

レーザひずみ計測装置を用いた応力逆解析に基づく アルミニウム材料内の応力場の取得に関する研究

Acquisition of Stress Fields in Aluminum Material based on
Stress Inversion Technique with Laser Strain Analyzer

亀田敏弘*・中瀬早苗**

Toshihiro KAMEDA and Sanae NAKASE

*正会員 Ph.D. 筑波大学講師 機能工学系 (〒 305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1)

**正会員 工修 航空自衛隊

In order to develop quantitative stress measurement in the material, stress inversion technique combined with laser speckle interferometry method is proposed. Three different shapes of aluminum specimen are used, and stress increment fields under the monotonic loading are studied. The result shows that the spontaneous stress field can be obtained by means of the sum of stress increments with the continuous displacement measurement.

Key Words : stress inversion, laser, elastic plastic deformation, stress field, measurement

1. はじめに

破壊現象を把握するためには、作用している応力を知ることが重要であるが、応力は内力であるため、直接計測することは不可能である。

堀らによって、材料内部の変位場と境界に作用する応力を取得することにより、弾塑性材料内の応力場が計算可能となる応力逆解析手法が示され¹⁾、GPSを用いて日本列島の変位場を取得し、列島内の応力場を取得した例が報告された²⁾。松岡らはアルミ棒材を用いたモデル実験に応力逆解析手法を適用した例を報告した³⁾。

応力逆解析を用いると、変位場と応力場の対応関係が得られることから、変位と荷重の1対1対応による既存の材料試験と比較して一度の実験で得られる情報が飛躍的に増加する。著者はこうした観点から材料試験の一方法として、豊浦砂を対象に画像解析による変位場取得を行い、応力逆解析による弾塑性応力場の取得を行った⁴⁾。

著者は応力逆解析を用いると、構成則を仮定することなく応力場が得られることから、構成則決定が困難な弾塑性材料に対して、応力逆解析を用いてひずみ増分と応力増分の対応関係を蓄積してデータベース化することにより、構成則の代わりにデータベースを用いる有限要素解析を提案し⁵⁾、詳細な応力逆解析が可能となれば、構成則を陽な形で定式化することなく、データベースアクセスにより数値解析を遂行可能であることを示した。

本研究は、面内変形2軸と面外変形1軸の計3軸を精度良く変位場を測定できるレーザスペックル法に基

づく計測装置を利用して変位場を測定し、応力関数を用いた応力逆解析手法⁶⁾を用いて、実材料の2次元応力場を計測する材料試験手法の構築を目指したものである。現有する試験機の容量(5kN)、変位計測が可能な供試体寸法、供試体の製作の容易さを考慮して、実験対象としてアルミ材料を用いた。局所的な応力分布を計測する目的から、平板に加えて、2種類の異なる大きさの円孔を持つ供試体に対する計測を行った。

2. 応力関数に基づく応力逆解析の定式化

式(1)を満足するような応力関数 $a(x, y)$ を考える。

$$\sigma_{11} = a_{,22} \quad \sigma_{22} = a_{,11} \quad \sigma_{12} = -a_{,12} \quad (1)$$

$\sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22}$ は、ひずみの関数 $\sigma = f(\varepsilon)$ で表されるとすれば、 f により、エアリーの応力関数は以下のポアソン方程式を満たすことになる。

$$a_{,11} + a_{,22} = f(\varepsilon) \quad (2)$$

式(2)における境界条件は境界でのトラクション t_i を用いて、境界 ∂S の微小長さ dl について積分することによって定められる。すなわち

$$\bar{r}_i = \int t_i dl \quad (3)$$

と定義し、境界 ∂S に沿った単位方向ベクトル s_i と単位法線ベクトル n_i との関係 $s_1 = -n_2, s_2 = n_1$ を用いることにより、 a と $\bar{r}_i$ の関係を表すことができる。例えば、点Aから点Bに沿った $\bar{r}_1$ は

$$\begin{aligned}\bar{r}_1 &= \int_A^B (n_1\sigma_{11} + n_2\sigma_{12})dl = \int_A^B (s_2a_{,22} + s_1a_{,12})dl \\ &= [a_{,2}]_A^B\end{aligned}\quad (4)$$

