

2 次元 Laplace 方程式の Cauchy 問題に対する 任意求積点をもつ高次差分法の適用

Applications of a high order finite difference method with free quadrature points
to Cauchy problems of two-dimensional Laplace equation

飯島健太郎*

Kentaro Iijima

*修士 (理学) 茨城大学大学院理工学研究科 (〒 310-8512 茨城県水戸市文京 2-1-1)

We construct a high order finite difference method in which the quadrature points can be set at arbitrary locations. It is known that the Cauchy problem of the Laplace equation is unstable with respect to L^2 -norm. We apply our method to Cauchy problems of the Laplace equation. The finite difference approximation in this research is formulated as follows: the derivative of a function is replaced with a linear combination of values of the function for each quadrature points which are located arbitrarily. We propose an algorithm in order to determine weights in this linear combination. In numerical experiments we obtain a highly precise numerical solution. These results imply effectiveness on solving the Cauchy problem of the Laplace equation by our method.

Key Words : Inverse problem, meshless method, high order finite difference method

1. はじめに

Laplace 方程式の Cauchy 問題を考える. 平面 $\mathbf{R}^2$ 内の領域 Ω の境界 Γ は区分的に滑らかであるとし, 各点 $\mathbf{x} \in \Gamma$ における Ω の外向き単位法線ベクトルを $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ と置く. 境界 Γ の連結部分集合 Γ_d 上で関数 $\bar{u}, \bar{q}: \Gamma_d \rightarrow \mathbf{R}$ が与えられているとする. このとき, 関数 $u: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ で

$$-\Delta u = 0 \text{ in } \Omega, \quad (1)$$

$$u = \bar{u} \text{ on } \Gamma_d, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \bar{q} \text{ on } \Gamma_d \quad (3)$$

を満たす u を求める問題を考える. 関数 $\bar{u}, \bar{q}$ を Cauchy データといい, 問題 (1)-(3) を Laplace 方程式の Cauchy 問題という⁷⁾.

Laplace 方程式の Cauchy 問題の解は Cauchy データに対して不安定となる. 例として, 領域 $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ の境界 $\Gamma_d = [0, 1] \times \{0\}$ 上で Cauchy データ $\bar{u}_n = 0, \bar{q}_n = -\frac{1}{n^k} \sin(nx_1)$ を与えた場合を考える⁹⁾. ただし, n, k を自然数とする. このとき, 真の解は

$$u_n(x_1, x_2) = \frac{1}{n^{k+1}} \sin(nx_1) \sinh(nx_2)$$

である. L^2 -ノルム

$$\|v\|_{L^2(0,1)} := \left(\int_0^1 |v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

に関して, $n \rightarrow \infty$ のとき各 Cauchy データは $\|\bar{u}_n\|_{L^2(0,1)} \rightarrow 0, \|\bar{q}_n\|_{L^2(0,1)} \rightarrow 0$ であるが, 解 u_n は $\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow \infty$ となる. すなわち Laplace 方程式の Cauchy 問題の解は Cauchy データに連続的に依存しない.

Laplace 方程式の Cauchy 問題の数値解法に関する研究^{1), 5)}では, Laplace 方程式の Cauchy 問題を汎関数の最小化問題に帰着して解く方法が示されている. 最小化には汎関数の第 1 変分による勾配法が用いられている.

本研究における高次差分法の特徴の一つとして, 求積点の位置を任意に指定できることが挙げられる. 従来の差分法では一般的な形状をもつ領域において問題を解くとき, 問題の領域である物理領域 Ω を差分公式が適用できる計算領域へ写像し, 写像で生じた伸縮を補正するという方法が用いられている⁸⁾. 本手法では, 扱う問題における物理領域の形状に合わせて求積点を直接配置できるため, 物理領域と計算領域を分ける必要がなく, 写像生成の手間がかからない. また写像の離散化による誤差も生じない.

また、問題の離散化において、解析者が各求積点間の隣接関係をほとんど考慮する必要がないため、本手法はメッシュレス法である。メッシュレス法は、節点の隣接情報を記憶しておく必要がないことや、領域形状が変化する問題に対するアダプティブ解析がしやすいという利点をもつ³⁾。

さらに、本手法では Dirichlet データ、Neumann データを含む一般的な形式の境界データを扱えることが挙げられる。従来の差分法では、解の導関数を含む境界データを扱うために、境界に隣接するいくつかの格子点に対して手計算によって得た差分公式を適用する必要がある。本手法では各求積点ごとに、与えるデータの形式を指定するだけでよく、差分公式を変更する必要はない。

近似精度に関して、本手法には求積点の数を任意に増やすことによって近似の次数を上げられることが期待できる。精密な誤差評価については現在研究中である。

2. 表記法

次節以降の表記法を簡略化するために多重指数を導入する。非負整数の集合 $\mathbf{Z}_+$ の直積集合を $\mathbf{Z}_+^m = \overbrace{\mathbf{Z}_+ \times \mathbf{Z}_+ \times \cdots \times \mathbf{Z}_+}^m$ と表す。元 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in \mathbf{Z}_+^m$ を多重指数という。記号 $\mathbf{0}$ によって $(0, \dots, 0)$ を表す。2つの多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m), \beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) \in \mathbf{Z}_+^m$ の間に次の演算を定める。すべての $i = 1, 2, \dots, m$ に対して $\alpha_i \geq \beta_i$ であるとき $\alpha \geq \beta$ と表す。加法と減法を $\alpha \pm \beta := (\alpha_1 \pm \beta_1, \alpha_2 \pm \beta_2, \dots, \alpha_m \pm \beta_m)$ によって定める。ただし、減法は $\alpha \geq \beta$ のときにのみ定義される。多重指数 α の長さを $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m$ によって定める。ベクトル $\mathbf{x} = {}^t(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbf{R}^m$ の長さとして $|\mathbf{x}| = \sqrt{\sum_{k=1}^m x_k^2}$ を用いる。ベクトル $\mathbf{x}$ のべき乗を $\mathbf{x}^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_m^{\alpha_m}$ によって定める。多重指数 α の階乗を $\alpha! := \alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_m!$ によって定める。微分作用素

