

主双対内点法による混合型剛塑性有限要素法の開発

Development of Hybrid Rigid Plastic Finite Element Method Based on Primal-dual Interior Point Method

小林俊一*

Shun-ichi KOBAYASHI

*正会員 修士(工学) 京都大学大学院助手 工学研究科土木工学専攻(〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

Rigid plastic analysis is widely used for the analyses of metal forming process or bearing capacity problems. Theory and numerical formulation of rigid plastic analysis is investigated from the point of nonlinear optimization, in this paper. At first, duality of the upper bound analysis and the lower bound analysis is expounded from the theory of Lagrangian duality. Then, the interior point method is applied for the duality and the complementarity of the rigid plastic analysis to formulate the hybrid rigid plastic finite element method (HRPFEM). A numerical code of the HRPFEM is developed to examine its performance. Three different meshes for the same surface loading problem are used to check the validity and the convergence of the numerical analysis.

Key Words : rigid plastic analysis, finite element method, nonlinear optimization, interior point method

1. はじめに

塑性加工や地盤の支持力問題など、物体の塑性変形が卓越する境界値問題では、しばしば弾性変形を無視した剛塑性境界値問題として解かれる。この解析法を剛塑性解析と呼ぶ。剛塑性解析と弾塑性解析とを比較すると、剛塑性解析では

1. 初期応力分布を知る必要がない
2. 荷重係数が解として得られるので工学的に理解しやすい

といった特徴がある。剛塑性解析の指導原理は極限定理である。極限定理は、静力学定理である下界法と運動学定理である上界法からなるが、その中で本質的に重要なのは、問題の凸性を規定する最大塑性仕事の原理¹⁾あるいは関連流れ則²⁾である。

さて、剛塑性境界値問題をシステマチックに解く数値解析法として、塑性加工の分野では剛塑性有限要素法が開発されてきた³⁾。その定式化は、流れ則に基づく塑性ひずみ増分を制約条件として、上界法により荷重係数を決定するものである。一方、地盤工学分野では、Terzaghiの支持力公式⁴⁾とその拡張^{5),6)} 各種の安定解析法^{7),8),9),10)} など実務的な解析方法の開発が先行し、応用力学的な視点から剛塑性境界値問題を解く研究は盛んではなかった。その中で、田村らは土構造物の安定問題に剛塑性有限要素法を適用し、その定式化と数値解析結果を報告している^{11),12)}。また、浅岡らは不均質地盤や異方性地盤上の浅い基礎の支持力問題について剛塑性有限要素法の適用例を報告している¹³⁾。

従来の剛塑性有限要素法を最適化理論の枠組で整理すると、関連流れ則に従うように塑性ひずみ増分の方に制約条件を課し、上界法の意味で荷重係数を最小化する非線形最適化問題と捉えられる。したがって、非線形最適化理論から極限定理の数理的な構造を検討す

ることは、本質的であり重要であると考えられる。

Kamenjarzh¹⁴⁾によると、極限解析法を数理的な観点から検討し、凸計画問題の極値問題であることを最初に指摘したのはNayroles¹⁵⁾であるという。一方、上界法と下界法の双対性に着目し、有限要素法による空間離散化と区分的線形な降伏関数の導入により、崩壊荷重の範囲を数値的に評価する解析法については、Christiansen¹⁶⁾などが先駆的な研究例である。しかし、その後のほとんどの剛塑性問題の数値解析的研究は、上界法に基づく剛塑性有限要素法について為されており、極限解析の双対性あるいは下界法について注意を払うものは多くはなかった。

さて、線形計画法の分野では1984年のKarmarkar法¹⁷⁾をブレークスルーとして、従来からのシンプレックス法に代わる大規模問題の有力解法として内点法が急速な発展を遂げてきた。その結果、大規模線形計画問題については、主双対内点法が実質的に最も強力な高速解法であることが認識されるようになった¹⁸⁾。またより一般的な凸計画問題への応用についても積極的に研究が進められている。

このような背景のもと、Andersen & Christiansen¹⁹⁾は文献¹⁶⁾の例題をアフィンスケーリング法に基づく主双対内点線形計画法で解き、数値解析解の改善が図れたことを報告している。さらに、彼らは降伏関数が2次形式で表されることを利用して、ユークリッドノルム最小化に基づく非線形最適化問題を主双対内点法の視点から議論している^{20),21)}。この方法はノルム最小化問題という特殊な非線形最適化問題に特化した解法ではあるが、数値実験結果は良好であることが報告されている。これら一連の研究により、主双対内点法に基づく非線形最適化は、問題の大規模化と解析の高速化に対応し得る強力かつ有望な解析法であることが、数値実験の面からも明らかにされつつある。

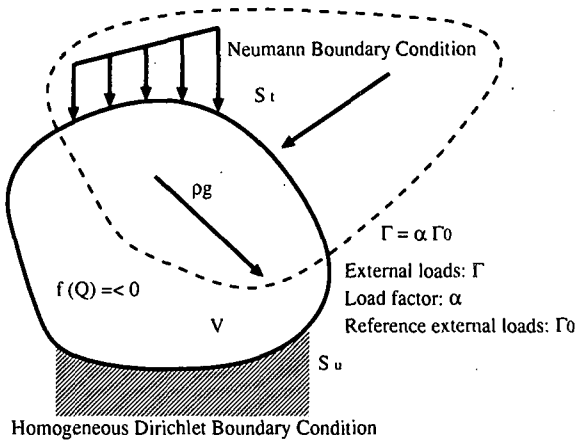


図-1 対象とする剛塑性問題

さて、本論文では構造力学や土質力学などで取り扱う剛塑性境界値問題を念頭に置き、主双対内点法に基づく混合型剛塑性有限要素法の定式化を具体的に導出する。具体的には、従来の伝統的な極限解析法の表記法に忠実な分かりやすい形で、極限解析法の双対性を確認する。双対性の導出方法としては、下界法に基づくLagrangianを定義し、Lagrange双対性を利用して上界法を導出する。さらに相補性条件と双対ギャップとの関連性について説明する。その上で、最適解を探索する方法として相補性条件に着目し、双対ギャップを単調に減少させて収束を図るパス追跡型主双対内点法による混合型剛塑性有限要素法の定式化を行う。さらに、提案した定式化に基づく数値解析コードを実際開発して、その性能を数値実験で調査し、計算結果の妥当性や収束性状に関する検討を行う。

2. Lagrange 双対性と極限定理

2.1 対象とする剛塑性境界値問題

本論文では、図-1に示すように、荷重として、領域Vで物体力 ρg を、ノイマン境界 S_o で表面力 $\Gamma = \alpha \Gamma_0$ を受ける剛塑性体の境界値問題を検討する。剛塑性体の降伏関数を $f(Q)$ とし、関連流れ則に従うと仮定する。ここに Q は応力である。またディリクレ境界条件 S_u は固定境界、つまり変位速度がゼロとなる境界条件 $\dot{u} = 0$ を考える。この剛塑性境界値問題では、塑性限界時の荷重係数 α^* を評価することとし、基準となる荷重を Γ_0 、塑性限界時の荷重を $\Gamma = \alpha^* \Gamma_0$ と表しておく。

2.2 下界法

下界法では、釣合を満たす応力場でしかも降伏条件を破らないもののうち、最大の荷重係数を与える応力場を求める方法である。

一般に釣合を満たす応力場 Q は、外力、すなわち非斉次ノイマン境界条件として与えられる表面力と物体力に対して釣合を満たす応力場と、ゼロ外力、つまり斉次ノイマン境界条件およびゼロ物体力に対して釣合を満足する任意の残留応力場 Q^r との和で表せる。ここでは簡単のため、釣合を満たす応力場として弾性解

Q^E を利用する。剛塑性問題の場合は弾性変形は無視するので、この弾性解の物理的な意味付けは特にはないが、応力場の性質を議論するために導入したと考えれば良い。基準となる荷重 Γ_0 とその弾性解 Q^E を用いると、荷重係数 α の荷重 Γ に対する応力場の一般的表現は

$$Q = \alpha Q^E + Q^r \quad (1)$$

と書ける。またこの表現は、応力を弾性応力と残留応力に分解できるとみてもよい。

有限要素法による空間離散化を用いて、残留応力場 Q^r の釣合式を弱形式で表すと

$$\int_V B'^T Q^r dV = 0 \quad (2)$$

と書ける。ここに行列 B' は、通常の B マトリクスからディリクレ条件にあたる節点を縮約した行列である。さらに、式(2)の領域積分をガウスの数値積分による代数演算に置き換え、応力場を積分点ごとに空間離散化する。