となる。ここで、 $d(\cdot)/dl = s_1(\cdot)_{,1} + s_2(\cdot)_{,2}$ を使っている。同様に

$$\bar{r}_2 = -[a_{,1}]_A^B \quad (5)$$

となる。これらの合力はエアリーの応力関数に関するノイマン境界条件を定める。すなわち

$$n_1a_{,1} + n_2a_{,2} = -n_1\bar{r}_2 + n_2\bar{r}_1 \quad (6)$$

式(2)、(6)から以下のようにエアリーの応力関数に関する境界値問題が定められる。

$$\begin{aligned}a_{,11} + a_{,22} &= f(\bar{\epsilon}) \quad \text{on } S \\ n_1a_{,1} + n_2a_{,2} &= -n_1\bar{r}_2 + n_2\bar{r}_1 \quad \text{along } \partial S\end{aligned}\quad (7)$$

ここで、 $\bar{\epsilon}$ 、 $\bar{r}_i$ は計測された変位と境界での応力から定められる値である。

次に弾塑性体に適用することを考える。物体は平面応力状態にある場合、面外方向の変位増分は物体の厚さとひずみ増分の積で与えられる。また、ひずみ増分 $d\epsilon_{33}$ は、弾性部分と塑性部分に分解される。すなわち

$$d\epsilon_{33} = d\epsilon_{33}^e + d\epsilon_{33}^p = \frac{du_{33}}{h} \quad (8)$$

ここで h は厚さであり、 e と p はそれぞれ弾性ひずみと塑性ひずみを表している。

また塑性ひずみの非圧縮条件と、平面応力状態において $d\sigma_{33} = 0$ ということから、以下のように書ける。

$$d\epsilon_{11}^p + d\epsilon_{22}^p + d\epsilon_{33}^p = 0 \quad (9)$$

$$(1 - \nu)d\epsilon_{33}^e + \nu(d\epsilon_{11}^e + d\epsilon_{22}^e) = 0 \quad (10)$$

ここで ν はポアソン比である。

これら2つの式を用いることにより、

$$d\epsilon_{33} = -\frac{\nu}{1 - \nu}(d\epsilon_{11}^e + d\epsilon_{22}^e) - (d\epsilon_{11}^p + d\epsilon_{22}^p) \quad (11)$$

となり、ここに $d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p = d\epsilon_{ij}$ ($i, j = 1, 2$) を用いると以下ようになる。

$$d\epsilon_{11}^e + d\epsilon_{22}^e = \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu}(d\epsilon_{11} + d\epsilon_{22} + d\epsilon_{33}) \quad (12)$$

$\epsilon_{11} + \epsilon_{22} = u_{1,1} + u_{2,2}$ 、 $\epsilon_{33} = \frac{u_3}{h}$ の増分から $\sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22}$ の増分が定まり、 f は以下のように求まる。

$$f(d\epsilon) = \frac{E}{1 - 2\nu}(d\epsilon_{11} + d\epsilon_{22} + d\epsilon_{33}) \quad (13)$$

最終的に解くべきエアリーの応力関数の境界値問題は次のようになる。

$$da_{,11} + da_{,22} = f(d\bar{\epsilon}) \quad \text{on } S \quad (14)$$

$$n_1da_{,1} + n_2da_{,2} = -n_1d\bar{r}_2 + n_2d\bar{r}_1 \quad \text{along } \partial S \quad (15)$$

この境界値問題を解くことにより、 $da(x, y)$ を求め、式(1)から、 $d\sigma_{11}$ 、 $d\sigma_{22}$ 、 $d\sigma_{12}$ を求めることができる。

3. 数値実験による検証

まず、理論数値実験により応力逆解析の精度の検証を行う。方法は以下の通りである。なお、緒量はヤング率ならびに材料幅で無次元化した。

1. 弾塑性有限要素法による応力計算

ミーゼスの降伏条件に従う材料を仮定し、Y 軸方向の1軸引張試験を変位制御により行う場合を想定して、3次元弾塑性有限要素法により、試験片内部の変位と応力を求める。変位は step0 から step19 まで 0.001 ずつ変位させた。

2. 応力逆解析による応力計算

図1の材料内部の各節点における弾塑性有限要素法によって求めた変位と、境界におけるトラクションを用いて、応力逆解析問題となるポアソン方程式(14)(15)を有限要素解析により解くことにより、試験片内部の応力を求める。用いた境界条件は以下の通りである。

