

単純な管路非定常流の非線形動力学特性に関する研究

Non-linear Dynamics of Unsteady Pressurized Flows in a Simple Pipe System

細田 尚^{*}・明正茂樹^{**}・大谷修平^{***}

Takashi HOSODA, Shigeki MEISHO, and Shuhei OTANI

^{*} 正会員 工博 京都大学大学院教授 工学研究科都市社会工学専攻 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

^{**} 非会員 工修 日本アイ・ビー・エム株式会社 (〒106-8711 東京都港区六本木 3-2-12)

^{***} 学生会員 京都大学大学院工学研究科都市社会工学専攻 修士課程 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

We dealt with simple unsteady flows in a pipe with a vertical shaft at the inlet. A non-linear analytical solution of fundamental equations for unsteady pipe flows was derived firstly under a few hydraulic conditions with and without oscillatory inflow discharge at the inlet. We investigated the non-linear behavior such as the amplification of discharge variation near the resonance relation, which indicates the time period of free oscillation in the pipe flow system. The non-linear solution was compared with the results of numerical analysis to verify the solution. The hydraulic experiments were also carried out in this research to verify the applicability of the unsteady pipe flow model. It was pointed out through these considerations that the theoretical findings are in good agreement with the numerical and experimental results.

Key Words : non-linear analysis, pressurized pipe flow, non-linear oscillation, surging

1. はじめに

本研究は、水理学の古典的問題の一つである立坑を伴う管路系の非定常流のうち、流入部に立坑が1本存在する管路系に周期的な流入がある場合の流の非線形応答特性について理論的に考察し、さらに解析結果を実験的に検証しようとしたものである。

周期的流入のある管路系の非定常流は、基本的には管路の固有周期と流入周期が一致するときに共鳴する強制振動現象と考えられるが、共鳴点近傍での非線形応答特性やカオス発生の可能性等の基本的特性は知られていない。また、立坑部の流体運動のモデル化の際に、静水圧で近似できる鉛直方向の加速度を考慮すべきかの基準も明確でない。

そこで本研究では、まず流入が無い場合を考え、管路部と立坑に湛水し下流端を開放したときの立坑部の水位低下を取り扱う。立坑の流体運動をモデル化の際に、静水圧を仮定した場合と鉛直加速度を考慮した場合の二つを考え、立坑水位の時間変化に関する両者の解析解を導くことで、静水圧近似が成立する条件、特に管路と立坑部の断面積比の条件について考察する。

次に、静水圧近似が成立すると考えられる条件のもとで、同一の管路系に流入流量が周期的に変動する(一定の流量に周期的な流量変動を与えた)場合を考える。一定の流量が

流入する定常な流れ場に流量変動が与えられると、ピエゾ水頭は定常状態の動水圧配線を中心に振動する。その際の重力項と壁面摩擦項の差に起因する復元力が作用して固有振動が生じる。流量変動の周期がこの固有振動の周期に近い場合、すなわち共鳴条件付近での立坑水位の非線形応答特性について非線形解析を用いて考察を行う。

本研究で対象としている管路系は、実用的観点からは水力発電所、火力発電所の放水路系で生じる過渡現象を理想化した系とみなされる。また、漏刻と呼ばれる古代の水時計は上述の管路系の応答特性を利用している。すなわち、漏刻は何段かの水槽とそれを繋ぐサイフォンで構成されており、上端の水槽に間歇的に注水することで給水する。上端水槽からの流量変動が何段かの水槽を通るうちに平滑化され一様になることが漏刻の原理であり、流量変動の減衰は本研究で対象とする管路系の応答特性として説明される。(共鳴関係から離れた長周期領域では流量変動は減衰し、逆に共鳴関係付近では増幅することが示される。)

2. 上流端に立坑を1本有する管路系からの排水過程

図-1 に示したような上流端に立坑を1本有する管路系からの流入を伴わない場合の排水過程について考察する。まず、

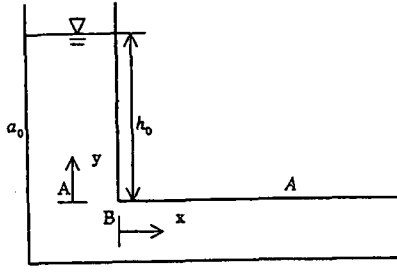


図-1 上流端に立坑を1本有する管路系

立坑内の圧力分布に鉛直加速度を考慮した場合の管路非定常流の基礎式について説明し、排水に伴う立坑での水位低下に関する非線形解を導く。次に、導かれた非線形解を用いて、立坑での流体運動に対する静水圧の仮定が成立する条件について考察する。