このように空間離散化した境界値問題を記述するために、本論文ではこれ以降、応力 Q 、残留応力 Q^r および弾性応力 Q^E は、積分点ごとの応力成分を集めたベクトルとして表記する。同様に、マトリクス B' についても、数値積分による重みやヤコビアンを考慮し、各積分点での局所的な B マトリクスを重ね合わせ、ディリクレ条件にあたる節点を縮約した行列として表記する。このルールに基づく、残留応力場の弱形式の釣合式は以下のように形式的に書ける。

$$B'^T Q^r = 0 \quad (3)$$

同様に、降伏条件についても有限要素法による空間離散化を行う。応力が降伏条件を破らないためには各積分点 i について

$$f_i(\alpha Q^E + Q^r) + s_i = 0, s_i \geq 0 \quad (4)$$

を満足する必要がある。ここに s_i は非負のスラック変数である。

これらをまとめると下界法は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} & \text{Find } \alpha \rightarrow \max \\ & \text{Subject to } Q = \alpha Q^E + Q^r \\ & B'^T Q^r = 0 \\ & f_i(Q) + s_i = 0, s_i \geq 0 \end{aligned} \quad (5)$$

2.3 Lagrangian

次に式(5)に示す下界法について、以下のLagrangianを考える。

$$L(\alpha, Q, Q^r, s_i, \lambda_i, \kappa, \mu, t_i) = \begin{cases} \alpha + \kappa \cdot (B'^T Q^r - 0) - \sum_i \lambda_i (f_i(Q) + s_i) \\ \quad + \mu \cdot (Q - \alpha Q^E - Q^r) + \sum_i s_i t_i \\ \quad \text{for } t_i \geq 0 \\ +\infty \\ \quad \text{otherwise} \end{cases} \quad (6)$$

ここに変数 $\lambda_i, \kappa, \mu, t_i$ は、それぞれ応力が降伏条件を破らない条件(式(4))、残留応力場の釣合式(式(3))、応力場の表現(式(1))およびスラック変数 s_i の非負性に対応したLagrange乗数である。

さて、Lagrange乗数 $\lambda_i, \kappa, \mu, t_i$ についてLagrangianの下限をとると

$$\inf \{L | \lambda_i, \kappa, \mu, t_i\} = \alpha$$

$$\text{Subject to } \begin{cases} f_i(Q) + s_i = 0 \\ B'^T Q^r = 0 \\ Q = \alpha Q^E + Q^r \\ s_i \geq 0 \end{cases} \quad (7)$$

となり、確かに下界法で課せられる制約条件が導出できる。

下界法を式(6)のLagrangianの立場から見れば、Lagrange乗数に関する下限(式(7))について変数 Q^r, s_i に関する上限を求める解析法であると理解できる。これを具体的に示すと以下の通りである。

$$\begin{aligned} & \sup \{ \inf \{L | \lambda_i, \kappa, \mu, t_i\} | Q^r, s_i \} \\ & = \sup \{ \alpha | Q^r, Q, s_i \} \\ & \text{subject to } \begin{cases} f_i(Q) + s_i = 0 \\ B'^T Q^r = 0 \\ Q = \alpha Q^E + Q^r \\ s_i \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

2.4 上界法

上界法は変形の適合条件を満足し、しかも関連流れ則に従う速度場について、内部消散率と外部塑性仕事率を評価し、最小の荷重係数を与える速度場を求める方法である。ここでは、式(6)のLagrangianに関してそのLagrange双対性から上界法を導出する。

まず変数 α, Q^r, s_i についてLagrangianの上限をとってみよう。そうすると、それぞれ付帯条件

$$1 - \mu \cdot Q^E = 0 \quad (9)$$

$$B' \kappa - \mu = 0 \quad (10)$$

$$t_i - \lambda_i = 0, \quad t_i \geq 0 \quad (11)$$

が課せられる。この付帯条件からLagrange乗数 μ, κ の物理的な意味を検討する。

式(9)は外部塑性仕事率 $\dot{W}_{ext}$ が1となることを表しており、 μ は積分点での塑性ひずみ速度を表していると言える。ただし、正確には以下に示すように、数値積分の意味で重みやヤコビアンを考慮した量となっている。

$$\int_V \dot{\epsilon}_{ij}^p \sigma_{ij}^E dV = \mu \cdot Q^E = 1 \quad (12)$$

ここに $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ は塑性ひずみ速度、 σ_{ij}^E は弾性応力を表す。また、塑性ひずみ速度が適合系であること、弾性応力が釣合系であることから、仮想仕事率の原理により、式(9)が外部塑性仕事率を表していることに注意する。さらに、外部塑性仕事率 $\dot{W}_{ext}$ と内部消散率 $\dot{W}_{int}$ の速度場に関する1次斉次性により、 $\mu \cdot Q^E = 1$ となる速度場を考えても一般性を失わないことに注意する。

つぎに式(10)の意味を考える。マトリクス B' およびベクトル μ が、数値積分の意味で重みやヤコビアンを考慮した量となっていることから、これは変形の適合条件を表しており、変数 κ は節点変位速度であることが分かる。また式(11)は、Lagrange乗数 λ_i の非負性を表している。

同様に変数 Q についてもLagrangianの上限をとる。この付帯条件は陽な形では表現できず、以下のように表される。

$$D(\mu, \lambda_i) = \sup \left\{ \mu \cdot Q - \sum_i \lambda_i f_i(Q) \mid Q \right\} \quad (13)$$

ここで $D(\mu, \lambda_i)$ の塑性係数 $\lambda_i \geq 0$ に関する下限 $\inf \{D(\mu, \lambda_i) \mid \forall \lambda_i \text{ such that } \lambda_i \geq 0\}$ を考えてみよう。Lagrange乗数 λ_i の非負性を考慮すると、 λ_i に関する下限が有界であるためには、それぞれの積分点における降伏関数値 $f_i(Q)$ が非正であることを要求する。つまり、下記の式が成立する。

$$\begin{aligned} & \inf \{D(\mu, \lambda_i) \mid \forall \lambda_i \text{ such that } \lambda_i \geq 0\} \\ & = \begin{cases} \sup \{ \mu \cdot Q \mid \forall Q \text{ such that } f_i(Q) \leq 0 \} \\ -\infty \quad \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

双対問題の解が存在するためには、式(14)の下限が有界である必要がある。また(14)の右辺第1式は、Hillによる最大塑性仕事の原理そのものを表していることに注意する。

この結果、 $D(\mu, \lambda_i)$ の $\lambda_i \geq 0$ に関する下限を取る代わりに、予め内部消散率 $\bar{D}(\mu)$ を

$$\bar{D}(\mu) = \sup \{ \mu \cdot Q \mid \forall Q \text{ such that } f_i(Q) \leq 0 \} \quad (15)$$

と定義すれば、これらは実質的に等価であると言える。それゆえ、双対問題は以下のように表される。

$$\begin{aligned} & \inf \{ \sup \{L | \alpha, Q^r, Q, s_i\} \mid \mu, \lambda_i, \kappa \} \\ & = \inf \{ \bar{D}(\mu) \mid \mu, \lambda_i, \kappa, t_i \} \\ & \text{subject to } \begin{cases} 1 - \mu \cdot Q^E = 0 \\ B' \kappa - \mu = 0 \\ t_i - \lambda_i = 0, \quad t_i \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

この式 (16) より、上界法は以下のような解析法であると理解できる。つまり、基準となる荷重 Γ_0 に対して、外部塑性仕事率 $\dot{W}_{ext} = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{Q}^E = 1$ 、ひずみ速度～変位速度関係 $\mathbf{B}^T \boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\mu}$ 、塑性係数の非負性 $\lambda_i \geq 0$ の条件を満足するような速度場のうち、最小の内部消散率 $\bar{D}(\boldsymbol{\mu})$ を与える速度場を求める方法である。

また、式 (15) の表現から内部消散率 $\bar{D}(\boldsymbol{\mu})$ の停留条件を求めると、

$$\boldsymbol{\mu} - \sum_i \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{Q}} = \mathbf{0}, \lambda_i \geq 0 \quad (17)$$