(a) 材料上部と下部

全周ノイマン問題の困難を回避するため、式(16)に示すように、トラクションから、エアリーの応力関数の値を求め、基本境界条件として与える。

$$da = \frac{1}{2}t_2x^2 \quad (16)$$

(b) 材料側面

式(15)に示すように、自然境界条件を与える。

3. 上記1と2で求めた材料モデル内部の応力を比較することにより、応力逆解析の精度を検証する。

図2は、材料モデル中心部における、弾塑性有限要素法により得られたY方向の応力と、応力逆解析により得られたY方向の応力をプロットしたものである。

応力逆解析により得られた応力は、弾塑性有限要素解析の結果と良好な一致を示していると考えられる。

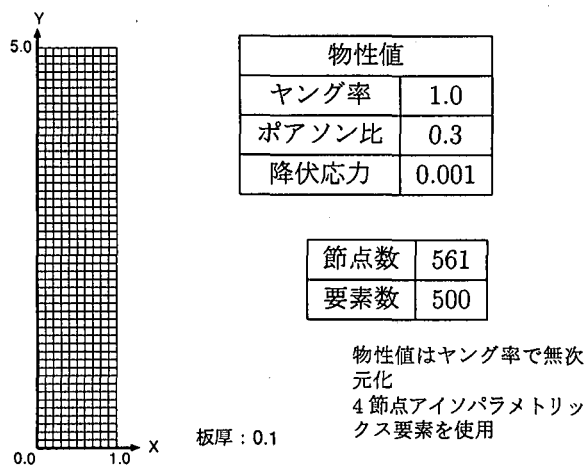


図-1 数値実験モデル

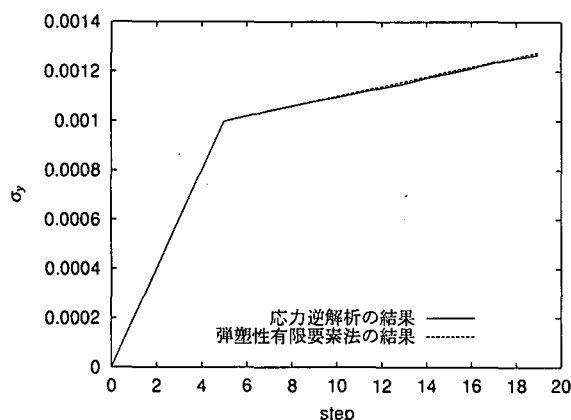


図-2 応力の比較検証

4. 実材料に対する応力逆解析

4.1 载荷装置

引張試験装置であるオートグラフ (AGS-H、島津製作所製) により、試験片に $10\mu\text{m}$ ずつ変位を与える。つまり 1 ステップ間の変位増分が $10\mu\text{m}$ である。なお、逆解析には影響を与えないが、クロスヘッドの測定分解能は $1\mu\text{m}$ であり、 $0.5\mu\text{m} \sim 1.5\mu\text{m}$ の幅の誤差があることが確認された。

4.2 試験片

試験片には、工業用純アルミ A1100 を使い、試験は 3 種類の形状の試験片について行った。外形を図 3 に示す。円孔は試験片中央部に設け、直径を 5mm 、 10mm とした。これらの試験片における計測範囲と解析条件を、それぞれ図 4、図 5、図 6 に示す。図中において、供試体幅が 30mm であるのに対して、計測領域幅が数 mm 狭い理由は、供試体背後の影響を取り除くために、供試体の若干内側を計測領域として設定する必要があるためである。また、図 4 において、供試体の中心は計測領域の $Y=65\text{mm}$ の位置である。