$$\frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_m^{\alpha_m}} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_m}}{\partial x_m^{\alpha_m}}$$

を $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \mathbf{x}^\alpha}$ によって表す。形式的に $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $\partial = (\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_m)$ と置くことによって $\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \mathbf{x}^\alpha}$ と表す。

Taylor の定理を多重指数を用いて表現する。有界領域 $\Omega \subset \mathbf{R}^m$ 上の C^μ 級関数 f をとる。ただ

し μ は非負の整数である。このとき、各 $\mathbf{x} \in \Omega$ に対して $r > 0$ が存在し、 $|\mathbf{h}| < r$, $\mathbf{x} + \mathbf{h} \in \Omega$ となるすべての $\mathbf{h} \in \mathbf{R}^m$ に対して

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = \sum_{|\alpha| \leq \mu-1} \frac{\mathbf{h}^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha f(\mathbf{x}) + \sum_{|\alpha|=\mu} \frac{\mu \mathbf{h}^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{\mu-1} \partial^\alpha f(\mathbf{x} + t\mathbf{h}) dt$$

が成り立つ⁶⁾。

3. 高次差分近似

求積点を任意の位置に配置できる高次の差分近似を導入する。記号 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は $\mathbf{Z}_+^m$ の多重指数を表す。求積点 $\mathbf{x} = {}^t(x_1, x_2, \dots, x_m)$, $\mathbf{x}^{(j)} = {}^t(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots, x_m^{(j)}) \in \mathbf{R}^m$ およびベクトル $\mathbf{h} = {}^t(h_1, h_2, \dots, h_m)$, $\mathbf{h}^{(j)} = {}^t(h_1^{(j)}, h_2^{(j)}, \dots, h_m^{(j)}) \in \mathbf{R}^m$ は $\mathbf{x}^{(j)} = \mathbf{x} + \mathbf{h}^{(j)}$, $j = 0, 1, \dots, N-1$ を満たすとする。また $\mathbf{x}^{(j)}$, $j = 0, 1, \dots, N-1$ は相異なるものとする。実数 $a_\alpha, \alpha \in \mathbf{Z}_+^m$ は $|\alpha| > \mu$ のとき 0 であるとする。このとき微分作用素

$$P(\partial) := \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}_+^m} a_\alpha \partial^\alpha \quad (4)$$

による導関数の値 $P(\partial)u(\mathbf{x} + \mathbf{h})$ を $u(\mathbf{x}^{(j)})$, $j = 0, 1, 2, \dots, N-1$ の一次結合によって近似することを考える。すなわち、重み $w_j \in \mathbf{R}$, $j = 0, 1, 2, \dots$ によって

$$P(\partial)u(\mathbf{x} + \mathbf{h}) \approx \sum_{j=0}^{N-1} w_j u(\mathbf{x}^{(j)}) \quad (5)$$

の形で表現する。近似 (5) を $P(\partial)$ の $\mathbf{h}$ と $\mathbf{h}^{(j)}$, $j = 0, 1, \dots, N-1$ に関する差分近似と呼ぶ。

4. 重みの決定

実際に差分近似 (5) における重み w_j , $j = 0, 1, \dots, N-1$ を決定する。Fourier 変換を用いた決定法と Taylor 展開を用いた決定法を示す。

4.1 Fourier 変換による重みの決定

近似式 (5) の各辺を $\mathbf{x}$ に関して Fourier 変換した式が互いに等しいと仮定することによって、重み w_j , $j = 0, 1, \dots, N-1$ を決定する。

関数 u は $|\alpha| \leq \mu$ となるすべての α に対して $\partial^\alpha u \in L^1(\mathbf{R}^m) \cap L^2(\mathbf{R}^m)$ であるとする。関数 u の Fourier 変換は

$$\mathcal{F}[u](\xi) := \int_{\mathbf{R}^m} u(\mathbf{x}) e^{-i\xi \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad \xi \in \mathbf{R}^m$$

によって定義される。ただし $i = \sqrt{-1}$ である。この Fourier 変換において

$$\mathcal{F}[P(\partial)u](\xi) = P(i\xi)\mathcal{F}[u](\xi), \quad (6)$$

$$\mathcal{F}[u(\cdot + h)](\xi) = e^{i\xi \cdot h} \mathcal{F}[u](\xi) \quad (7)$$

が成り立つ。

近似式 (5) の各辺を Fourier 変換すると, Fourier 変換の性質 (6), (7) より, 左辺と右辺はそれぞれ

$$\mathcal{F}[P(\partial)u(\cdot + h)](\xi) = P(i\xi)e^{i\xi \cdot h} \mathcal{F}[u](\xi),$$

$$\mathcal{F}\left[\sum_{j=0}^{N-1} w_j u(\cdot + h^{(j)})\right](\xi) = \sum_{j=0}^{N-1} w_j e^{i\xi \cdot h^{(j)}} \mathcal{F}[u](\xi)$$