となる。つまり、Hill の最大塑性仕事の原理は関連流れ則と等価であることが分かる。また変数 λ_i は物理的には塑性乗数を意味することが分かる。

さらに、式 (16) の制約条件と、式 (17) の関連流れ則は、式 (6) の Lagrangian について、変数 $\alpha, \mathbf{Q}, \mathbf{Q}^r, s_i$ に関する勾配がゼロである条件に対応していることにも注意しておく。

2.5 双対ギャップと相補性条件

前述の議論では、式 (6) の Lagrangian に基づいて、上界法と下界法の双対性を示した。ここでは、さらにその双対ギャップの性質について検討する。

上限の定義より、与えられた塑性ひずみ速度 $\boldsymbol{\mu}$ と非負の塑性定数 $\lambda_i \geq 0$ に対して、以下の不等式が任意の応力 $\mathbf{Q}$ について成立する。

$$\begin{aligned} D(\boldsymbol{\mu}, \lambda_i) &= \sup \left\{ \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{Q} - \sum_i \lambda_i f_i(\mathbf{Q}) \mid \mathbf{Q} \right\} \\ &\geq \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{Q} - \sum_i \lambda_i f_i(\mathbf{Q}) \end{aligned} \quad (18)$$

ここで、応力として塑性学的に許容な釣合系の応力 $\mathbf{Q}^0 = \alpha^0 \mathbf{Q}^E + \mathbf{Q}^{r0}$, $f_i(\mathbf{Q}^0) + s_i^0 = 0$, $s_i^0 \geq 0$ を用いても不等式は成立する*。

したがって双対ギャップ、すなわち上界法／下界法の2つの解析法により求まる上界値と下界値の差をとると

$$\begin{aligned} D(\tilde{\boldsymbol{\mu}}, \tilde{\lambda}_i) - \alpha^0 &\geq \tilde{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{Q}^0 + \sum_i \tilde{\lambda}_i s_i^0 - \alpha^0 \\ &= \alpha^0 (\tilde{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{Q}^E - 1) + \tilde{\boldsymbol{\kappa}} \cdot \mathbf{B}^{T0} \mathbf{Q}^{r0} + \sum_i \tilde{\lambda}_i s_i^0 \\ &= \alpha^0 (\tilde{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{Q}^E - 1) + \sum_i \tilde{\lambda}_i s_i^0 \end{aligned} \quad (19)$$

となる。ここに、記号 $\sim$ は運動学的に許容な速度場に属する量、 0 は塑性学的かつ静力学的に許容な応力場に属する量を表す。また、式 (1) の応力場の一般的表現、式 (3) の残留応力の釣合式、式 (10) の変形の適合条件を用いた。さらに式 (9) のように $\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{Q}^E = 1$ とな

る速度場を考えても一般性を失うことはないので、右辺第1項はゼロである。したがって、

$$D(\tilde{\boldsymbol{\mu}}, \tilde{\lambda}_i) - \alpha^0 \geq \sum_i \tilde{\lambda}_i s_i^0 \geq 0, \quad \tilde{\lambda}_i \geq 0, s_i^0 \geq 0 \quad (20)$$

が成立する。

この不等式 (20) の右辺は、この運動学的に許容な速度場に対する内部消散率と、ある静力学的かつ塑性学的に許容な応力場との間で、仮想仕事の定理により求めた (内部) 仮想仕事率の差であると見ることができる。また塑性乗数 λ_i とスラック変数 s_i の非負性により、不等式 (20) 右辺が非負であることにも注意する。

上界法では、さらに不等式 (20) の左辺について速度場に関する下限をとる操作を行う。一方、下界法では、不等式 (20) の右辺について、応力場に関する上限をとる操作を行う。ここで、下界法によって求めた荷重係数 α が有限で、しかも至るところで降伏関数の真の内部 $f_i(\mathbf{Q}) < 0$ となる釣合系の応力場が存在すると仮定しよう。この条件は非線形計画問題の Slater 制約想定にあたる。このとき凸計画問題の双対定理^{22), 23)} によれば、最適解においてこの双対ギャップがゼロになることが知られている。

実際問題として、この制約想定を満たさない剛塑性境界値問題は Appendix に示すように、ごく一部の特殊な問題に限定される。したがって、我々が通常取り扱う剛塑性境界値問題では、最適解において不等式 (20) の双対ギャップがゼロとなる。この条件を相補性条件という。つまり最適解 (上添字*) の塑性乗数 λ_i^* とスラック変数 s_i^* について、以下の相補性条件が成立する。

$$\boldsymbol{\Lambda}^* \mathbf{s}^* = \mathbf{0}, \quad \text{where } \boldsymbol{\Lambda}^* = \text{diag}(\lambda_i^*), \lambda_i^* \geq 0, s_i^* \geq 0 \quad (21)$$

この相補性条件を力学的に解釈すると以下の通りである。領域のある部分 V_1 における応力が降伏条件に達したときには、該当する積分点で $s_i = 0$, $i \in V_1$ となる。このとき、塑性変形が生じるため、塑性係数は $\lambda_i \geq 0$, $i \in V_1$ となる。一方、 V_1 以外の領域を V_2 と書くと、領域 V_2 では応力が降伏条件に達しておらず弾性変形を示すため、 $s_j > 0$, $\lambda_j = 0$, $j \in V_2$ が成り立つ。これをひとまとめにして記述したものが相補性条件である。この条件は最適解においてのみ成立する。

なお、領域 V_1 における塑性係数については必ずしも正ではなく、強相補性条件が常に成立するわけではない。これについては、次のような状態を考えれば理解できる。完全塑性材料では塑性ひずみ場は応力場によって一意には決定できず、周囲から受ける幾何学的な拘束条件に依存する。したがって、例えば、ひずみ制御で1軸試験を行う場合、荷重が降伏点に達したときに塑性変形が生じる可能性があるが、ちょうど降伏点に達した瞬間に変形を拘束してしまえば、塑性ひずみ成分はゼロになる。つまり、 $s_i = 0$ でしかも $\lambda_i = 0$ という状態が存在し得る。このため、必ずしも強相補性が成り立つわけではない。強相補性条件が成立しないことは、線形計画法との大きな相違点である。

* 対象問題に対して、そのような応力場が存在するかどうかについては、別に議論をする必要があるだろう。ここでは、そのような応力場が存在するものとして議論を進める。

3. 主双対内点法による定式化

これまでの議論で、上界法と下界法には双対性が成立し、その双対ギャップが相補性条件と深く関連しており、2つの非負変数の積 $\lambda_i \geq 0, s_i \geq 0$ で表せることを示した。そこで、この相補性条件を利用した剛塑性境界値問題の解法について検討する。

解法の基本原理は近似解から出発して最適解を推定する繰返し解法である。解析の収束については、相補性条件を利用して正からゼロに単調減少する数列を用い、逐次的に非負変数 s_i, λ_i の非負性を常に保証しながら解の更新を行う。このように、実行可能な多面体内部から最適解にたどる方法を一般に内点法という。

本論文では、パス追跡法に属する非実行可能点列内点法を用いて定式化を行った。この方法は、変数の非負性の代わりに対数バリア関数を導入し、中心化 Karush-Kuhn-Tucker 条件を用いて解を求める方法である。通常の Karush-Kuhn-Tucker 条件との相違は、相補性条件の中にバリアパラメータ（これは対数バリア関数に関する Lagrange 乗数と見ても良い）が含まれる点で、バリアパラメータを正からゼロに単調に減少させることにより、相補性条件を満足する解を求める。なお、非線形問題に対する内点法の理論については、成書^{18),24)}等を参照されたい。

また本論文で提案する解法は、一般的な鞍点型変分問題を混合型有限要素法で解く場合にも有効であると考えられる。鞍点変分問題と混合型有限要素法の数理解造については文献²⁵⁾に詳しい。

3.1 上界法、下界法および相補性条件

まず、上界法に課せられる制約条件を再掲しておく。

$$\begin{aligned} 1 - \mu \cdot Q^E &= 0 \\ B' \kappa - \mu &= 0 \\ \mu - \sum_i \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial Q} &= 0 \\ \lambda_i &\geq 0 \end{aligned} \quad (22)$$

これらの式から塑性ひずみ速度 μ を消去すると以下の式を得る。

$$\begin{aligned} 1 - \kappa \cdot B'^T Q^E &= 0 \\ B' \kappa - \sum_i \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial Q} &= 0, \lambda_i \geq 0 \end{aligned} \quad (23)$$