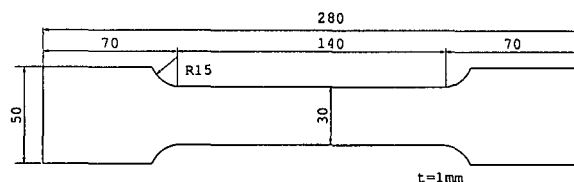


図-3 試験片寸法

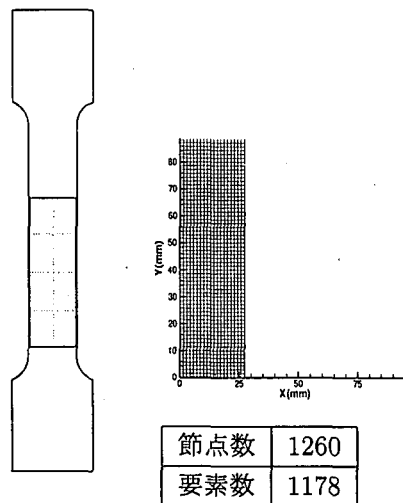


図-4 円孔がない場合の解析範囲

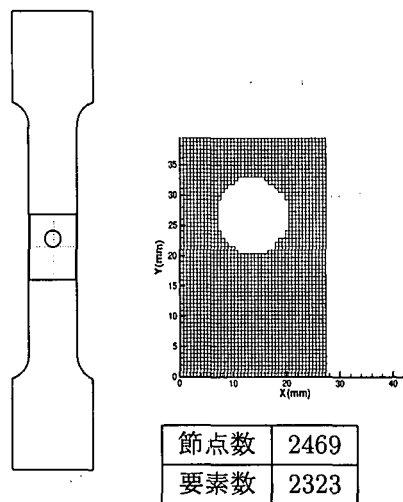


図-5 直径 10mm の円孔を有する場合の解析範囲

4.3 変位計測装置

図 4～6 に示す解析範囲の 1 ステップ間の面全体についての変位増分をレーザーストレインアナライザ (ETTEMAYER 社 3D ESPI) によって測定する。

この装置はスペックル干渉法を利用した変位測定装置であり測定物の面内変位 2 軸と面外変位 1 軸を同時に測定できる。計測感度は $0.03 \sim 0.1\mu\text{m}$ 、計測レンジは $1 \sim 20\mu\text{m}$ ($20\mu\text{m}$ 以上は分割して計測) である。

4.4 応力逆解析

計測された変位場と、境界条件から得られるポアソン方程式を有限要素解析によって解く。上端と下端に

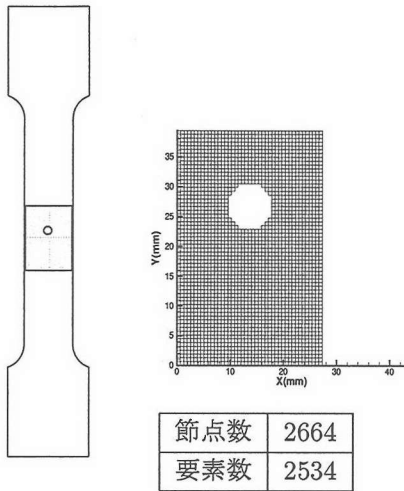


図-6 直径 5mm の円孔を有する場合の解析範囲

はロードセルから得られる荷重から基本境界条件を求めて与える。左右端はトラクションは作用しないとして、ノイマン境界条件を与える。逆解析において、ヤング率 E は図 7 に示す円孔なしの場合の実測結果から $E=14.04\text{GPa}$ 、ポアソン比 ν は代表的な値 $\nu=0.3$ とした。レーザー変位計測装置は正方形視野内の 512×512 点の変位を観測するため、長方形領域を計測対象とする場合には、長辺方向に 512 点の計測が可能であるのに対して、短辺方向の計測点数は減少してしまう。したがって、上端は円孔からの距離が不十分であるため、仮定した境界条件と実際の境界量との差異から誤差が生じることが予想されるが、円孔から離れた部分の結果も得られるよう、あえて上下非対称な計測領域を設定した。

5. 実験結果

5.1 円孔が無い場合

図 7 に、試験機のスロークとロードセルの読みから得られた巨視的な応力ひずみ曲線を示す。図中の a、b、c、d、e、f において、変位増分を $10\mu\text{m}$ 与えた時の応力逆解析を行った。代表的な結果として、塑性変形が部分的に進行している図中 b 点における解析結果を示す。図 8 から図 14 は、 du_x (x 方向変位増分)、 du_y (y 方向変位増分)、 $d\sigma_x$ 、 $d\sigma_y$ 、 $d\tau_{xy}$ 、 $d\bar{\epsilon}$ (相当塑性ひずみ増分)、 $d\bar{\sigma}$ (相当応力増分) である。

図 8, 9 の du_x 、 du_y から、試験片の中央付近に変位増分の勾配 (ひずみ増分) が集中していることがわかる。これは、ひずみが進行している地点であり、試験片の上部から現れ、試験片下部に移動することが観察された。これにより、塑性域が上方から下方へ伝播していることがわかる。このことは、相当応力増分 $d\bar{\sigma}$ が、集中していることから推測できる。