となる。この 2 式が等しいとすることで等式

$$P(i\xi)e^{i\xi \cdot h} \mathcal{F}[u](\xi) = \sum_{j=0}^{N-1} w_j e^{i\xi \cdot h^{(j)}} \mathcal{F}[u](\xi)$$

が成り立ち

$$\left(P(i\xi)e^{i\xi \cdot h} - \sum_{j=0}^{N-1} w_j e^{i\xi \cdot h^{(j)}}\right) \mathcal{F}[u](\xi) = 0 \quad (8)$$

が得られる。形式的に $i\xi$ を $h^{(i)}$, $i = 0, 1, \dots, N-1$ によって置き換えた式が, すべての $i = 0, 1, \dots, N-1$ とあらゆる $\mathcal{F}[u]$ に対して成り立つためには

$$P(h^{(i)})e^{h^{(i)} \cdot h} = \sum_{j=0}^{N-1} w_j e^{h^{(i)} \cdot h^{(j)}} \quad (9)$$

となることが必要十分である。ここで $l_{ij} := e^{h^{(i)} \cdot h^{(j)}}$, $q_i := P(h^{(i)})e^{h^{(i)} \cdot h}$, $i, j = 0, 1, \dots, N-1$ と置くと, 行列 $L = (l_{ij})$ と列ベクトル $w = (w_j)$, $q = (q_i)$ を用いて, 式 (9) は

$$q = Lw \quad (10)$$

と表される。よって重みは $w = L^{-1}q$ となる。ただし, L が正則である場合のみを考える。

4.2 Taylor 展開による重みの決定

Taylor 展開を用いて重みを導出する。関数 u は $\mathbf{R}^m$ で解析的であるとする。したがって, 各 $x \in \mathbf{R}^m$ において Taylor 展開

$$u(x+h) = \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}_+^m} \frac{1}{\alpha!} h^\alpha \partial^\alpha u(x)$$

は絶対収束する。近似式 (5) の左辺は

$$\begin{aligned} P(\partial)u(x+h) &= \left(\sum_{\alpha \in \mathbf{Z}_+^m} a_\alpha \partial^\alpha\right) \left(\sum_{\beta \in \mathbf{Z}_+^m} \frac{1}{\beta!} h^\beta \partial^\beta u(x)\right) \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}_+^m} \sum_{\beta \in \mathbf{Z}_+^m} a_\alpha \frac{1}{\beta!} h^\beta \partial^{\beta+\alpha} u(x) \\ &= \sum_{\gamma \in \mathbf{Z}_+^m} \left(\sum_{\delta \leq \gamma} a_{\gamma-\delta} \frac{1}{\delta!} h^\delta\right) \partial^\gamma u(x) \end{aligned} \quad (11)$$

となる。ただし $\gamma = \beta + \alpha$, $\delta = \beta$ である。同様に近似式 (5) の右辺は

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N-1} w_j u(x+h^{(j)}) &= \sum_{j=0}^{N-1} w_j \left(\sum_{\alpha \in \mathbf{Z}_+^m} \frac{1}{\alpha!} (h^{(j)})^\alpha \partial^\alpha u(x)\right) \\ &= \sum_{\gamma \in \mathbf{Z}_+^m} \left(\sum_{j=0}^{N-1} w_j \frac{1}{\gamma!} (h^{(j)})^\gamma\right) \partial^\gamma u(x) \end{aligned} \quad (12)$$

となる。ただし $\gamma = \alpha$ である。式 (11) と (12) が等しいとすると

$$\sum_{\gamma \in \mathbf{Z}_+^m} \left\{ \sum_{\delta \leq \gamma} a_{\gamma-\delta} \frac{1}{\delta!} h^\delta - \sum_{j=0}^{N-1} w_j \frac{1}{\gamma!} (h^{(j)})^\gamma \right\} \partial^\gamma u(x) = 0 \quad (13)$$

となり, 任意の u に対してこの式が成り立つためには

$$\sum_{\delta \leq \gamma} a_{\gamma-\delta} \frac{1}{\delta!} h^\delta = \sum_{j=0}^{N-1} w_j \frac{1}{\gamma!} (h^{(j)})^\gamma, \quad \gamma \in \mathbf{Z}_+^m \quad (14)$$

が成り立つ必要がある。任意にベクトル $\xi \in \mathbf{R}^m$ をとり, 式 (14) の両辺に ξ^γ をかけ, $\gamma \in \mathbf{Z}_+^m$ に関して和をとると

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \in \mathbf{Z}_+^m} \sum_{\delta \leq \gamma} a_{\gamma-\delta} \xi^{\gamma-\delta} \frac{1}{\delta!} \xi^\delta h^\delta &= \sum_{\gamma \in \mathbf{Z}_+^m} \sum_{j=0}^{N-1} w_j \frac{1}{\gamma!} \xi^\gamma (h^{(j)})^\gamma \end{aligned} \quad (15)$$

となる。

一般に, 級数 $\sum_{\alpha \in \mathbf{Z}_+^m} p_\alpha$ と $\sum_{\alpha \in \mathbf{Z}_+^m} q_\alpha$ がともに絶対