2. 1 立坑での鉛直加速度を考慮した基礎式

図-1 に示した座標系のもとで、立坑内の流れの連続式と運動方程式は以下のように近似される。ただし、流れは一方向であり、流速の正負は $V_0 > 0$, $v < 0$ である。

$$-a_0 v = -a_0 \frac{dh_0}{dt} = A V_0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + [\text{応力項}] \quad (2)$$

ここに、 v : 鉛直方向流速、 V_0 : 管路の流速、 a_0 : 立坑の断面積、 A : 管路の断面積、 ρ : 水の密度、 g : 重力加速度の大きさ、 t : 時間、 y : 空間座標を表す。

また、図中のA点とB点でベルヌーイの定理を適用すると次の関係式が近似的に成立する。

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p_A}{\rho g} = \frac{V_0^2}{2g} + \frac{p_B}{\rho g} + Ke \frac{V_0^2}{2g} \quad (3)$$

ここに、 Ke : 流入部の形状損失係数を表す。

式(2)を立坑の体積で積分すると次式となる。

$$h_0 \frac{d^2 h_0}{dt^2} = -g h_0 + \left(\frac{p}{\rho} \right)_A - f' \frac{h_0}{d} \frac{v|v|}{2} \quad (4)$$

ここに、 h : 立坑内水深、 d : 立坑の直径、 f' : 立坑の摩擦損失係数を表す。

式(3)、(4)を用いてA点とB点における圧力項を消去することで次式が導かれる。ただし、B点の圧力は管路出口の圧力を大気圧(=0)として運動方程式をB点から出口まで積分して得られる式を用いた。

$$\begin{aligned} \frac{l_0}{g} \frac{dV_0}{dt} - h_0 - \frac{h_0}{g} \frac{d^2 h_0}{dt^2} + \left(1 + Ke - \frac{A^2}{a_0^2} \right) \frac{V_0^2}{2g} \\ + f \frac{l_0}{D} \frac{V_0 |V_0|}{2g} + f' \frac{h_0}{d} \frac{V_0 |V_0|}{2g} \left(\frac{A}{a_0} \right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

ここに、 l_0 : 管路の長さ、 D : 管路の直径、 f : 管路の摩擦損失係数を表す。

式(1)から導かれる次の関係を式(5)に適用すると、基礎式(6)が導かれる。

$$\begin{aligned} \frac{dV_0}{dt} = -\frac{a_0}{A} \frac{d^2 h_0}{dt^2}, \quad V_0^2 = \left(\frac{a_0}{A} \right)^2 \left(\frac{dh_0}{dt} \right)^2 \\ - \frac{l_0}{g} \frac{a_0}{A} \frac{d^2 h_0}{dt^2} - \frac{h_0}{g} \frac{d^2 h_0}{dt^2} - h_0 + f' \frac{h_0}{d} \frac{1}{2g} \left(\frac{dh_0}{dt} \right)^2 \\ + \frac{1}{2g} \left(1 + Ke - \frac{A^2}{a_0^2} + f \frac{l_0}{D} \right) \left(\frac{a_0}{A} \right)^2 \left(\frac{dh_0}{dt} \right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

2. 2 基礎式の無次元化

無次元変数

$$V_0' = \frac{V_0}{\sqrt{g l_0}}, \quad t' = t \sqrt{\frac{g}{l_0}}, \quad h_0' = \frac{h_0}{l_0}$$

を用いて基礎式(6)を無次元化すると次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{d^2 h_0'}{dt'^2} + \varepsilon h_0' \frac{d^2 h_0'}{dt'^2} + \varepsilon h_0' - \frac{F_1}{\varepsilon} \left(\frac{dh_0'}{dt'} \right)^2 \\ - F_2 \varepsilon h_0' \left(\frac{dh_0'}{dt'} \right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

ここに、 F_1, F_2, ε は次式で定義される無次元化パラメータである。

$$F_1 = \frac{1}{2} \left(1 + Ke - \frac{A^2}{a_0^2} + f \frac{l_0}{D} \right), F_2 = \frac{1}{2} f' \frac{l_0}{d}, \varepsilon = \frac{A}{a_0}$$