レーザーストレインアナライザーによって観察され

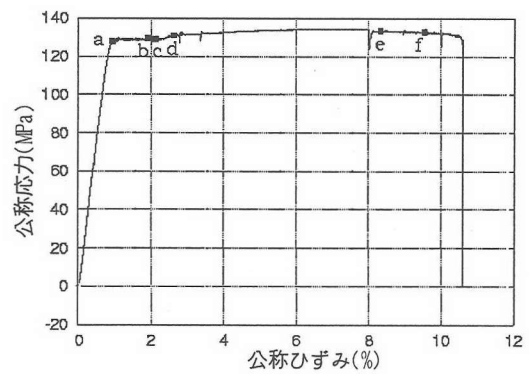


図-7 応力ひずみ曲線 (円孔なし)

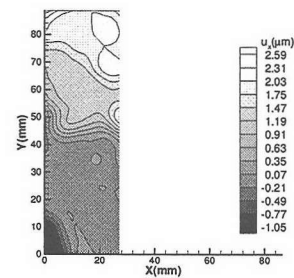


図-8 b における du_x (円孔なし)

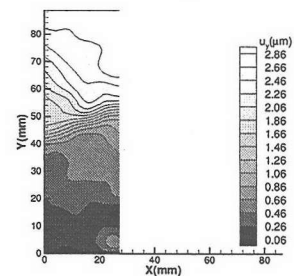


図-9 b における du_y (円孔なし)

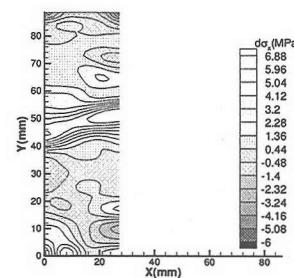


図-10 b における $d\sigma_x$ (円孔なし)

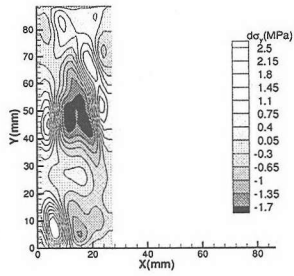


図-11 bにおける $d\sigma_y$ (円孔なし)

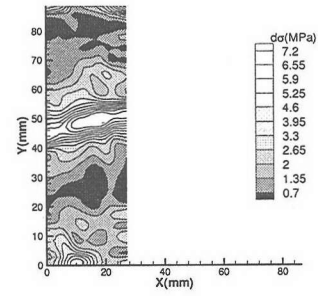


図-14 bにおける $d\sigma$ (円孔なし)

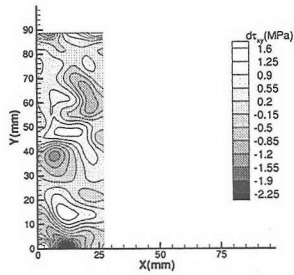


図-12 bにおける $d\tau_{xy}$ (円孔なし)

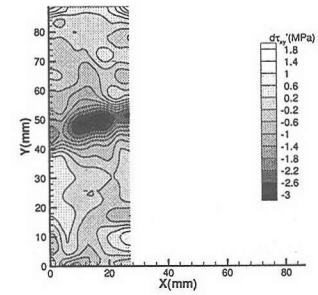


図-15 bにおける座標変換後の剪断応力増分(円孔なし)

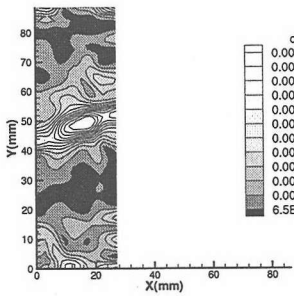


図-13 bにおける $d\epsilon$ (円孔なし)

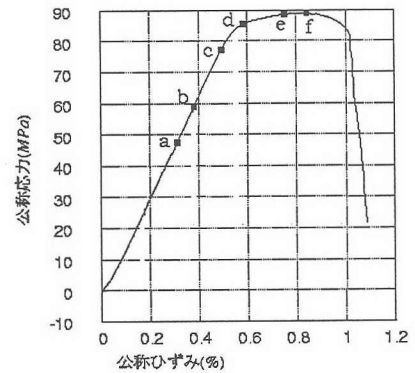


図-16 応力ひずみ曲線(円孔10mm)

