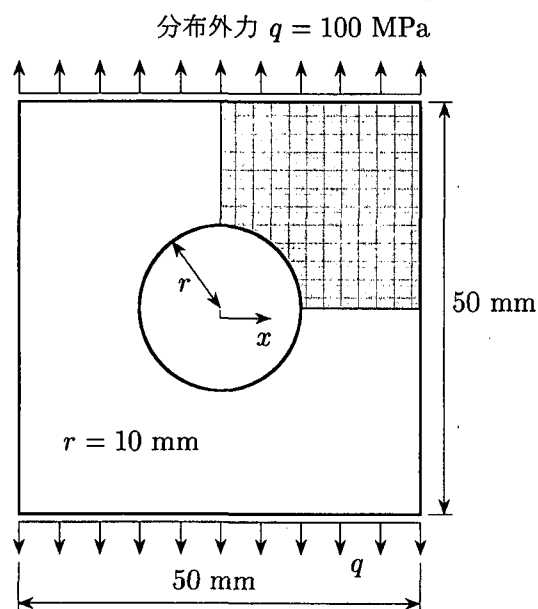


図-9 連続体の解析対象モデル

れも当然であるが、梁の上下部分のみの補強で、全領域の「水平」補強に匹敵する補強効果が現れている。同じように、たわみの改善比率を表-1に示した。

ここでは、補強の仕方が与えられたものとして有限要素解析をしている。しかし前述のように、要素剛性行列は介在物の比率や形状比の陽な表現になっているので、例えば確率有限要素法も比較的容易に適用可能と考えられ、補強効果の感度等がある程度簡単な計算でできると期待できる。また解析的な表現で行列が与えられていることから、最適設計も比較的簡易にできる可能性がある。そういった手法が確立できれば、例えば剛性を最も小さくするような補強材の形状・方向・分布を求めることが可能になる。

4.2 円孔まわりの応力集中の補強 — 連続体の例

次に連続体への応用として、図-9に示した円孔まわりの領域の応力集中を対象にする。無限領域の場合のひとつの解は求められており、円孔表面での応力集中係数が3である。ここでは側辺の自由表面が孔に近い有限領域を故意に解析し、その応力集中と補強の関係を考察したい。また、比較のためにユニットセルを数値解析した標準的な均質化手法も適用し、それをここでは正解と捉え、森・田中予測の定量的な位置付けを明確にしたい。

解析対象の対称性から図-10に示す四分の一領域を解析する。境界条件は下辺を鉛直方向固定で水平方向自由とし、左辺を水平方向固定で鉛直方向自由とした。分布外力は上辺のみに与える。材料は文献¹⁴⁾を参考にしてSiC補強のアルミニウム複合材料とした。本来なら応力の集中する円孔の脇の部分のみの補強で十分なはずだ

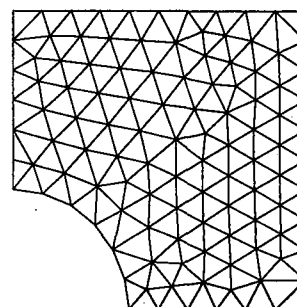


図-10 解析対象の要素分割

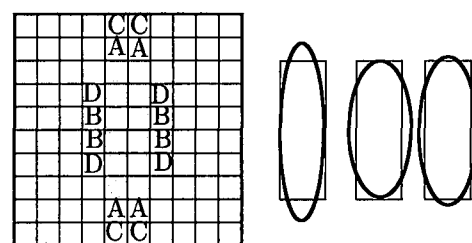


図-11 ユニットセルの定義と介在物の楕円近似

が、前述のように均質化手法との比較も目的としているので、簡単のために領域全体に同種の介在物を分布させた。母材のアルミニウムのヤング率は $E_M = 60 \text{ GN/m}^2$ でポアソン比は $\nu_M = 0.3$ とし、介在物のSiCのヤング率は $E_I = 400 \text{ GN/m}^2$ でポアソン比は $\nu_I = 0.2$ とした。介在物の体積比率は12%である。対応する均質化手法のユニットセルを図-11の左側に示したが、100個の正方形要素の中に12個（網掛け部分で体積比率が12%）の介在物が存在するようなセルになっている。