2. 3 線形解

h_0' が小さい場合、式(7)は次の線形方程式で近似される。

$$\frac{d^2 h_0'}{dt'^2} + \varepsilon h_0' = 0 \quad (8)$$

上式を初期条件

$$t' = 0, \quad h_0' = \delta = H_0 / l_0, \quad \frac{dh_0'}{dt'} = 0$$

のもとで解くと、線形解

$$h_0' = \delta \cos \sqrt{\varepsilon} t' \quad (9)$$

が導かれる。ただし、 H_0 : 初期水深を表す。

2. 4 非線形解

次に、摂動法を用いて非線形解を導く¹⁾。

簡単のため、無次元量を表す¹⁾を省略する。

$\tau = \omega t$ とし、式(7)を書き換えると次式となる。

$$\omega^2 \frac{d^2 h_0}{d\tau^2} + \varepsilon h_0 \omega^2 \frac{d^2 h_0}{d\tau^2} + \varepsilon h_0 - \frac{F_1}{\varepsilon} \omega^2 \left(\frac{dh_0}{d\tau} \right)^2 - F_2 \varepsilon h_0 \omega^2 \left(\frac{dh_0}{d\tau} \right)^2 = 0 \quad (10)$$

δ を摂動のパラメータとして ω を次のように展開する。

$$\omega = \sqrt{\varepsilon} + \delta \omega_1 + \delta^2 \omega_2 + \dots \quad (11)$$

また、解を次のように展開する。

$$h_0 = \delta H_1 + \delta^2 H_2 + \delta^3 H_3 + \dots \quad (12)$$

式(11)、(12)を式(9)に代入し、 δ の1乗、2乗の係数を0とおくと次式が導かれる。

$$\delta^1 : \frac{d^2 H_1}{d\tau^2} + H_1 = 0 \quad (13)$$

$$\delta^2 : \frac{d^2 H_2}{d\tau^2} + H_2 = -2 \frac{\omega_1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{d^2 H_1}{d\tau^2} - \varepsilon H_1 \frac{d^2 H_1}{d\tau^2} + \frac{F_1}{\varepsilon} \left(\frac{dH_1}{d\tau} \right)^2 \quad (14)$$

式(14)の右辺第1項は、現実にはありえない振幅が時間 τ に比例する特解 $\tau \cos \tau$ を生じる。この項は永年項または共鳴項とよばれ、通常非現実的な解が生じないようにその係数を0とおく¹⁾。すなわち、 $\omega_1 = 0$ となる。

これらを考慮して δ の3乗の係数を0とおくと次式が導かれる。

$$\delta^3 : \frac{d^2 H_3}{d\tau^2} + H_3 = -\frac{2\omega_2}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{d^2 H_1}{d\tau^2} - \varepsilon \left(H_1 \frac{d^2 H_2}{d\tau^2} + H_2 \frac{d^2 H_1}{d\tau^2} \right) + 2 \frac{F_1}{\varepsilon} \frac{dH_1}{d\tau} \frac{dH_2}{d\tau} + \varepsilon F_2 H_1 \left(\frac{dH_1}{d\tau} \right)^2 \quad (15)$$

式(13)の解 H_1 は次式で表される。

$$H_1 = \bar{H}_0 \cos \tau \quad (16)$$

式(16)を δ^2 についての関係式(14)に代入すると次式となる。

$$\frac{d^2 H_2}{d\tau^2} + H_2 = \frac{1}{2} \bar{H}_0^2 \left(\varepsilon + \frac{F_1}{\varepsilon} \right) + \frac{1}{2} \bar{H}_0^2 \left(\varepsilon - \frac{F_1}{\varepsilon} \right) \cos 2\tau \quad (17)$$

上式を解くと H_2 に関して次式が導かれる。

$$H_2 = \frac{1}{2} \bar{H}_0^2 \left(\varepsilon + \frac{F_1}{\varepsilon} \right) + Z_2 \cos 2\tau \quad (18)$$

ここに、 Z_2 は次式で定義される。

$$Z_2 = -\frac{1}{6} \bar{H}_0^2 \left(\varepsilon - \frac{F_1}{\varepsilon} \right) \quad (19)$$

δ^3 の関係式において、永年項を0とすると ω_2 について次式が導かれる。

$$\frac{2\omega_2}{\sqrt{\varepsilon}} = -Z_2 \left(\frac{5}{2} \varepsilon + 2 \frac{F_1}{\varepsilon} \right) - \bar{H}_0^2 \left(\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{F_1}{2} + \frac{\varepsilon}{4} F_2 \right) \quad (20)$$