たひずみ局在帯はx方向から約 20° 傾いていたため、最大せん断応力増分 $d\tau_{xy}$ を、 20° 回転させた座標系で表示させると図15のようになった。この図からも、剪断応力増分がこの面において大きくなっていることが確認できる。

5.2 円孔の直径が10mmの場合

図16に示すa、b、c、d、e、fにおいて、変位増分を $10\mu\text{m}$ 与えた時の応力逆解析を行った。以下、特徴的な結果について示すことにする。

aでは、円孔による影響があまり現れず、円孔付近の応力増分も小さいことが観察された。

bでは、図17,18に示すように、材料が円孔の左右で幅が減少する(以下「くびれる」と表記)ように変位し、 du_y はx方向から約 45° 回転した面に変位増分が集中しているように、円孔の影響が現れてきている。 $d\sigma_y$ を見ると、円孔の影響がない部分においては、ヤング率($E=14.04\text{GPa}$)に、この区間での公称ひずみ増分($d\epsilon_y = 55 \times 10^{-6}$)を乗じた公称応力増分 $d\sigma_y = 0.77\text{MPa}$ の値が確認できる。円孔上下の縁の $d\sigma_x$ は、円孔左右の縁の $d\sigma_y$ の約 $-\frac{1}{3}$ の応力増分が確認でき、応力集中の理論と整合性が見られる。

cでは、図21,22に示すように円孔付近におけるく

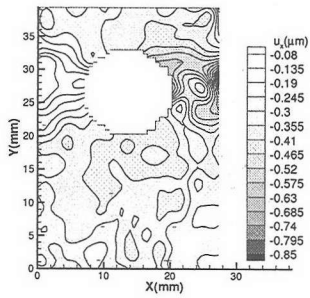


図-17 bにおける du_x (円孔 10mm)

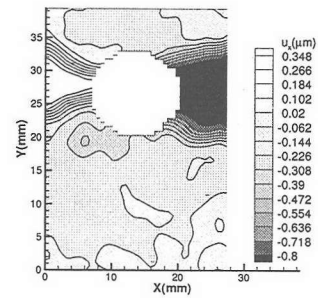


図-21 cにおける du_x (円孔 10mm)

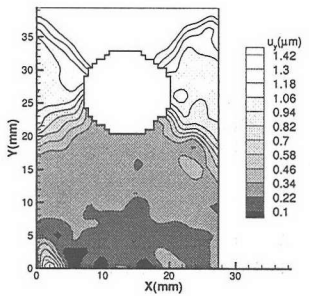


図-18 bにおける du_y (円孔 10mm)

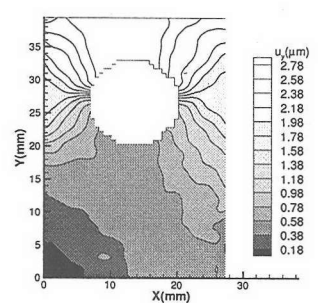


図-22 cにおける du_y (円孔 10mm)

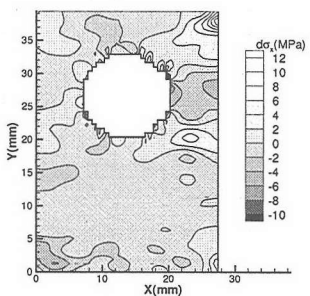


図-19 bにおける $dσ_x$ (円孔 10mm)

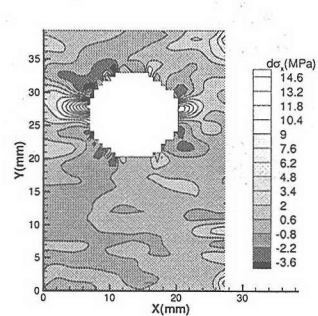


図-23 cにおける $dσ_x$ (円孔 10mm)

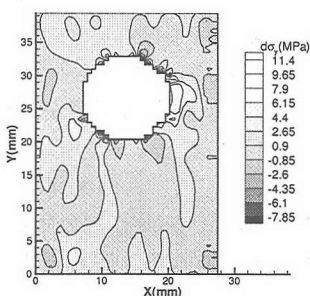


図-20 bにおける $dσ_y$ (円孔 10mm)