実際の介在物が回転楕円体であることは稀なので、図-11のような長方形で介在物形状を与えてある。このユニットセルと同じ森・田中の複合材料要素を設定する場合、長方形の介在物を楕円形で近似する必要がある。図-11の右側にその近似の考え方を3つ示したが、例えば短径を同じにして体積比率を同じにする場合には $\alpha = 3.82$ になる。また長径を揃えた場合には $\alpha = 2.36$ 、両方の径を同じ比率で伸ばした場合には $\alpha = 3$ である。また両方の径を同じ長さだけ伸ばす場合には $\alpha = 2.67$ という選択もある。ここでは中間的な $\alpha = 3$ を基本的に用いることにし、剛性の比較においては最小値最大値の $\alpha = 2.4, 3.8$ を検討する。

なお後述のように、ユニットセル内の応力集中も局所的には大きくなる。これは周期構造の境界近くまで長方形の介在物を配置してしまったこともひとつの原因であるが、ここでは数値例を示すためにこのセルを用いている。実際の補強効果についての検討は、今後の課題である。

表-2 3つの手法が予測する要素の平均弾性係数 (GN/m²) と変位 (mm)

	α	$\overline{C}_{11}$	$\overline{C}_{12}$	$\overline{C}_{22}$	$\overline{C}_{66}$	変位
逆森・田中	3.8	93.9	39.6	114	29.0	-
	3.0	94.9	40.0	105	29.4	0.061
	2.4	96.1	40.4	110	29.8	-
均質化手法		91.2	37.4	101	26.3	0.067
森・田中	3.8	90.3	38.3	98.4	26.4	-
	3.0	90.5	38.4	96.5	26.5	0.070
	2.4	90.7	38.4	95.7	26.6	-

(1) 一要素の剛性の比較

前節の楕円近似の設定で森・田中理論を用いて求めた一要素の弾性係数と、標準的均質化手法によって図-11のユニットセルの「ミクロ解析」から得られる弾性係数とを、表-2に示した。直応力に関連した部分の $\overline{C}_{12}$ を除くと、均質化手法の結果は、森・田中理論を利用した低めの予測値と逆森・田中の高めの予測値の間にうまく収まる。表の各列で、上添え線で示したのはその列の最大値の予測であり、下線で示したのが最小値である。しかも、森・田中の予測値と均質化手法の値との差異は最大でも10数%である。ただし、せん断弾性係数については、森・田中理論を用いた予測値のどれよりも小さい値を均質化手法は与えている。しかしその差異はやはり小さい。もちろんユニットセル内の介在物が楕円でないものを楕円近似した森・田中手法の近似による差異も含まれるわけであるが、現実には楕円形状の介在物の方が稀であることを考え、形状近似の差異と手法の差異を混在させたまま解析してしまっている。

(2) 境界値問題の解の比較

半径比を $\alpha = 3$ とした場合の2種類の森・田中要素の解と均質化手法によるマクロの解との比較をする。表-2に示した剛性の差異は、個々の要素では10%弱である。剛性の簡便な比較のために、対角主要項の平均値を 3×3 の剛性行列の行列式の三乗根で代表させると、その値の差は2.2あるいは6.2%程度にしかならない。同じ表に示した変位の値は、図-10に示した四分の一の対象領域の上辺左端での値である。この差異は、森・田中予測で3.7%、逆の森・田中で9.6%程度になっていて、剛性の差異の程度にはほぼ対応している。