収束するならば

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^m} \sum_{\beta \leq \alpha} p_{\alpha-\beta} q_{\beta} = \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^m} p_{\alpha} \right) \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^m} q_{\alpha} \right) \quad (16)$$

が成り立つ。この性質は次によって示される。正項級数は和の順序を変えても同じ値に収束するので

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^m} |p_{\alpha} q_{\beta}| &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^m} \sum_{\beta \in \mathbb{Z}_+^m} |p_{\alpha}| |q_{\beta}| \\ &= \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^m} |p_{\alpha}| \right) \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^m} |q_{\alpha}| \right) \end{aligned}$$

が成り立つ。仮定より上式は有限値となるので $\sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^m} p_{\alpha} q_{\beta}$ は絶対収束し、和の順序を変えても同じ値に収束する。したがって、和の順序を

$$\sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^m} p_{\alpha} q_{\beta} = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^m} \sum_{\beta \leq \alpha} p_{\alpha-\beta} q_{\beta}$$

および

$$\sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^m} p_{\alpha} q_{\beta} = \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^m} p_{\alpha} \right) \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^m} q_{\alpha} \right)$$

と変えることによって等式 (16) が成り立つ。

また、等式

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^m} \frac{1}{\alpha!} \xi^{\alpha} h^{\alpha} &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^m} \prod_{k=1}^m \frac{1}{\alpha_k!} \xi_k^{\alpha_k} h_k^{\alpha_k} \\ &= \prod_{k=1}^m \sum_{\alpha_k=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k!} \xi_k^{\alpha_k} h_k^{\alpha_k} \\ &= \prod_{k=1}^m e^{\xi_k h_k} = e^{\xi \cdot h} \quad (17) \end{aligned}$$

が成り立つ。

等式 (16) から、式 (15) は

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^m} a_{\alpha} \xi^{\alpha} \right) \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^m} \frac{1}{\alpha!} \xi^{\alpha} h^{\alpha} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} w_j \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^m} \frac{1}{\alpha!} \xi^{\alpha} (h^{(j)})^{\alpha} \right) \end{aligned}$$

となる。等式 (17) と多項式 $P(\xi) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^m} a_{\alpha} \xi^{\alpha}$, $\xi \in \mathbb{R}^m$ から

$$P(\xi) e^{\xi \cdot h} = \sum_{j=0}^{N-1} w_j e^{\xi \cdot h^{(j)}}, \quad \xi \in \mathbb{R}^m \quad (18)$$

を得る。特に $\xi = h^{(i)}$, $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$ と置くことで Fourier 変換によって導いた連立一次方程式 (9) を得る。

4.3 高次差分近似の次数

本論文では、現段階において多項式による高次差分近似の誤差評価を得ていない。そのため、目安として以下に定める $\mu_0 \in \mathbb{N}$ を仮に高次差分近似の次数と呼ぶことにする。

すべての多重指数 $\gamma \in \mathbb{Z}_+^m$ に対して、 $k \leq i$ ならば $|\gamma_k| \leq |\gamma_i|$ が成り立つように番号をつけ、 $\gamma_0, \gamma_1, \dots$ として列挙する。ここで $\mu_1 := |\gamma_N|$ と置き、微分作用素 $P(\partial)$ の階数を $\mu_2 := \max\{|\alpha| : a_{\alpha} \neq 0\}$ と置くと、次数を $\mu_0 := \mu_1 - \mu_2$ によって定める。

ある重み w'_j , $j = 0, 1, \dots, N-1$ が、 $\gamma = \gamma_i$, $i = 0, 1, \dots, N-1$ に対する連立一次方程式 (14) の一意解であると仮定する。すなわち

$$\sum_{\delta \leq \gamma_i} a_{\gamma_i-\delta} \frac{1}{\delta!} h^{\delta} = \sum_{j=0}^{N-1} w'_j \frac{1}{\gamma_i!} (h^{(j)})^{\gamma_i}, \quad (19)$$

$$i = 0, 1, \dots, N-1$$

とする。このとき、 $|\rho| < 1$ である実数 ρ に対して近似の誤差

$$\begin{aligned} \varepsilon(\rho; P(\partial)) &:= P(\partial) u(x + \rho h) \\ &\quad - \sum_{j=0}^{N-1} w_j(\rho)' u(x + \rho h^{(j)}) \end{aligned}$$

が $\rho \rightarrow 0$ のとき $O(\rho^{\mu_0})$ で評価されることを示す。

微分作用素が $P(\partial) = \partial^{\gamma_k}$ の場合を考える。連立一次方程式 (19) より $i = 0, 1, \dots, N-1$ に対して

$$\frac{1}{(\gamma_i - \gamma_k)!} h^{\gamma_i - \gamma_k} = \sum_{j=0}^{N-1} w'_j \frac{1}{\gamma_i!} (h^{(j)})^{\gamma_i} \quad (20)$$

となる。方程式 (19) の $h, h^{(j)}$ を ρ 倍した方程式

$$\frac{1}{(\gamma_i - \gamma_k)!} (\rho h)^{\gamma_i - \gamma_k} = \sum_{j=0}^{N-1} w_j(\rho)' \frac{1}{\gamma_i!} (\rho h^{(j)})^{\gamma_i}$$