びれの進行が顕著になり、図 23 に見られるように応力状態が単軸引張とは大きく異なってくる。くびれが発生した領域の内外で異符号の応力増分 (内側：引張、外側：圧縮) が確認できた。

d, e, f と変形が進むにつれ、変位増分の集中は一層顕著となり破断した。図 24 に f における相当応力増分を示す。

5.3 円孔の直径が 5mm の場合

図 25 に示す a、b、c、d、e、f において、変位増分を $10\mu\text{m}$ 与えた時の応力逆解析を行った。なお、载荷

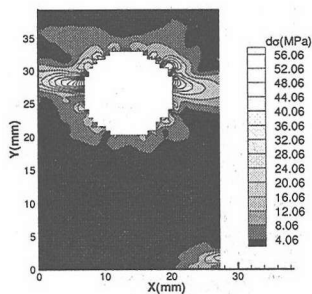


図-24 fにおける $d\sigma$ (円孔10mm)

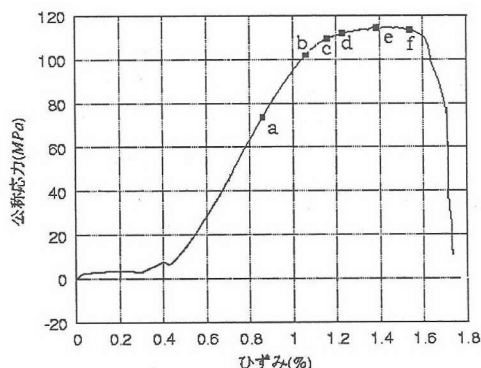


図-25 応力ひずみ曲線 (円孔 5mm)

初期の平坦部はチャックのかみあいの不具合によるものと考えられるが、逆解析には影響がなく、かつ、応力増分の計測時点を示すためにあえて掲載した。

a から e の変形過程においては、10mm の円孔の場合と大きな相違は見られなかった。破断に近い f においては、変型が集中したくびれ部において、応力増分の集中が 10mm の円孔の場合よりも一層大きいことが観察された。図 26 から図 32 に f における状態を示す。10mm の円孔を持つ場合と比較して、くびれ部における $d\sigma_x$ の正負の領域の幅が細くなっていること、 $d\epsilon$ 、 $d\bar{\sigma}$ が高い値を示す領域についても同様の結果となっていることが特徴的である。

6. おわりに

本研究では、応力関数を用いた応力逆解析手法の実材料計測への適用を行った。まず、理論数値実験により、弾塑性材料に対して、変位場と境界条件から良好に応力場を得ることが可能であることを確認した。これを踏まえ、円孔を有するアルミニウム材を対象としてレーザーストレインアナライザーによって得られた変位場を用いて応力逆解析を行い、材料の変形過程での応力増分の分布を把握した。円孔なし平板の引張試験では、塑性変形時の卓越した剪断応力増分を得るこ

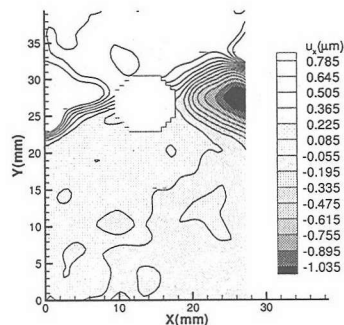


図-26 fにおける du_x (円孔5mm)

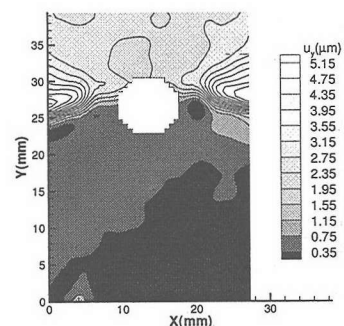


図-27 fにおける du_y (円孔5mm)

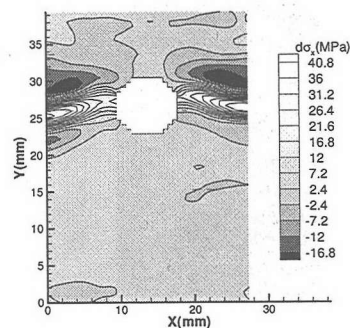


図-28 fにおける $d\sigma_x$ (円孔5mm)