これに対して定ひずみ要素内の応力の値と分布を図-12に示したが、ほとんど差が現れない。この図は、森・田中有限要素解と、均質化手法による剛性を用いたマクロ定ひずみ三角形要素によって得られた解のうち、図-10の網掛けされた一列の要素部分の主引張り方向の応力分布 $\overline{\sigma}_{22}$ を示したものである。図の縦軸は要素内平均応力を分布外力 q で割った応力集中係数であり、横軸は

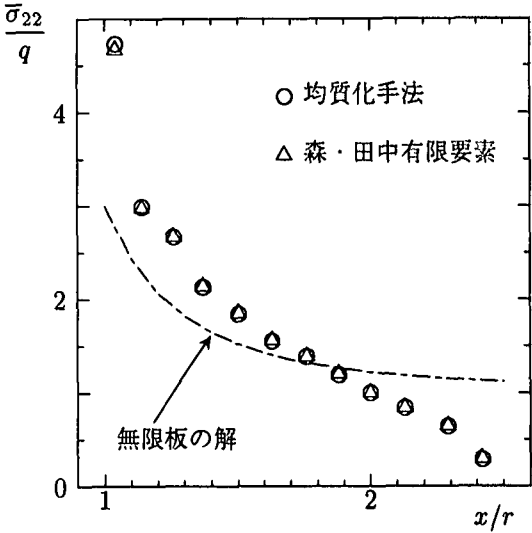


図-12 有限要素内の平均応力分布

図-9に示した円孔中心から各三角形要素の図心までの水平距離 x を円孔の半径 r で割った値である。また同図には、無限体の場合のAiryの応力関数による解¹⁵⁾も一点鎖線で示しておいた。有限幅の領域であるため応力集中は3以上になり、同時に自由表面に近づくとき無限領域の場合の解よりも小さい値になっている。

均質化手法による解と森・田中有限要素の解はほとんど重なっていて区別がつかない。これは、前節で求めた一要素の剛性とユニットセルの剛性との差が小さいことがひとつの理由である。ここで用いたユニットセルの要素分割の程度と長方形介在物の楕円形近似を念頭に置くと、この程度の差異しか生じないことは興味深い。もっとも、対象とした問題は一種の静定系で、図-10の上辺と下辺の巨視的な力のつり合いを満足する解が求められるため、剛性の差異ほどの違いが応力解には生じなかったものとも考えられる。なお、逆の森・田中予測も重なるため図示していない。

次に繊維補強による応力集中の低減効果を見るために、母材部分の応力を同様に整理して図-13に示した。均質化手法ではマクロ解析で得られたひずみを図-11のユニットセル内の各要素の特性に代入すれば応力計算ができる。ただし、ここで均質化手法による平均解として実線で結んだ○印は、図-11に示したユニットセル内の母材部分である88個の要素の各応力の平均値である。森・田中要素の解は、図-12に示した応力を式(6)に代入して求めたものである。森・田中要素と均質化手法は、円孔そばでの応力集中を約4程度と予測しており、同図に示した補強無しの母材のみの集中度4.7よりも15%程小さく改善できている。また、ユニットセルを用いた均質化手法による解の平均値が森・田中理論に基づく結果(大きい▲印)に非常に近いことが明らかになった。