さらに式 (23) の第2式を用いて第1式を書き直すと

$$\begin{aligned} 1 - Q^E \cdot \sum_i \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial Q} &= 0 \\ B' \kappa - \sum_i \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial Q} &= 0, \lambda_i \geq 0 \end{aligned} \quad (24)$$

と書ける。

次に、下界法に課せられる制約条件についても再掲

すると

$$\begin{aligned} f_i(Q) + s_i &= 0 \\ B'^T Q^r &= 0 \\ Q &= \alpha Q^E + Q^r \\ s_i &\geq 0 \end{aligned} \quad (25)$$

である。これは式 (6) の Lagrangian において、変数 α, Q, Q^r, s_i の制約条件を表す。

塑性乗数 λ_i とスラック変数 s_i の相補性条件は、バリアパラメータとして正からゼロに単調に収束する数列 ε を導入すると、近似的に次のように表せる。

$$\Lambda s = \varepsilon e \quad (26)$$

である。ここにベクトル e は成分が全て1となるベクトル $e = (1, \dots, 1)$ である。バリアパラメータ ε の決め方については後述する。なお、バリアパラメータが $\varepsilon = 0$ 、すなわち最適解のときに、厳密な相補性条件が成り立つことに注意する。

以後、これらの式 (24), (25), (26) を全て満足するような解を求める方法を議論する。

3.2 Karush-Kuhn-Tucker 条件と極限解析法

非線形計画問題では、解の最適性の必要条件として Karush-Kuhn-Tucker 条件 (KKT 条件)^{26),27)} が知られている。ここでは、これまでの議論に基づいて KKT 条件と極限解析法の関係について簡単にまとめておく。

式 (6) の Lagrangian $L(\alpha, Q, Q^r, s_i, \lambda_i, \kappa, \mu, t_i)$ を再度取り上げよう。下界法とは式 (5) に示されるように、応力の釣合を満し、かつ降伏条件を破らないという制約条件のもとで、変数 α, Q, Q^r, s_i について、目的関数（ここでは荷重係数）を最大化する解析法であった。したがって、Lagrangian L を変数 α, Q, Q^r, s_i について最大化することと同じである。

さて、 L が変数 α, Q, Q^r, s_i について最大値を取る場合を考えよう。このときに成り立つ必要条件が KKT 条件である。まず、 L が最大値を取る必要条件是、変数に対応する方向の勾配がゼロとなることである。すなわち、

$$\nabla_{\{\alpha, Q, Q^r, s_i\}} L = 0 \quad (27)$$

これを具体的に書き下すと、上界法の制約条件式 (23) となる。また、このとき変数は実行可能である必要がある。したがって、 L に含まれる制約条件項も満足されなければならない。つまり下界法の制約条件式 (25) が成り立つ。さらに不等号制約について、有効な制約条件に対する Lagrange 乗数がゼロになるという相補性条件 (26) も成立する。

これらをまとめると、Lagrangian L を変数 α, Q, Q^r, s_i に関して最大化する問題の KKT 条件は、上界法に課せられる制約条件式 (23)、下界法に課せられる制約条件式 (25) および相補性条件式 (26) と等価であることが分かる。

ここで従来の下界法 (式 (5)) との比較を行ってみよう。KKT 条件から見ると従来の下界法は、式 (25) の制約条件と式 (26) の相補性条件の一部（スラック変

数 s_i の非負性) だけを使って、荷重係数の最大化を図る解法である。何らかの方法で荷重係数の最大化を図り、最適解に到達したときには、残りの KKT 条件も満足されることが保証される。しかし、最適解を求める過程では KKT 条件の半分だけを使っているに過ぎない。主双対問題は互いに入れ換えることが可能であるので、同様の議論は従来の上界法 (式 (16)) についても成立する。

従来の極限解析法が相補性条件の一部分しか使用していないことは、これらの解析法の収束性を考える上で重要である。例えば、上界法に基づく剛塑性有限要素法では、剛塑性体の構成式 (応力～塑性ひずみ速度関係) をひずみ速度の関数に書き下して利用しているが、この種の構成式はひずみ速度がゼロとなる剛体域で応力が無限大に発散してしまう。このため、数値解析上は相当塑性ひずみ速度に閾値を導入して塑性域と剛体域を判別し、この問題を工学的に回避している^{(11),(12),(13)}。しかしながら、相補性条件を用いると、対応する物質点の状態を剛体/塑性/中立のいずれかに判別可能であるため、上界法に基づく剛塑性有限要素法で生じる困難は自動的に回避できると思われる。

3.3 増分形の方程式と探索方向

ここでは、方程式 (24), (25), (26) を解くために、ニュートン法に基づく増分形で記述し、解の探索方向を決める方程式を示す。

上界法による制約条件式 (24) を増分形で書くと次のとおり。

$$\begin{aligned} (E^T Q^E) \cdot \Delta \lambda + \Delta \alpha Q^E \cdot C Q^E \\ + (C^T Q^E) \cdot \Delta Q^r = 1 - Q^E \cdot g^0 \\ E \Delta \lambda + \Delta \alpha C Q^E \\ + C \Delta Q^r - B' \Delta \kappa = B' \kappa^0 - g^0 \end{aligned} \quad (28)$$

ここに各積分点での降伏関数のヘシアンに塑性乗数を乗じたものを取りまとめた行列を C 、各積分点での降伏関数の勾配を取りまとめた行列を E 、各積分点での降伏関数の勾配に塑性乗数を乗じたものを取りまとめたベクトルを g と表し、それぞれ以下のように定義する。

$$C = C^T = \begin{bmatrix} \lambda_1 \frac{\partial^2 f_1}{\partial Q \partial Q} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p \frac{\partial^2 f_p}{\partial Q \partial Q} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$E = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial Q} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{\partial f_p}{\partial Q} \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$g = \begin{bmatrix} \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial Q} \\ \vdots \\ \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial Q} \end{bmatrix} \quad (31)$$

ここで p は全積分点数である。また応力 Q は荷重係数 α と残留応力 Q^r を用いて消去している。

同様に、下界法による拘束条件 (25) を増分形で書くのと以下のとおり。

$$\begin{aligned} \Delta \alpha E^T Q^E + E^T \Delta Q^r + \Delta s &= -f^0 - s^0 \\ B'^T \Delta Q^r &= -B'^T Q^{r0} \end{aligned} \quad (32)$$

ここに f は各積分点の降伏関数の値をまとめた行列で以下のように定義する。

$$f = \begin{bmatrix} f_1(Q) \\ \vdots \\ f_p(Q) \end{bmatrix} \quad (33)$$

したがって、これらの関係式より変数の増分に関する連立一次方程式が以下のように導かれる。

$$\begin{bmatrix} E & -B' & C & (C Q^E) & 0 \\ (E^T Q^E)^T & 0 & (C Q^E)^T & Q^E \cdot C Q^E & 0 \\ 0 & 0 & E^T & (E^T Q^E) & 1 \\ 0 & 0 & -B'^T & 0 & 0 \\ S & 0 & 0 & 0 & \Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \lambda \\ \Delta \kappa \\ \Delta Q^r \\ \Delta \alpha \\ \Delta s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B' \kappa^0 - g^0 \\ 1 - Q^E \cdot g^0 \\ -f^0 - s^0 \\ B'^T Q^{r0} \\ \varepsilon \varepsilon - \Lambda^0 s^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (34)$$

ここに行列 S は $S = \text{diag}(s_i)$ である。

さらに方程式 (34) から変数 $\Delta \lambda, \Delta s$ を以下の手順で消去することにより、方程式の寸法を小さくすることが可能である。具体的には、方程式 (34) の中で、

$$\begin{aligned} \Delta \lambda &= S^{-1} (w - \Lambda \Delta s) \\ \Delta s &= r - E^T \Delta Q^r - \Delta \alpha (E^T Q^E) \end{aligned} \quad (35)$$

であることを利用すると、次式が成立する。

$$\begin{aligned} \Delta \lambda &= S^{-1} w - S^{-1} \Lambda r + S^{-1} \Lambda E^T \Delta Q^r \\ &\quad + \Delta \alpha S^{-1} \Lambda E^T Q^E \end{aligned} \quad (36)$$

これを元の方程式 (34) に代入すると、以下の方程式を得る。

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} C + E S^{-1} \Lambda E^T \\ ((C + E S^{-1} \Lambda E^T) Q^E)^T \\ -B'^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (C + E S^{-1} \Lambda E^T) Q^E & -B' \\ Q^E \cdot C Q^E + (E^T Q^E) \cdot S^{-1} \Lambda (E^T Q^E) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta Q^r \\ \Delta \alpha \\ \Delta \kappa \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} p - E S^{-1} w + E S^{-1} \Lambda r \\ q - (E^T Q^E) \cdot S^{-1} w + (E^T Q^E) \cdot S^{-1} \Lambda r \\ v \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (37)$$