とができた。また、円孔あり平板では、円孔付近の応力増分の集中をとらえることができた。

本研究では、変位制御により $10\mu\text{m}$ ずつ試験片に変位増分を与え、引張試験を行った。しかし、すべての変位増分間における試験片の面全体の変位を計測することができなかったため、全計測区間の応力増分の計測には至らず、ある時点における応力増分を取得することとどまった。したがって、ある時点の応力を得るこ

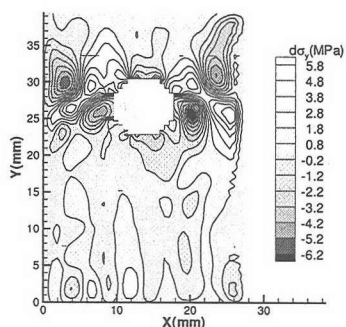


図-29 fにおける $d\sigma_y$ (円孔 5mm)

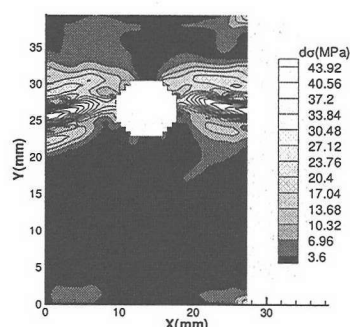


図-32 fにおける $d\sigma$ (円孔 5mm)

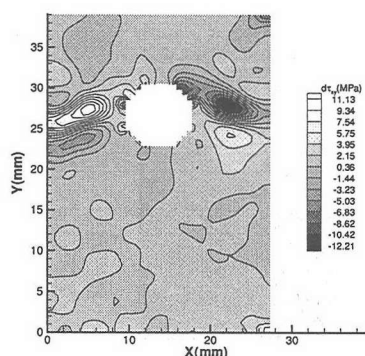


図-30 fにおける $d\tau_{xy}$ (円孔 5mm)

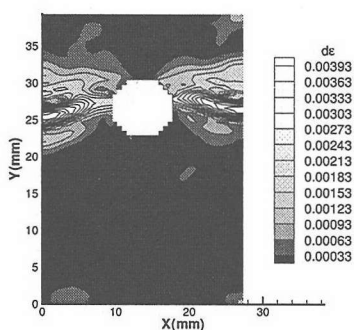


図-31 fにおける $d\epsilon$ (円孔 5mm)

1 ステップ後の領域内の応力場を求めることができる。次ステップにおいては、逆解析対象領域を新たに設定することにより、初期からみた変形が増大した場合においても、1 ステップあたりの変形はやはり微小であるため、問題を解くことができ、任意の時点における応力場が得られると考えている。

参考文献

- 1) M. Hori, T. Kameda, N. Hosokawa: Formulation of Identifying Material Property Distribution Based on Equivalent Inclusion Method, 土木学会論文集, 619/I-47, pp.13-22, 1999
- 2) M. Hori, T. Kameda, T. Kato: Application of the inversion method to a GPS network for estimating the stress increment in Japan, *Geophysics Journal International*, Vol.144, pp.597-608, 2001.
- 3) A. Matsuoka, M. Hori, A. Murakami, S. Aoyama: Stress distribution within granular body, *Inverse Problems in Engineering Mechanics III*, M. Tanaka, G.S. Dulikravich (Eds.), pp.185-191, Elsevier, 2002
- 4) 亀田敏弘: 等価介在物法を用いた逆解析手法による地盤材料の応力分布の取得 —地震動の高精度予測にむけて—, 地震研究所集報, Vol.75, pp.171-181, 2000.
- 5) 亀田敏弘, 尾崎孝宏: 構成則データベースに基づく有限要素解析に関する研究, 応用力学論文集, Vol.3, pp.637-644, 2000
- 6) M. Hori, T. Kameda: Inversion of stress from strain without full knowledge of constitutive relations, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.49, pp.1621-1638, 2001.

(2003 年 4 月 18 日 受付)

とはできていない。これは、载荷機の最低速载荷速度が、変位計測装置の処理速度に対して速いことに起因している。今後の改良によって、変位増分が連続的に計測可能となれば、得られる応力増分を足し合わせるにより、最終的な応力を得ることができると考えている。具体的には、载荷 1 ステップごとに、応力逆解析から得られるコーシー応力増分と計測される変位場から客観応力増分を求めることができ、したがって