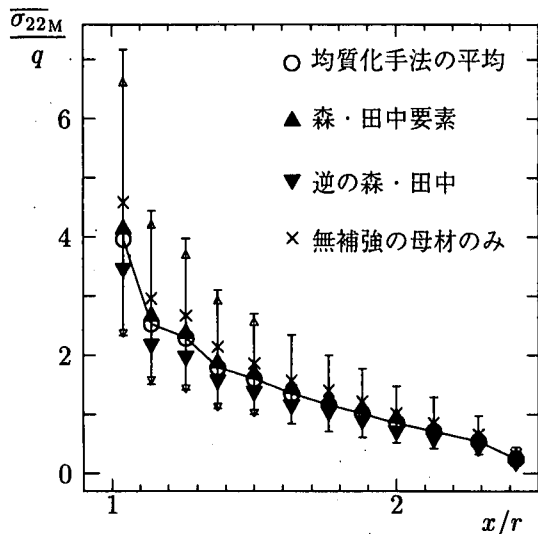


図-13 有限要素内の母材部分の応力分布

この同じ図で「誤差棒」のような表現で示されているのが、均質化手法によるユニットセルの母材部分 88 個の各要素の応力値の範囲を表したものである。また左から 5 本の誤差棒にのみ上下に小さい△あるいは▽印があるが、これはユニットセル内母材中の、次に大きいあるいは小さい応力値である。図-11 のユニットセル図で A で示された要素で応力の最大値が得られ、B の要素で最小値が得られている。C と D の要素が、その次に大きいあるいは小さい応力を持つ要素である。ミクロな構造によるユニットセル内の微視的な応力集中のような特性も、均質化手法の場合には算定できることは明らかである。それに比べると森・田中理論を利用した手法では単に平均値しか予測できないが、その値が均質化手法による平均値に近いことから、森・田中理論の有用性もそう簡単には否定できないと考えられる。前述のように、選んだセルの特性のために実際の局所的な応力集中は最大で 7 以上になっているが、このような補強効果についての考察はここでは避けたい。

また逆の森・田中手法による解も同図に大きな▽印で示した。この二つの森・田中予測▲▽印と実線で結んだ均質化手法による平均値○印との位置関係はどの箇所でも同じであり、やはり森・田中手法が均質化手法の上下界のような予測値になり得る可能性を示唆している。工学的にはやはり、森・田中理論を利用したような解析解の利用は意味があると考えられる。

最後に介在物中の同様の応力分布を図-14 に示した。当然であるが、介在物中の応力集中はかなり大きく、この反作用として母材中の応力が小さくなっていることは明確である。この場合も、均質化手法による解は常に森・田中理論および逆の森・田中理論の予測値の間に位置している。また、どちらかと言えば普通の森・田中の解(▽印)の方が均質化手法でのユニットセル中の介在

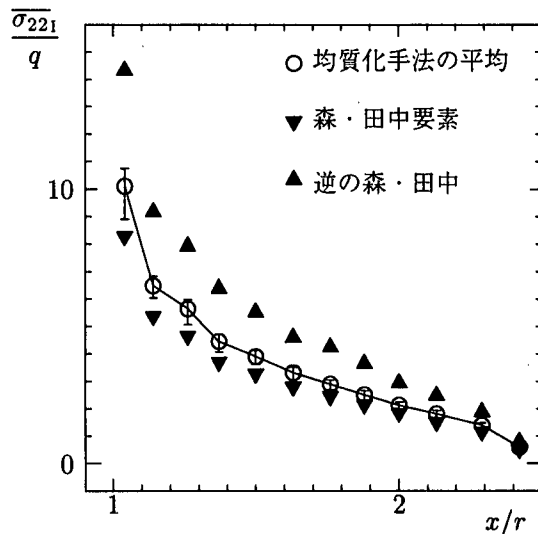


図-14 有限要素内の介在物部分の応力分布

物内での平均値(○印)に近いのは、母材部分の応力と同じ特性である。無限体中の一つの介在物が楕円形状であれば Eshelby が示したように内部の応力は一定になるはずである。このことと、ユニットセルの介在物中の要素数が少ないことから、均質化手法による応力値も母材ほどはばらつかず、誤差棒表示の応力の範囲は比較的小さい。

5. おわりに

森・田中理論を利用した平均化で得られる無限体の特性を、ユニットセルを用いる標準の均質化手法の「ミクロ」な部分にアナロジーとして流用し、その結果を利用した複合材料の有限要素を構築した。みかけ上の一様場での要素の特性を明らかにした上で、基本的な 2 つの境界値問題を解いた。その結果、次のような知見が得られた。