式(16)、(18)及び(20)を δ^3 の関係式(15)に代入すると次式となる。

$$\frac{d^2 H_3}{d\tau^2} + H_3 = \left(\varepsilon \frac{5}{2} \bar{H}_0 Z_2 - 2 \frac{F_1}{\varepsilon} \bar{H}_0 Z_2 - \varepsilon F_2 \frac{\bar{H}_0^3}{4} \right) \cos 3\tau \quad (21)$$

上式を解くと H_3 に関して次式が導かれる。

$$H_3 = -\frac{1}{8} \left(\varepsilon \frac{5}{2} \bar{H}_0 Z_2 - 2 \frac{F_1}{\varepsilon} \bar{H}_0 Z_2 - \varepsilon F_2 \frac{\bar{H}_0^3}{4} \right) \cos 3\tau \quad (22)$$

以上より、摂動解は次式で表される。

$$h_0 = \delta \bar{H}_0 \cos \tau + \delta^2 \left\{ \frac{1}{2\varepsilon} (\varepsilon^2 + F_1) \bar{H}_0^2 - \frac{\bar{H}_0^2}{6\varepsilon} (\varepsilon^2 - F_1) \cos 2\tau \right\} + \delta^3 \frac{\bar{H}_0^3}{8} \left\{ \frac{5}{12} \varepsilon^2 - \frac{3}{4} F_1 + \frac{1}{3} \frac{F_1^2}{\varepsilon^2} + \frac{1}{4} \varepsilon F_2 \right\} \cos 3\tau \quad (23)$$

$$\omega = \sqrt{\varepsilon}$$

$$- \delta^2 \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \left\{ Z_2 \left(\frac{5}{2} \varepsilon + 2 \frac{F_1}{\varepsilon} \right) + \bar{H}_0^2 \left(\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{F_1}{2} + \frac{\varepsilon}{4} F_2 \right) \right\} \quad (24)$$

式(23)は初期条件 $t=0 : h_0 = H_0$ を満たさなければならぬことから次式が導かれ、 $\bar{H}_0$ が求められる。

$$\delta = \delta \bar{H}_0 + \delta^2 \left(\frac{\varepsilon}{3} + \frac{2F_1}{3\varepsilon} \right) \bar{H}_0^2 + \delta^3 \left(\frac{5}{12} \varepsilon^2 - \frac{3}{4} F_1 + \frac{1}{3} \frac{F_1^2}{\varepsilon^2} + \frac{1}{4} \varepsilon F_2 \right) \frac{\bar{H}_0^3}{8} \quad (25)$$

図-2(a)、(b)に表-1の条件で計算された線形解(式(16))、摂動解(式(23))、ルンゲ・クッタ法で計算された数値解析解を示す。摂動解と数値解析解は本計算条件の範囲ではよく適合している。

さらに、導かれた摂動解を用いて、立坑圧力分布に静水圧を仮定した場合と鉛直加速度を考慮した場合の違いについて考察する。立坑内の水深が初期水深の2分の1になる時間で

この違いを評価する。

$h_0 = \Delta h_0$ となる時間を $t = T_0$ とすれば、式(23)から次式が成立する。

$$\begin{aligned} \Delta h_0 &= \delta \bar{H}_0^2 \cos \omega T_0 \\ &+ \delta^2 \left\{ \frac{1}{2\varepsilon} (\varepsilon^2 + F_1) \bar{H}_0^2 - \frac{\bar{H}_0^2}{6\varepsilon} (\varepsilon^2 - F_1) \cos 2\omega T_0 \right\} \\ &+ \delta^3 \frac{\bar{H}_0^3}{8} \left\{ \frac{5}{12} \varepsilon^2 - \frac{3}{4} F_1 + \frac{1}{3} \frac{F_1^2}{\varepsilon^2} + \frac{1}{4} \varepsilon F_2 \right\} \cos 3\omega T_0 \quad (26) \end{aligned}$$

一方、静水圧を仮定した場合、対応する式は次式となる。

$$\begin{aligned} \Delta h_0 &= \delta \bar{H}_0^2 \cos \omega T_0 + \delta^2 \frac{F_1}{2\varepsilon} \bar{H}_0^2 \left(1 + \frac{1}{3} \cos 2\omega T_0 \right) \\ &+ \delta^3 \frac{\bar{H}_0^3}{8} \left(\frac{1}{3} \frac{F_1^2}{\varepsilon^2} + \frac{1}{4} \varepsilon F_2 \right) \cos 3\omega T_0 \quad (27) \end{aligned}$$