から、 $i = 0, 1, \dots, N-1$ に対して

$$\frac{1}{(\gamma_i - \gamma_k)!} h^{\gamma_i - \gamma_k} = \sum_{j=0}^{N-1} \rho^{|\gamma_k|} w_j(\rho)' \frac{1}{\gamma_i!} (h^{(j)})^{\gamma_i} \quad (21)$$

を得る。このとき、連立一次方程式 (20), (21) は同じ一意解をもつので

$$\rho^{|\gamma_k|} w_j(\rho)' = w'_j, \quad j = 0, 1, \dots, N-1 \quad (22)$$

が成り立つ。

一方 $i \geq N$ に対して

$$\delta_i(\rho) := \frac{1}{(\gamma_i - \gamma_k)!} (\rho h)^{\gamma_i - \gamma_k} - \sum_{j=0}^{N-1} w_j(\rho)' \frac{1}{\gamma_i!} (\rho h^{(j)})^{\gamma_i}$$

と置くと、式 (22) より

$$\begin{aligned} \delta_i(\rho) &= \frac{1}{(\gamma_i - \gamma_k)!} \rho^{|\gamma_i - \gamma_k|} h^{\gamma_i - \gamma_k} \\ &\quad - \sum_{j=0}^{N-1} \rho^{-|\gamma_k|} w_j' \frac{1}{\gamma_i!} \rho^{|\gamma_i|} (h^{(j)})^{\gamma_i} \\ &= \rho^{|\gamma_i| - |\gamma_k|} \delta_i(1) \end{aligned}$$

となる。したがって、誤差 $\varepsilon(\rho; \partial^{\gamma_k})$ は式 (13) 左辺の形を考慮すると

$$\begin{aligned} \varepsilon(\rho; \partial^{\gamma_k}) &= \sum_{i=N}^{\infty} \delta_i(\rho) \partial^{\gamma_i} u(x) \\ &= \sum_{i=N}^{\infty} \rho^{|\gamma_i| - |\gamma_k|} \delta_i(1) \partial^{\gamma_i} u(x) \\ &= O(\rho^{|\gamma_N| - |\gamma_k|}), \quad \rho \rightarrow 0 \end{aligned}$$

と評価できる。一般には

$$\begin{aligned} \varepsilon(\rho; P(\partial)) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{\gamma_k} \varepsilon(\rho; \partial^{\gamma_k}) \\ &= O(\rho^{|\gamma_N| - \max\{|\gamma_k| : a_{\gamma_k} \neq 0\}}) \\ &= O(\rho^{\mu_1 - \mu_2}) \\ &= O(\rho^{\mu_0}), \quad \rho \rightarrow 0 \end{aligned}$$

が得られる。

5. 高次差分法

高次差分近似 (5) を偏微分方程式の境界値問題へ応用する。

領域 $\Pi \cap \partial\Omega$ 上の関数 $\bar{a}_\alpha \in C^\infty(\Pi)$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$ は $|\alpha| > \mu - 1$ のとき $\bar{a}_\alpha = 0$ であるとする。式 (4) の微分作用素 $P(\partial)$ と $\bar{P}(\partial; x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^m} \bar{a}_\alpha(x) \partial^\alpha$, $x \in \partial\Omega$ および、関数 $f \in C^\infty(\Omega)$ と $g \in C^\infty(\Pi)$ をとる。このとき

$$P(\partial)u(x) = f(x), \quad x \in \Omega \quad (23)$$

$$\bar{P}(\partial; x)u(x) = g(x), \quad x \in \partial\Omega \quad (24)$$

を満たす関数 $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ を求める境界値問題を考える。ただし $\bar{\Omega}$ は Ω の閉包である。

閉領域 $\bar{\Omega}$ 内に求積点 $x^{(k)}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$ をとる。各 $k = 0, 1, \dots, N-1$ に対して、実数 $a_\alpha^{(k)}$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$ を用いて微分作用素とデータを

$$\begin{aligned} P_k(\partial) &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^m} a_\alpha^{(k)} \partial^\alpha \\ &:= \begin{cases} P(\partial), & x^{(k)} \in \Omega \\ \bar{P}(\partial; x^{(k)}), & x^{(k)} \in \partial\Omega \end{cases} \\ f_k &:= \begin{cases} f(x^{(k)}), & x^{(k)} \in \Omega \\ g(x^{(k)}), & x^{(k)} \in \partial\Omega \end{cases} \end{aligned}$$

と置くことで、境界値問題 (23)-(24) を

$$P_k(\partial)u(x^{(k)}) = f_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (25)$$

として離散化する。このとき、与えられた f_k , $k = 0, 1, \dots, N-1$ から真値 $u(x^{(j)})$ の近似値 u_j , $j = 0, 1, \dots, N-1$ を求める。

求積点 $x^{(k)}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$ の近傍系 $S_k \subset \mathbb{R}^m$ で $\bigcup_{k=0}^{N-1} S_k \supset \bar{\Omega}$ となるものをとる。各集合 $N(S_k) := \{j \in \{0, 1, \dots, N-1\} : x^{(j)} \in S_k\}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$ の要素数を M_k と置くと、 $m_{kj} \in N(S_k)$, $j = 0, 1, \dots, M_k - 1$, $k = 0, 1, \dots, N-1$ を満たす対応表 $\{m_{kj}\}$ を作る。

任意に $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ をとり固定する。差分近似 (5) から

$$P_k(\partial)u(x^{(k)}) \approx \sum_{j \in N(S_k)} w_{kj} u(x^{(j)}) \quad (26)$$