1. 要素毎に介在物の特性を変化させることにより、何らかの分布をもった材料のみかけの挙動を数値的に容易に計算することができた。
2. 楕円柱介在物がランダムに分布している場合のみかけの弾性係数は、ここで検討した材料・構造設定の範囲内では、円柱介在物のみが存在する場合の上下界の内側に位置する。
3. 現在標準的に行われているユニットセルを用いた均質化手法との比較から、本解析手法による解が実際にユニットセル内の諸量の平均値に非常に近いことを示すことができた。また、均質化手法によるユニットセル内平均値が、オリジナルの森・田中予測と逆の予測の間に位置することを示した。この結果は次のようなアプローチの可能性を示唆している。

- (a) 内部構造が多種多様分布しているような境界値問題を、まず森・田中要素が必要な程度の情報で簡便に解く。
- (b) 得られた平均場を用いて、必要な箇所に適切なユニットセルを設置してミクロ解析をすることによって、微視的な解析をする。

謝辞 — この研究は平成 15 年度科学研究費補助金基盤研究 (C)(課題番号 15560391) の補助を一部受けた。

参考文献

- 1) Mori, T. and Tanaka, K.: Average stress in matrix and average energy of materials with misfitting inclusions, *Acta Metall.*, Vol.21, pp.571-574, 1973.
- 2) 野瀬哲郎: 超低熱膨張セラミックスの開発, 東北大学 - 新日鉄シンポジウム「鉄と社会」, 東北大学未来科学技術共同研究センター/新日鉄技術開発本部, 2000.
- 3) Eshelby, J. D.: The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems, *Proc. Roy. Soc. London*, Vol.A241, pp.376-396, 1957.
- 4) Mura, T.: *Micromechanics of Defects in Solids*, Martinus Nijhoff Publ., 1982.
- 5) Omine, K., Ochiai, H. and Yoshida, N.: Estimation of in-situ strength of cement-treated soils based on a two-phase mixture model, *Soils and Foundations*, Vol.38, No.4, pp.17-29, 1998.
- 6) Hashin, Z. and Shtrikman S.: A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.11, pp.127-140, 1963.
- 7) Weng, G.J.: The theoretical connection between Mori-Tanaka's theory and the Hashin-Shtrikman-Walpole bounds, *Int. J. Engng. Sci.*, Vol.28, pp.1111-1120, 1990.
- 8) 岩熊哲夫, 堀 宗朗, 森 勉, 村外志夫: 複合材料の平均的な硬化係数と延性の評価, 構造工学論文集, Vol.37A, pp.435-442, 1991.
- 9) Desai, C.S. and Abel, J.F.: *Introduction to the Finite Element Method*, Van Nostrand Reinhold Co., 1972, 山本善之訳: マトリックス有限要素法 — 基礎理論とその応用 —, 科学技術出版社, 1974.
- 10) Nemat-Nasser, S. and Hori, M.: *Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials*, North-Holland, 1993.
- 11) Hill, R.: A self-consistent mechanics of composite materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.13, pp.213-222, 1965.
- 12) 小山 茂, 岩熊哲夫, 岩崎智昭, 小倉崇生, 三井康司: 複合材料と多結晶体の平均的な性質, 土木学会論文集, No. 661/I-53, pp.265-272, 2000.
- 13) Ju, J.W. and Chen, T.M.: Effective elastic moduli of two-phase composites containing randomly dispersed spherical inhomogeneities, *Acta Mech.*, Vol.103, pp.123-144, 1994.
- 14) Sun, L.Z. and Ju, J.W.: Effective elastoplastic behavior of metal matrix composites containing randomly located aligned spheroidal inhomogeneities. Part II: Applications, *Int. J. Solids Structures*, Vol.38, pp.203-225, 2001.
- 15) Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N.: *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., Tokyo, 1970

(2003 年 4 月 18 日 受付)