ただし、式(27)中の ω は次式で定義される。

$$\omega = \sqrt{\varepsilon} - \delta^2 \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \left(2 \frac{F_1}{\varepsilon} Z_2 + \frac{\varepsilon}{4} F_2 \bar{H}_0^2 \right) \quad (28)$$

式(26)と(27)を $\Delta h_0 = 0.5\delta$, $\delta = 1.5$ として図示したのが図-3 である。本計算条件の場合、立坑面積が管路面積の4～5倍以上になると静水圧の仮定が成立することがわかる。

3. 周期的流入がある場合の立坑水位の振動特性

次に図-1 と同様の管路系において、流量が周期的に流入する場合の、立坑水位の振動特性について考察する。ここでは立坑面積が管路面積の10倍程度として、2.の結果を踏まえて立坑内の圧力分布に静水圧を仮定できる場合を考える。

3. 1 基礎式

図-4 を参照して、流入がある場合の管路非定常流の基礎式と記号の説明を記述すれば次のようになる²⁾。ただし、上述のように立坑内の圧力分布に静水圧を仮定するとともに、立坑内の運動エネルギーも無視している。

$$a_0 \frac{dh_0}{dt} = Q_{in} - AV_0 \quad (29)$$

$$\frac{l_0}{g} \frac{dV_0}{dt} - h_0 + (K_0 + 1) \frac{V_0^2}{2g} + f \frac{l_0}{D} \frac{V_0 |V_0|}{2g} = 0 \quad (30)$$

ここに、 h_0 : 流入立坑水深、 a_0 : 立坑断面積、 V_0 : 管路の流速、 A : 管路の断面積、 D : 管径、 l_0 : 管路長さ、 f : 管路の摩擦損失係数、 Q_{in} : 流入流量を表す。

表-1 図-2の水利条件

	a_0 (m^2)	A (m^2)	d (m)	D (m)	l_0 (m)	f	f'	Ke	H_0 (m)
Run 1	0.010	0.005	0.113	0.08	2.0	0.02	0.02	1.0	0.1
Run 2									1.0

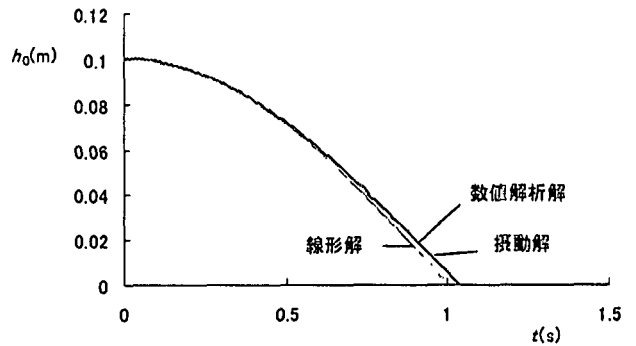


図-2(a) 線形解、摂動解、数値解析解の比較 (Run 1)

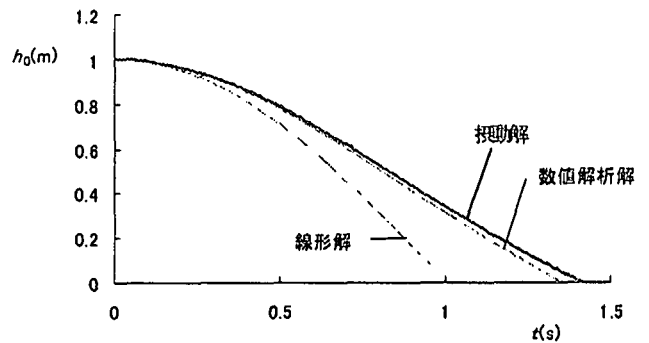


図-2(b) 線形解、摂動解、数値解析解の比較 (Run 2)