と近似し、重み w_{kj} , $j \in \{m_{k0}, m_{k1}, \dots, m_{kM_k-1}\} = N(S_k)$ を計算する。差分近似 (5) の重みが連立一次方程式 (9) の解として与えられることから、重み w_{kj} , $j \in N(S_k)$ を連立一次方程式

$$P_k(h^{(i)})e^{h^{(i)} \cdot h^{(k)}} = \sum_{j \in N(S_k)} w_{kj} e^{h^{(i)} \cdot h^{(j)}} \quad (27)$$

$$i = 0, 1, \dots, N-1$$

の解として与える。ここで列ベクトル $q^{(k)} = (q_i^{(k)})$ と行列 $L_k = (l_{ij}^{(k)})$ を

$$q_i^{(k)} := P_k(h^{(i)})e^{h^{(i)} \cdot h^{(k)}},$$

$$l_{ij}^{(k)} := \begin{cases} e^{h^{(i)} \cdot h^{(j)}}, & j \in N(S_k), \\ 0, & j \notin N(S_k), \end{cases}$$

$$i, k = 0, 1, \dots, N-1$$

と置くことによって、未知の重み w_{kj} からなる列ベクトル $\mathbf{w}^{(k)} = (w_{kj})$ は連立一次方程式 (27) より $\mathbf{q}^{(k)} = L_k \mathbf{w}^{(k)}$ によって定まる。すなわち

$$\mathbf{w}^{(k)} = L_k^{-1} \mathbf{q}^{(k)} \quad (28)$$

を得る。

方程式 (25) と差分近似 (26) から近似値 u_j , $j = 0, 1, \dots, N-1$ を連立一次方程式

$$\sum_{j=0}^{N-1} w_{kj} u_j = f_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (29)$$

の解として定める。行列 ${}^tW := ({}^t\mathbf{w}^{(0)} \mathbf{w}^{(1)} \dots \mathbf{w}^{(N-1)})$ と列ベクトル $\mathbf{u} = (u_j)$ と $\mathbf{f} = (f_k)$, $j, k = 0, 1, \dots, N-1$ を用いることで連立一次方程式 (29) は $W\mathbf{u} = \mathbf{f}$ と表される。行列 (28) を用いて近似値 u_j , $j = 0, 1, \dots, N-1$ は

$$\mathbf{u} = W^{-1} \mathbf{f} \quad (30)$$

で与えられる。

境界値問題 (23)-(24) の解を式 (30) によって近似する方法を高次差分法と呼ぶ。

6. 補間法

高次差分近似を用いた補間法を導入する。値 u_j , $j = 0, 1, \dots, N-1$ に対して補間関数 $\tilde{u}$ は $\tilde{u}(\mathbf{x}^{(j)}) = u_j$ を満たすことにする。高次差分近似 (5) において、微分作用素 $P(\partial)$ を恒等作用素、ベクトル $\mathbf{h}$ を $\mathbf{0}$ と置くことによって連立一次方程式

$$1 = \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{w}_j e^{\mathbf{h}^{(i)} \cdot \mathbf{h}^{(j)}}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1$$

を得る。重み $\tilde{w}_j$, $j = 0, 1, \dots, N-1$ によって、補間関数を

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) := \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{w}_j u_j \quad (31)$$

と定義する。

7. 数値例

数値例を示す。領域 $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ の境界 $\Gamma_d = [0, 1] \times \{0\}$ 上で Cauchy データ $\bar{u}_n = 0$, $\bar{q}_n = -\sin(n x_1)$ を与える。このとき、Cauchy 問題の解は

$$u_n(x_1, x_2) = \frac{1}{n} \sin(n x_1) \sinh(n x_2)$$

である。

高次差分法において用いる求積点を図 1 に示す。領域 Ω 内の $\blacklozenge$ によって表される点 $\mathbf{x}^{(i)}$ において $\Delta u(\mathbf{x}^{(i)}) = 0$ が成り立つとする。また境界 Γ_d 上の $\blacksquare$ によって表される点 $\mathbf{x}^{(j)}$ および $\triangle$ によって表される点 $\mathbf{x}^{(k)}$ において、それぞれ $u(\mathbf{x}^{(j)}) = \bar{u}(\mathbf{x}^{(j)}) = 0$ と $\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}^{(k)}) = \bar{q}(\mathbf{x}^{(k)})$ が成り立つとする。

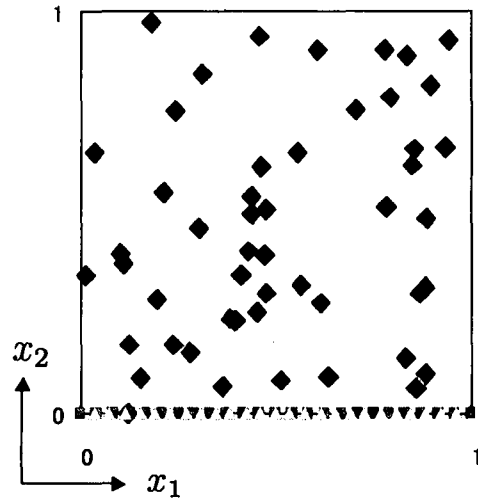


図-1 求積点の配置

パラメータ $n = 1$ に対する数値解、および数値解と真の解を重ねた等高線を図 2 に示す。真の解と数値解の等高線は良く一致していることが分かる。

パラメータ $n = 2$ に対する数値解、および数値解と真の解を重ねた等高線を図 3 に示す。真の解と数値解の等高線は良く一致しているが、 $n = 1$ の場合に比べてわずかにずれが見られる。