ここで方程式 (37) の係数行列が実対称行列であることに注意する。つまり、この式変形は方程式のサイズを小さくするだけでなく、実対称行列用の解法が適用できるようになり、数値計算上も大きなメリットを有する。また方程式には行列 S の逆行列が現れるが、これは $S^{-1} = \text{diag}(1/s_i)$ と容易に計算できることにも注意しておく。

解を更新するための探索方向を求めるためには、まず方程式 (37) によって、残留応力の増分 ΔQ^r 、荷重係数の増分 $\Delta\alpha$ および節点変位速度の増分 $\Delta\kappa$ を求める。ついで、関係式 (35) および (36) により、塑性乗数の増分 $\Delta\lambda$ およびスラック変数の増分 Δs を求める。これらの増分を取りまとめたベクトルが探索方向となる。

3.4 増分ステップ幅の決定と解の更新

内点法の特徴は、2つの非負変数 λ と s の非負性を確保しながら、相補性条件を数値的に満足させるため、バリエヤパラメータとしてゼロに収束する単調減少列 ϵ^k を導入し、 $\Lambda^k s^k = \epsilon^k e$ によって解を逐次的に更新することにある。ここにベクトル e は $e = (1, \dots, 1)$ である。

まず、バリエヤパラメータ ϵ^k としてはベクトル $\Lambda^k s^k$ のノルムを利用して、単調減少性を確保する数列が便利である。ここでは、ノルムとしてベクトル $\Lambda^k s^k$ の要素 2 乗和の平方根をとり、以下の数列を利用する。

$$\epsilon^k = \left(\frac{\sum_i \lambda_i^k s_i^k}{n} \right)^\omega \quad (38)$$

ここに λ_i^k, s_i^k はそれぞれ λ_i, s_i の k 番目の近似解、整数 n は λ, s の次元、パラメータ ω はゼロへの収束性を決めるパラメータで数値実験により決定する。パラメータの具体的な数値については、後述する数値実験で示す。このバリエヤパラメータは、各積分点での $\lambda_i s_i$ が収束しているかどうかを具体的に判定するものではないが、系の全体的な収束状況を反映した指標であると言える。

非負変数の非負性を確保するために、線形計画問題では近似解 λ^0, s^0 と探索方向 $\Delta\lambda, \Delta s$ について、内点を満足する最大のステップ幅 $\beta_{\max}$ を計算し、それに 1 より僅かに小さいパラメータ γ (例えば、 $\gamma = 0.99$ などを用いることが多い) を乗じてステップ幅を縮めた $\beta^* = \gamma\beta_{\max}$ を用いることが多い。

$$\beta_{\max} = \max \{ \beta \mid \lambda^0 + \beta\Delta\lambda \geq 0, s^0 + \beta\Delta s \geq 0 \} \quad (39)$$

$$\beta^* = \gamma\beta_{\max} \quad (40)$$

しかし非線形最適化問題においては、このステップ幅の決定法では非線形制約条件である降伏条件 $f_i(Q) \leq 0$ の非正性が確保される保証がない (Appendix 参照)。

そもそもスラック変数 s_i の非負性は、本質的には降伏関数 $f_i(Q)$ の非正性から要求される性質である。そこで、 s_i の非負性に代わって、降伏関数 f_i の非正性そのものを用いて、式 (II.3) から高次の項 $o(|\Delta Q|^3)$ を無視し、以下の 2 次方程式の解として、ステップ幅 β

を評価しよう。

$$\begin{aligned} & \frac{\beta^2}{2} \left\{ (\Delta\alpha)^2 Q^E \cdot \frac{\partial^2 f_i}{\partial Q \partial Q} Q^E + \Delta Q^r \cdot \frac{\partial^2 f_i}{\partial Q \partial Q} \Delta Q^r \right\} \\ & + \beta \left(\Delta\alpha \frac{\partial f_i}{\partial Q} \cdot Q^E + \frac{\partial f_i}{\partial Q} \cdot \Delta Q^r \right) \\ & + f_i(Q^0) = 0 \end{aligned} \quad (41)$$

ここで、降伏関数 f_i のヘシアンについては、式 (28) の上界法の制約条件式を増分形で表す際に計算済みなもので、それを利用する。また、更新した応力解 $Q^0 + \Delta\alpha Q^E + \Delta Q^r$ が降伏関数の非正性を満足することを計算でチェックし、もし非正性を満足しない場合は、満足するまでステップ幅を徐々に縮小させる。

これらをまとめるとステップ幅 β^* の決定法は以下の通りである。

$$\begin{aligned} \beta^* &= \gamma \cdot \gamma^* \cdot \beta_{\max} \text{ where} \\ \beta_{\max} &= \min \{ \beta_0, \beta_1 \} \\ \beta_0 &= \max \{ \beta \mid \lambda^0 + \beta\Delta\lambda \geq 0 \} \\ \beta_1 &= \min \{ \text{Pos. sol. of eq. (41)} \forall i \} \end{aligned} \quad (42)$$

ここにパラメータ γ は 1 より僅かに小さな数、 γ^* は更新した応力解が降伏関数の非正性を満足しないときにステップ幅を縮小させるための係数で $0 < \gamma^* < 1$ を取る。

上記のようにして求めたステップ幅 β^* を用いて、解を以下のように更新する。

$$\begin{Bmatrix} \lambda \\ \kappa \\ Q^r \\ \alpha \\ s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \lambda^0 + \beta^* \Delta\lambda \\ \kappa^0 + \beta^* \Delta\kappa \\ Q^{r0} + \beta^* \Delta Q^r \\ \alpha^0 + \beta^* \Delta\alpha \\ -f(Q^0 + \beta^* \Delta\alpha Q^E + \beta^* \Delta Q^r) \end{Bmatrix} \quad (43)$$

ここで、スラック変数 s の更新については、更新された応力 $Q^0 + \beta^* \Delta\alpha Q^E + \beta^* \Delta Q^r$ を用いて、降伏条件から直接求めていることに注意する。

3.5 初期解

収束計算により解を求める数値解析では、初期解の決め方も数値解析の成否を担う重要な因子である。本論文で用いた定式化では、初期解は必ずしも実行可能解である必要はないが、バリエヤパラメータを単調減少させて、最終的に相補性条件を数値的に実現するような繰返し計算を行うため、初期に仮定する塑性係数 λ とスラック変数 s の非負性は満足させる必要があることに注意する。また、ここで定式化した剛塑性解析は凸計画問題であるので、大域的な解の収束は保証されている。したがって、理論上は、最終的に得られる最適解は仮定した初期解に依存しない。

本論文では、スラック変数 s の非負性を確保するために、あらかじめ基準となる荷重 Γ^0 に対する弾性解析を行い、その弾性応力 Q^E を初期解に利用する。その手順は以下の通りである。

まず、全ての応力点について、応力場 $Q = \alpha_e Q^E$ が降伏条件を破らないような荷重係数 α_e を求める。この

荷重係数は弾性限界荷重に対応している。

$$\alpha_e = \max \{ f_i (\alpha_e Q^E) < 0, \forall i \} \quad (44)$$

この荷重係数にパラメータ $0 < \gamma < 1$ を乗じて若干小さくした荷重係数 $\alpha_e^* = \gamma \alpha_e$ を用いても、やはり釣合系を満足し、降伏条件を破らない応力場が構成できる。これを用いて、荷重係数 α とスラック変数 s_i の初期解を以下のように決める。

$$\alpha^0 = \alpha_e^* \quad (45)$$

$$s_i^0 = -f_i (\alpha_e^* Q^E) \quad (46)$$

一方、その他の変数については、以下のように初期解を与えた。

$$\kappa^0 = 0 \quad (47)$$

$$Q^{r0} = 0 \quad (48)$$

$$\lambda^0 = 1.0 \times 10^{-2} e \quad (> 0) \quad (49)$$

4. 数値解析例

ここでは数値解析の信頼性を確認するため、2次元半無限領域の浅い基礎の支持力問題を取り上げる。載荷は表面に鉛直下向きの均等荷重を載荷する応力境界条件として与え、物体力は無視した。また材料は剛完全塑性 Tresca 体とした。Tresca 体の降伏関数は2主応力の差で記述されるため、主応力空間では降伏関数は線形関数として記述できる。しかし、一般の境界値問題では主応力方向自身が未知であるため、主応力方向も併せて解く必要があり、この部分は非線形となる。したがって、Tresca 体を対象にしたこの例題は、本質的に非線形問題に属することに注意する必要がある。