δ	l_0/D	Ke	f
1.5	28.02	1.0	0.02

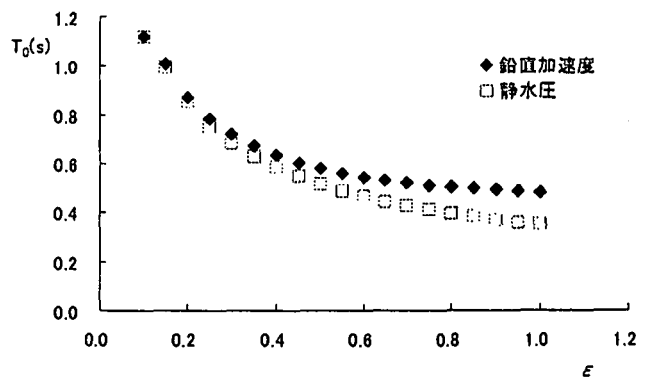


図-3 立坑内圧力分布に静水圧を仮定した場合と鉛直加速度を考慮した場合の水位低下時間の比較

3. 2 線形解

周知のように基礎式系の線形解は次のように導かれる。

周期的流入量 Q_{in} を一定値 Q_0 と変動成分 $Q_a \sin(\omega t)$ に分ける。

$$Q_{in} = Q_0 + Q_a \sin(\omega t) \quad (31)$$

同様に水深 h_0 、管路における流速 V_0 も次式のように一定値 h_s 、 V_s と変動成分 h'_0 、 V'_0 に分ける

$$h_0 = h_s + h'_0, \quad V_0 = V_s + V'_0 \quad (32)$$

逆流が生じないとして $V_0 > 0$ とおき、式(29)を用いて h'_0 を消去すれば次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{d^2 V'_0}{dt^2} + \frac{gA}{a_0 l_0} V'_0 - \frac{gQ_a}{a_0 l_0} \sin(\omega t) \\ + F \frac{V_s}{l_0} \frac{dV'_0}{dt} + F \frac{1}{l_0} V'_0 \frac{dV'_0}{dt} = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

上式を無次元量

$$\tilde{V}'_0 = V'_0 / V_s, \quad \tilde{t} = t V_s / D$$

を用いて無次元化し、非線形項を無視すればよく知られている線形化方程式が導かれる。

$$\frac{d^2 \tilde{V}'_0}{d\tilde{t}^2} + \delta \frac{d\tilde{V}'_0}{d\tilde{t}} + \alpha \tilde{V}'_0 = \beta \sin(\gamma \tilde{t}) \quad (34)$$

ここに、 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は次式で定義される。

$$\alpha \equiv \frac{gA}{a_0 l_0} \frac{D^2}{V_s^2}, \quad \beta \equiv \frac{gQ_a}{a_0 l_0} \frac{D^2}{V_s^3}, \quad \gamma \equiv \frac{D}{V_s} \omega, \quad \delta \equiv F \frac{D}{l_0}$$

$\tilde{V}'_0 = C_1(\tilde{t}) \sin(\gamma \tilde{t} + \phi_1(\tilde{t}))$ と置いて式(34)に代入すると、周知の流出流速の振幅 C_1 に関する応答関係式が得られる。

$$C_1^2 = \frac{\beta^2}{\delta^2 \gamma^2 + (\gamma^2 - \alpha)^2} \quad (35)$$

図-5 に式(35)を C_1 と ω の関係として示した。計算条件は表-2 に示した。条件によって共鳴が生じる場合と ω が増加するとともに単調に減衰する場合があることがわかる。

3. 3 非線形解

次に非線形解を導く。基礎式(33)を無次元表示すると次式となる。

$$\frac{d^2 \tilde{V}'_0}{d\tilde{t}^2} + \delta \frac{d\tilde{V}'_0}{d\tilde{t}} + \delta \tilde{V}'_0 \frac{d\tilde{V}'_0}{d\tilde{t}} + \alpha \tilde{V}'_0 = \beta \sin(\gamma \tilde{t}) \quad (36)$$

まず解を次式のようにおく。

$$\begin{aligned} \tilde{V}'_0 = C_0(\tilde{t}) + C_1(\tilde{t}) \sin(\gamma \tilde{t} + \phi_1(\tilde{t})) \\ + C_2(\tilde{t}) \sin(2\gamma \tilde{t} + \phi_2(\tilde{t})) \end{aligned} \quad (37)$$