以上の数値結果は、高次差分法が非適切性の弱い問題に対し比較的良い精度の近似解を導出できるという意味で有効であることを示唆している。

パラメータ $n = 10$ に対する数値解のグラフを図 4 に、真の解のグラフを図 5 に示す。両者のグラフは値が大きく異なっているが、似た形状であることが分かる。

パラメータ $n = 20$ に対する数値解のグラフを図 6 に、真の解のグラフを図 7 に示す。ただし、真の解は $x_2 < 0.7$ のグラフを示した。両者のグラフは値、形状共に大きく異なることが分かる。

以上の結果はパラメータ n が大きくなるほど解の誤差が大きくなる傾向を示している。真の解は n が大きいとき、すなわち Γ_d で与えられた Neumann データの x_1 に関する周波数が大きいとき、 x_2 の増

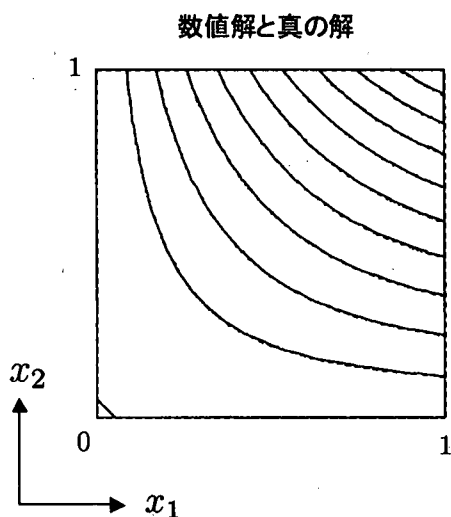
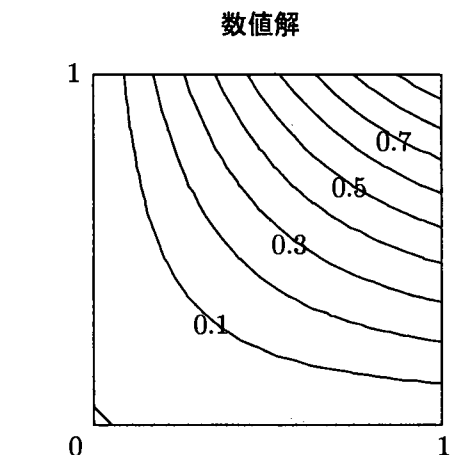


図-2 数値解 (—) と真の解 (---) ($n = 1$)

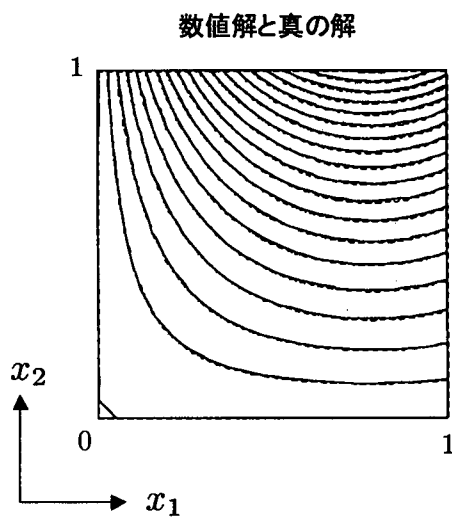
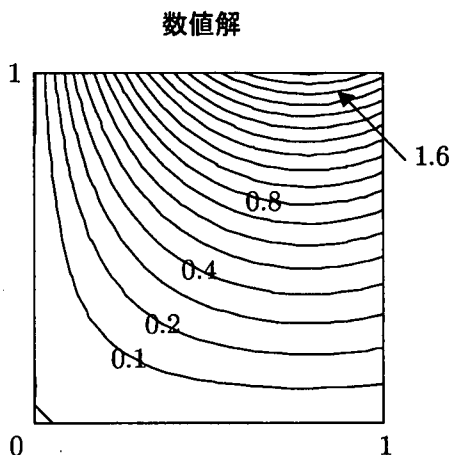


図-3 数値解 (—) と真の解 (---) ($n = 2$)

加にともない値が急激に増加するという特徴をもつ。高次の差分法を用いて離散化誤差を抑えても、計算機内で生じる丸め誤差程度のわずかな誤差に対しても数値解は影響を受けたことが考えられる。離散化誤差と丸め誤差の両方を考慮した非適切問題の研究として^{2), 4)}がある。

一方、求積点数 N を大きくとったために、(28)式における行列 L_k が悪条件になったことも数値解の誤差が大きくなった原因と考えられる。数値例では、近似 (26) において、すべての求積点に関して和をとっている。今後、各求積点 $\mathbf{x}^{(k)}$ の近傍 S_k 内の求積点に関して和をとった高次差分近似を使用して、行列 L_k の条件数を下げることがある。高次差分近似の重みの決定において、(8) 式の $i\xi$ および (18) 式の ξ を $h^{(i)}$ によって置き換えたが、この置き換え方が適切でない可能性も考えられる。