さて、実際の基礎構造物を考慮すると、応力境界条件による支持力計算は柔基礎構造物の支持力を評価していることに相当する。また、本問題の正解値は支持力係数 $N_c = \pi + 2$ であることが知られている^{(28), (29)}。

要素ならびに剛塑性解析における積分点数の選択については、文献⁽³⁰⁾を参考にして、以下のように決めた。

上界法、下界法のいずれにおいても、要素内の全ての点において関連流れ則に従うひずみ速度場あるいは降伏条件を破らない応力場の条件を課することは不可能である。そのため、要素内の積分点のみでこれらの条件を満足するように制約を緩めることが必要となる。一方、各要素は空間離散化によって有限個の自由度を有しているに過ぎないので、要素内の積分点数を増やし過ぎると、条件過剰のために実行可能解が求められない可能性がある。

2次元問題の場合、図-2に示すように、平均的には3角形要素では1つの節点を周りの6つの要素が共有、4角形要素では1つの節点を周りの4つの要素が共有することになる。2次元問題の場合は1節点あたり2自由度を有するので、平均的な意味で1要素当たりの自由度を計算すると、3角形要素では1自由度、4角形要素では2自由度を有することが分かる。塑性計算では、さらに流れ則あるいは降伏条件を制約条件として付加するために、要素当たりの自由度が減少する。一般に、

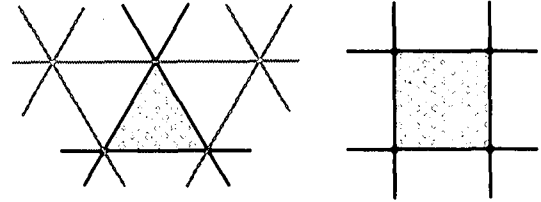


図-2 要素の種類と自由度 (2次元)

表-1 各メッシュの要素数、節点数、式 (37) の寸法

	No. Elements	No. Nodes	Dim. Eq. (37)
Mesh I	40	55	201
Mesh II	160	189	801
Mesh III	640	697	3201

3角形要素を用いた変位法に基づく弾塑性有限要素解析では、系全体の変形の自由度が不足するために、塑性荷重を高めに見積もってしまう傾向があると言われる。同様の議論は剛塑性解析についても成り立つ。

そこで、有限要素法による離散化は、4節点1次アイソパラメトリック要素を用い、弾性応力を計算する際には、要素内で 2×2 点のガウス数値積分を、剛塑性解析では要素内1点のガウス数値積分を選択した。

4.1 収束性に関する数値実験

数値実験を行うに当たっては以下の点に注目して空間離散化を行った。

- 同一の問題に対して空間離散化の程度を変えることにより、総未知数など問題の規模を異にしたケースを検討すること。
- 従来の上界法に基づく剛塑性有限要素法では、剛体域を広く含むような解析領域では計算が不安定になることが報告されている⁽³¹⁾。一方、本論文の定式化によれば、相補性条件による剛体域と塑性域の判別を行いながら解析を進めるため、本質的に剛体域の大きさが数値計算結果に反映されることはないと考えられる。したがって、敢えて剛体域を広く含むような解析領域を設定し、収束の安定性に注目する。
- 対象例題は鉛直荷重のみが載荷する問題であるので、本来、解析領域は左右いずれかの半分の領域で十分である。ここでは数値的な誤差による影響が現われるかどうかを確認するため、敢えて全断面の解析を行う。

これらの方針に基づき、図-3、図-4 図-5に示す3種類のメッシュ I, II, III による空間離散化を行い、計算の収束性を確認する。いずれのメッシュも底面を固定境界、両側面をスライダーとし、自重ゼロ、強度1の Tresca 地盤の表面に幅 $B = 6$ の領域で均等な鉛直荷重 $V = 4$ を載荷している。各メッシュの要素数、節点数および解の探索方向を解く方程式 (37) の寸法を表-1にまとめた。

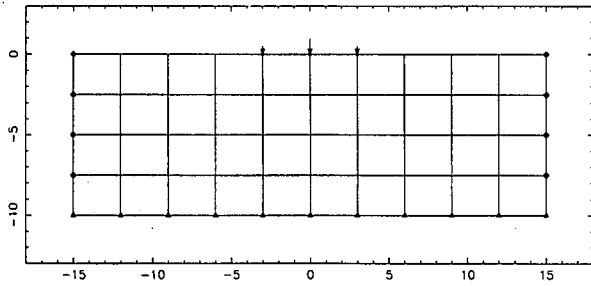


図-3 メッシュ I

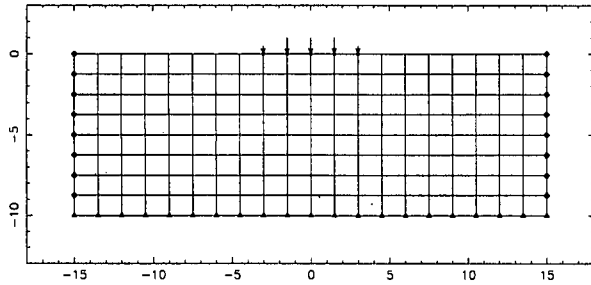


図-4 メッシュ II

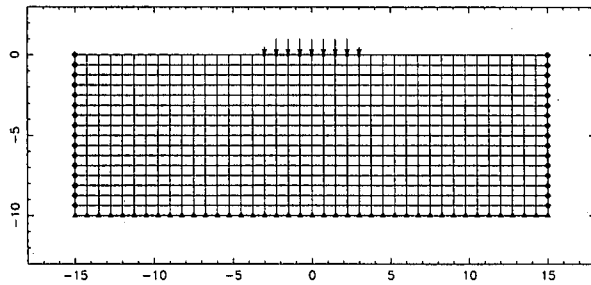


図-5 メッシュ III

数値解析の収束性をテストするために、バリアパラメータ (式 (38)) におけるパラメータ ω の値について検討する。パラメータ ω によるバリアパラメータ ε の収束状況について、メッシュ I の場合を図-6 に、メッシュ II の場合を図-7 に、メッシュ III の場合を図-8 に、それぞれ示す。このバリアパラメータは、定義から明らかなように各積分点ごとの相補性を直接表すものではないが、相補性条件に関する系全体の平均的な尺度になっている。一方、この数値解析例では、解の収束性を判定する条件として、全ての積分点で相補性条件が $\lambda_i s_i \leq 1.0 \times 10^{-8}$ となる条件を課し、それが満足されれば計算を終了させている。

数値実験結果からは、3つの異なる規模の問題いずれに対しても、パラメータ ω がかなり敏感に影響を与えることが読みとれる。いずれの場合も、パラメータ $\omega \approx 1.2$ の場合に、収束性が良いという結果を示した。また、収束に至る反復回数については、あまり問題の規模に依存せず、おおよそ 20 ~ 30 回程度で十分な収束解が得られている。

一方、得られた支持力係数 N_c 、荷重係数 α は表-2 に示す通りである。またメッシュ III の場合について、反復回数と荷重係数の収束の様子を図-9 に示す。バリアパ

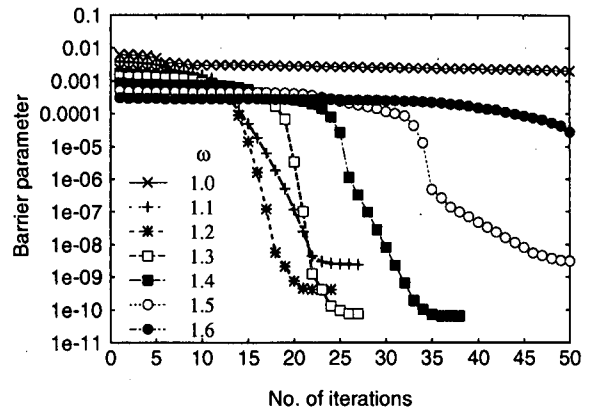


図-6 パラメータ ω によるバリアパラメータ ε の収束状況 (メッシュ I)