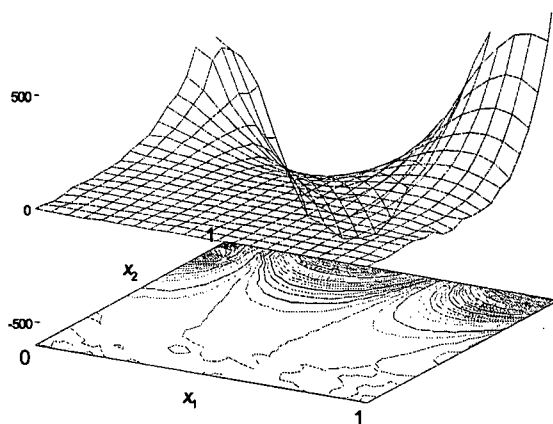


図-4 数値解 ($n = 10$)

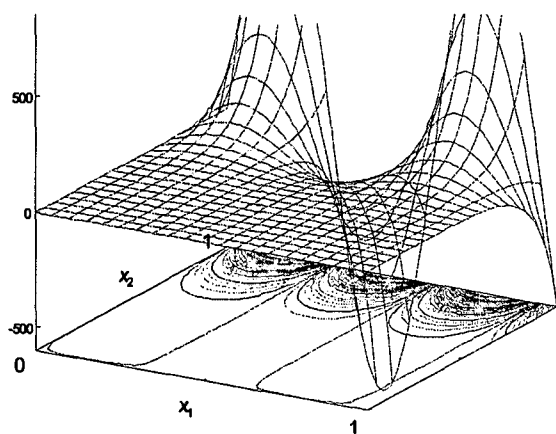


図-5 真の解 ($n = 10$)

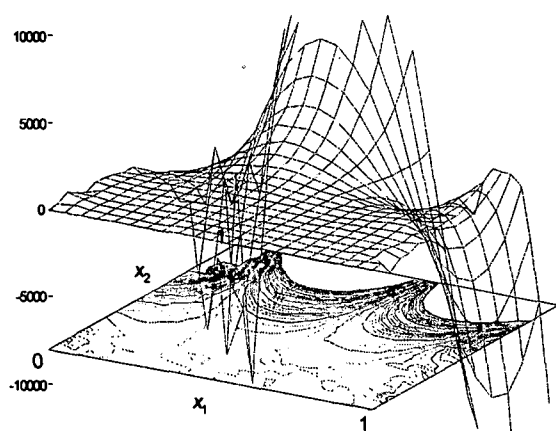


図-6 数値解 ($n = 20$)

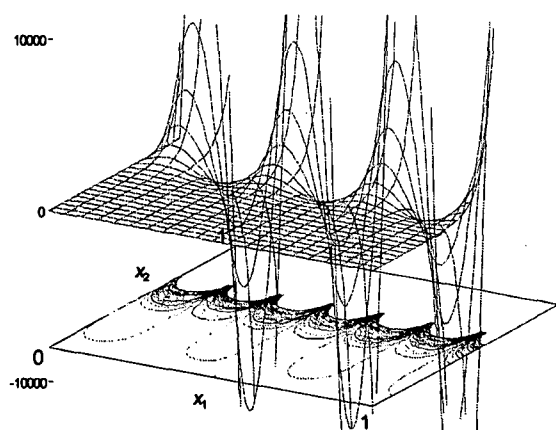


図-7 真の解 ($n = 20$)

8. まとめ

求積点を任意の位置に配置できる高次の差分法を構成した。本手法を Laplace 方程式の Cauchy 問題へ適用した。正弦関数によって Neumann データを与えたとき、周波数が 1, 2 に対しては数値誤差が小さく良い結果であった。周波数が 10 のとき数値誤差が大きくなったが、真の解のグラフの形状を推定することは可能であった。

今後の課題として、近傍を考慮した差分近似を用いた数値実験、近似重み決定時の $i\xi$ および ξ の置き換え方の検討、誤差評価に関する研究が挙げられる。

参考文献

- 1) K. Hayashi, Y. Ohura, and K. Onishi, Direct-method of solution for general boundary value problem of the Laplace equation, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 26, pp. 763-771 (2002).
- 2) H. Imai, T. Takeuchi, and M. Kushida, On numerical simulation of partial differential equations in infinite precision, *Advances in Mathematical Sciences and Applications*, Gakkōtoshō, Tokyo, Vol. 9, No. 2, pp. 1007-1016 (1999).
- 3) 今里 淳, 酒井 譲, CAD データを用いたフリーメッシュ法の 3 次元問題への適用, 日本計算工学会論文集, 論文番号 20020001, (2002).
- 4) H. Fujiwara and Y. Iso, Numerical challenge to ill-posed problems by fast multiple-precision system, *Theoretical and Applied Mechanics Japan*, Vol. 50, pp. 419-424 (2001).
- 5) S. I. Kabanikhin and A. L. Karchevsky, Optimizational method for solving the Cauchy problem for an elliptic equation, *J. Inv. Ill-Posed Problems*, Vol. 3, No. 1, pp. 21-46 (1995).
- 6) 垣田高夫, シュワルツ超関数入門 [新装版], 日本評論社 (1999).
- 7) 溝畑 茂, 偏微分方程式論, 岩波書店 (1965).
- 8) 高見頼郎, 河村哲也, 監修: 田辺行人, 高見頼郎, 偏微分方程式の差分解法, 東京大学出版会 (1994).
- 9) 登坂宣好, 大西和榮, 山本昌宏, 逆問題の数理と解法・偏微分方程式の逆解析, 東京大学出版会 (1999).

(2003 年 4 月 18 日 受付)