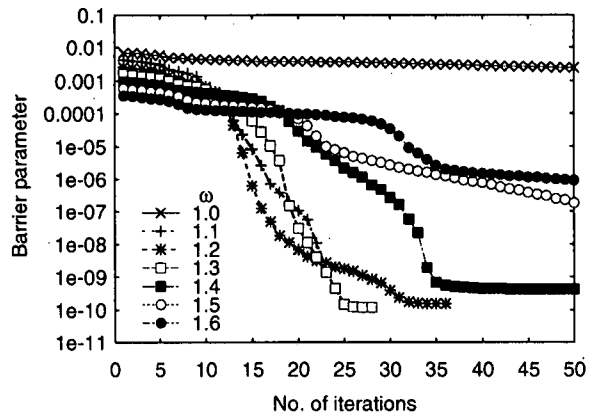


図-7 パラメータ ω によるバリアパラメータ ε の収束状況 (メッシュ II)

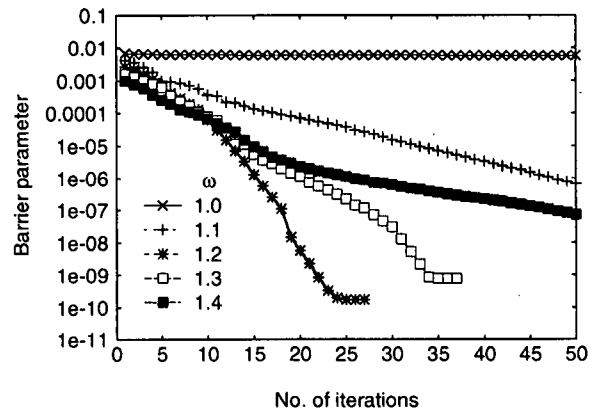


図-8 パラメータ ω によるバリアパラメータ ε の収束状況 (メッシュ III)

ラメータ ε の収束性が優れなかったパラメータ $\omega = 1.1$, $\omega = 1.4$ の場合についても、荷重係数については比較的良好な収束性を示している。同様の傾向はメッシュ I および II の場合でも確認できている。

表-2 得られた支持力係数 N_c と荷重係数 α

	Bearing capacity	Load factor
	N_c	α
Mesh I	6.364	9.546
Mesh II	5.490	8.235
Mesh III	5.285	7.927
Exact Sol.	$\pi + 2$	7.712

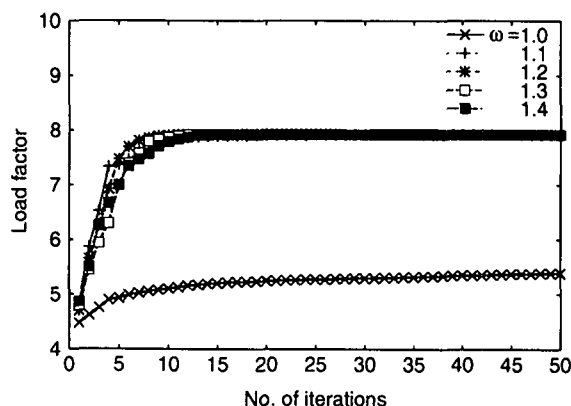


図-9 荷重係数 α の収束の様子 (メッシュ III)

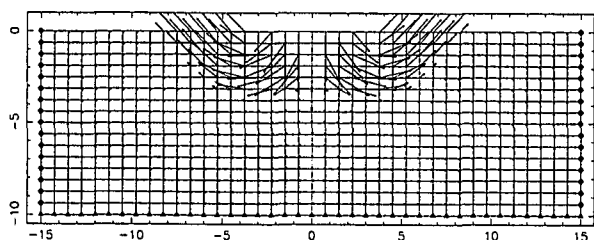


図-10 塑性崩壊時の速度場の概要 (節点速度ベクトル)

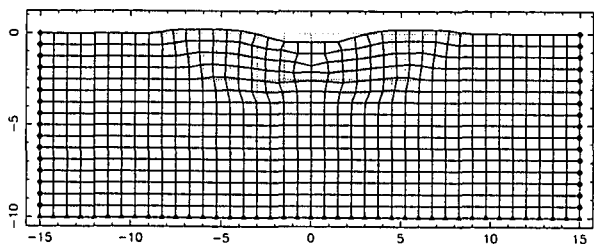


図-11 塑性崩壊時の速度場の概要 (要素の変形)

最後にメッシュ III について、塑性崩壊時の速度場の概要を図-10 および 11 に、塑性ひずみ速度場の概要を図-12 に示す。塑性ひずみ速度は剪断成分の大きさにしたがって正規化し、グレースケール 256 階調で表示している。載荷面直下に剛体的な運動するいわゆる主働域とその外側に接続する扇状の遷移領域、さらに外側に接続する剛体の受働域が形成されていることが読みとれる。この種の解析を上界法に基づく剛塑性有限要素法で行う場合、基礎端部の特異点の処理が重要となることが指摘されている³¹⁾。しかし、本解析では載荷条件として応力境界条件を考えているため、特異

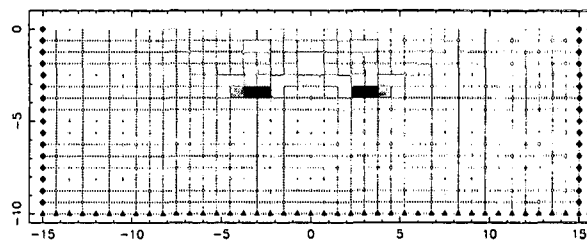


図-12 塑性崩壊時の塑性ひずみ速度場の概要 (剪断ひずみ速度成分)

点処理を行わなくても、表-2 に示す程度の計算結果が得られている。

これらの数値実験結果から明らかとなった傾向をさらに詳しく調べるためには、より大規模な問題に対する数値解析、あるいは載荷条件として傾斜荷重などを想定した数値解析が必要である。特に、大規模問題に対して、収束までの反復回数を調査することは、3 次元問題への拡張を図る際にも重要であると思われる。

5. おわりに

本論文では、極限解析法の代表的な数値解法である剛塑性有限要素法について、非線形計画法の立場から検討を行った。まず、極限定理における上界法・下界法の主双対性を Lagrange 双対性により端的に示した。その上で、双対性と相補性条件に着目した数値解析法である主双対内点法の適用を図り、混合型剛塑性有限要素法の定式化を示した。また、具体的な数値解析例を通して、収束性に関する検討を行った。

その結果、本論文における数値解析では、収束性はバリエーションパラメータ (式 (38)) におけるパラメータ ω の値に大きく依存する結果が得られた。パラメータを $\omega \approx 1.2$ とすれば、問題の規模によらず、おおよそ 20 ~ 30 回程度で相補性条件を満足する十分な収束解が得られている。また、荷重係数については、相補性条件よりも速く収束し、しかもパラメータ ω に関しては鈍感である結果となった。これらの傾向が一般的に成り立てば、大規模問題に対しても規模によらず少ない反復回数で収束解が得られる可能性があるため、実用上も興味深い。したがって、これらの傾向については、今後、さらに大規模問題に対して、あるいはさまざまな載荷条件について調査していく必要がある。

最後に、主双対内点法は大規模凸計画問題の高速解法として、その応用が期待されている方法である。その応用分野は剛塑性解析に留まらず、広く鞍点型変分問題に適用が可能である。今後は、他分野の研究動向も踏まえつつ、剛塑性問題を始めとする固体力学分野への応用を図って行きたいと考える。

謝辞

本研究を進めるに当たり、京都大学大学院工学研究科 田村 武教授から有益なコメントを頂いた。ここに記して謝意を表する。

参考文献

- 1) Hill, R.: *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford University Press, 1950.
- 2) Drucker, D.: A more fundamental approach to plastic stress-strain relations, Proc. 1st US National Congress Appl. Mech., pp. 487-491, 1951.
- 3) Lee, C.H. & Kobayashi, S.: New solution to rigid-plastic deformation problems using a matrix method, Trans. ASME, Journal of the Engineering for Industry, Vol. 95, pp. 865-873, 1973.
- 4) Terzaghi, K.: *Theoretical Soil Mechanics*, John Wiley, 1943.
- 5) Brinch Hansen, J.: A general formula for bearing capacity, Bulletin No. 11, Danish Technical Institute, pp. 38-46, 1961.
- 6) Vesic, A.S.: Analysis of ultimate loads on shallow foundations, ASCE, Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, Vol. 99, No. SM1, pp. 45-73, 1973.
- 7) Bishop, A.W.: The use of the slip circle in the stability analysis of slopes, Geotechnique, Vol. 5, No. 1, pp. 7-17, 1955.
- 8) Janbu, N.: Application of composite slip surfaces for stability analysis, Proc. European Conf. Stability of Earth Slopes, Vol. 3, pp. 43-49, 1954.
- 9) Spencer, E.A.: A method of analysis of the stability of embankments assuming parallel inter-slice forces, Geotechnique, Vol. 17, No. 1, pp. 11-26, 1967.
- 10) Morgenstern, N. & Price, V.E.: The analysis of the stability of general slip surface, Geotechnique, Vol. 15, No. 1, pp. 79-93, 1963.
- 11) Tamura, T., Kobayashi, S. & Sumi, T.: Limit analysis of soil structure by rigid plastic finite element method, Soils and Foundations, Vol. 24, No. 1, pp. 34-42, 1984.
- 12) Tamura, T., Kobayashi, S. & Sumi, T.: Rigid plastic finite element method for frictional material, Soils and Foundations, Vol. 27, No. 3, pp. 1-12, 1987.
- 13) Asaoka, A. & Kodaka, T.: Bearing capacity of foundation on clays by the rigid plastic finite element model, Numerical Models in Geomechanics — NUMOG IV, pp. 839-849, 1992.
- 14) Kamenjarzh, J.A.: Limit analysis of solids and structures, Chap. 2, CRC Press, 1996.
- 15) Nayroles, B.: Essai de théorie fonctionnelle des structures rigides plastiques parfaites, Journal de Mécanique, Vol. 9, pp. 491-506, 1970.
- 16) Christiansen, E.: Computation of limit loads, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 17, pp. 1547-1570, 1981.
- 17) Karmarkar, N.: A new polynomial-time algorithm for linear programming, Combinatorica, Vol. 4, pp. 373-395, 1984.
- 18) 小島政和、土谷 隆、水野眞治、矢部 博：内点法、朝倉書店、2001.
- 19) Andersen, K.D. & Christiansen, E.: Limit analysis with the dual affine scaling algorithm, Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 59, pp. 233-243, 1995.
- 20) Andersen, K.D., Christiansen, E. & Overton, M.L.: Computing limit loads by minimizing a sum of norms, SIAM Journal on Scientific Computing, Vol. 19, No. 3, pp. 1046-1062, 1998.
- 21) Andersen, K.D., Christiansen, E., Conn, A.R. & Overton, M.L.: An efficient primal-dual interior-point method for minimizing a sum of Euclidean norms, SIAM Journal on Scientific Computing, Vol. 22, No. 1, pp. 243-262, 2000.
- 22) Rockafellar, R.T.: *Convex analysis*, Princeton University Press, 1970.
- 23) 福島雅夫：非線形最適化の基礎、朝倉書店、2001.
- 24) 矢部 博、八巻直一：非線形計画法、朝倉書店、1999.
- 25) 菊地文雄：有限要素法の数理 — 数学的基礎と誤差解析 —、培風館、1994.
- 26) Karush, W.: Minima of functions of several variables with inequalities as side conditions, M.S. Thesis, Department of Mathematics, University of Chicago, 1939.
- 27) Kuhn, W.W. & Tucker, A.W.: , Nonlinear Programming, Proc. 2nd Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, University of California Press, pp. 481-492, 1951.
- 28) Bishop, J.F.W.: On the complete solution to problems of deformation of a plastic-rigid materials, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 2, pp. 43-53, 1953.
- 29) Prandtl, L.: Über die Härte plastischer Körper, Göttingen Nachrichten Mathematisch-Physikalische Klasse, pp. 74-85, 1920.
- 30) Nagtegaal, J.C., Parks, D.M. & Rice, J.R.: On Numerically Accurate Finite Element Solutions in the Fully Plastic Range, Computer Methods in Applied Mech. and Eng., Vol. 4, pp. 153-177, 1974.
- 31) 小高猛司：地盤工学における剛塑性有限要素法（その2）、土と基礎, Vol. 49, No. 12, pp. 65-68, 2001.

付録 I 制約想定を満たさない剛塑性境界値問題の例

ここではSlater 制約想定を満たさない剛塑性境界値問題の例を考えてみよう。

まず、荷重係数 α が無限大に発散する問題を取り上げてみよう。このような問題は図-13 に示すような強い拘束条件が課せられる問題や、球体に等方圧を載荷する問題などに限られる。

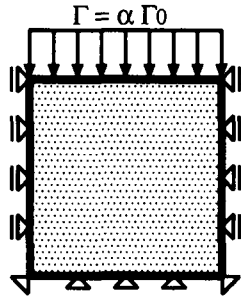


図-13 特殊な例：荷重係数が無限大に発散する

次に至るところで降伏関数の真の内部となる釣合系の応力場について考えてみよう。我々が対象とする物質では、ゼロ応力のもとでは塑性変形を起こさないという大前提が課せられるので、降伏関数 $f(Q) = 0$ はかならず応力空間の原点を含むことが要求される。ここで基準となる外力に対する線形弾性応力場を Q^{E0} とする。降伏関数の凸性と応力場 Q^{E0} の線形性を考慮すると、任意の正数 $\delta > 0$ に対して以下の不等式を満足する正の α が取れる。

$$\exists \alpha > 0 \quad \text{such that } f(\alpha Q^{E0}) < \delta, \quad \forall \delta > 0 \quad (\text{I.1})$$

したがって、至るところで降伏関数の真の内部 $f_i(Q) < 0$ となる釣合系の応力場が存在する。

一方、材料強度がゼロであるような特殊な場合は、降伏関数が原点に一致して降伏関数の真の内部が存在しないので、 $f_i(Q) < 0$ となる応力場は存在しない。しかし、そもそもこのような特殊な場合は、問題の設定に不適切性があると見るべきであり、これ以上議論しない。

付録 II 降伏条件の非正性に関する議論

非線形最適化問題においては、線形計画問題に対する主双対内点法で用いられるステップ幅決定法では、非

線形制約条件である降伏条件 $f_i(Q) \leq 0$ の非正性が確保される保証がない。それを簡単に以下に示す。

まず、応力の近似解を $Q^0 = \alpha^0 Q^E + Q^{r0}$ とする。ここでステップ幅を β として応力を更新すれば、

$$Q = Q^0 + \beta \Delta \alpha Q^E + \beta \Delta Q^r \quad (\text{II.1})$$

となる。また応力が降伏条件を満足するためには、

$$f_i(Q^0 + \beta \Delta \alpha Q^E + \beta \Delta Q^r) + (s_i + \beta \Delta s_i) = 0 \quad (\text{II.2})$$

が成り立つ必要がある。これをテーラー展開すると

$$\begin{aligned} & f_i(Q^0) + \beta \left(\Delta \alpha \frac{\partial f_i}{\partial Q} \cdot Q^E + \frac{\partial f_i}{\partial Q} \cdot \Delta Q^r \right) \\ & + \frac{\beta^2}{2} \left\{ (\Delta \alpha)^2 Q^E \cdot \frac{\partial^2 f_i}{\partial Q \partial Q} Q^E + \Delta Q^r \cdot \frac{\partial^2 f_i}{\partial Q \partial Q} \Delta Q^r \right\} \\ & + o(|\Delta Q|^3) + (s_i + \beta \Delta s_i) = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

となる。一方、探索方向を求める方程式 (34) では、式 (II.3) のうち、降伏関数 f_i のヘシアンを考慮していない。したがって、方程式 (37) による探索方向と式 (39) によるステップ幅で応力を更新すると、降伏条件は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} & f_i(Q^0 + \beta \Delta \alpha Q^E + \beta \Delta Q^r) \\ & = -(s_i + \beta \Delta s_i) \\ & + \frac{\beta^2}{2} \left\{ (\Delta \alpha)^2 Q^E \cdot \frac{\partial^2 f_i}{\partial Q \partial Q} Q^E + \Delta Q^r \cdot \frac{\partial^2 f_i}{\partial Q \partial Q} \Delta Q^r \right\} \\ & + o(|\Delta Q|^3) \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

ここで、降伏関数 f_i の凸性より、ヘシアン $\partial^2 f_i / \partial Q \partial Q$ は半正定値であることを考慮すると、解の更新によってスラック変数 $(s_i + \beta \Delta s_i)$ がゼロに近づく場合は、右辺第2項の大きさによっては、かならずしも降伏関数の非正性を満足できないことが分かる。

(2003年4月18日受付)