以後、簡単のため無次元量を表す $\sim$ を省略する。

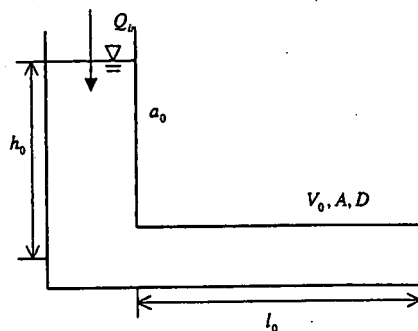


図-4 上流端に流入を伴う管路系

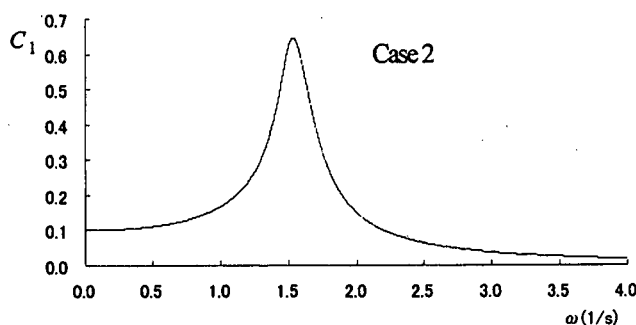
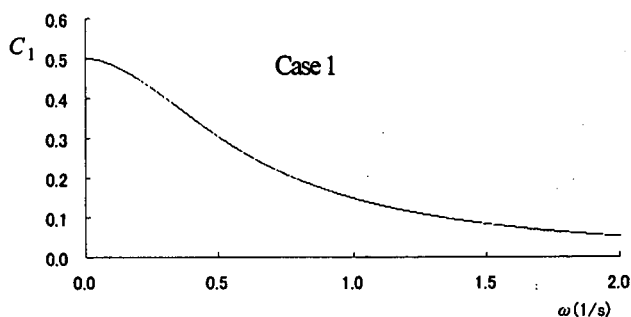


図-5 線形応答関係

表-2 図-5 の計算条件

	Q_0 (m^3/s)	Q_a (m^3/s)	a_0 (m^2)	A (m^2)	V_s (m/s)	D (m)	l_0 (m)
Case1	0.0010	0.0005	0.010	0.0010	1.00	0.036	2.00
Case2				0.0050	0.20	0.080	

	f	Ke	F	g (m/s^2)	α	β	δ
Case1	0.01	1.00	2.57	9.8	0.0008	0.0003	0.046
Case2					0.3900	0.1950	0.090

式(37)を式(36)に代入して $\sin \gamma t, \cos \gamma t, \sin 2\gamma t, \cos 2\gamma t$ について整理する。その際、式(37)中の係数 C_0, C_1, C_2 および位相差 ϕ_1, ϕ_2 の時間変化は $\sin \gamma t, \cos \gamma t, \sin 2\gamma t, \cos 2\gamma t$ に較べて緩慢であるとして、その時間微分をゼロとした。

定数項 $\sin \gamma t, \cos \gamma t, \sin 2\gamma t, \cos 2\gamma t$ の係数を整理して示せば下記ようになる。

[定数項]

$$\alpha C_0 = 0 \quad (38)$$

[$\sin \gamma t$]

$$\begin{aligned} & -\gamma^2 \cos \phi_1 C_1 - \delta \gamma \sin \phi_1 C_1 \\ & -\frac{1}{2} \delta \gamma \cos(\phi_2 - \phi_1) C_1 C_2 + \alpha \cos \phi_1 C_1 = \beta \end{aligned} \quad (39)$$

[$\cos \gamma t$]

$$\begin{aligned} & -\gamma^2 \sin \phi_1 C_1 + \delta \gamma \cos \phi_1 C_1 \\ & -\frac{1}{2} \delta \gamma \sin(\phi_2 - \phi_1) C_1 C_2 + \alpha \sin \phi_1 C_1 = 0 \end{aligned} \quad (40)$$

[$\sin 2\gamma t$]

$$\begin{aligned} & -4\gamma^2 \cos \phi_2 C_2 - 2\delta \gamma \sin \phi_2 C_2 \\ & +\frac{1}{2} \delta \gamma \cos 2\phi_1 C_1^2 + \alpha \cos \phi_2 C_2 = 0 \end{aligned} \quad (41)$$

[$\cos 2\gamma t$]

$$\begin{aligned} & -4\gamma^2 \sin \phi_2 C_2 + 2\delta \gamma \cos \phi_2 C_2 \\ & +\frac{1}{2} \delta \gamma \sin 2\phi_1 C_1^2 + \alpha \sin \phi_2 C_2 = 0 \end{aligned} \quad (42)$$

$p = C_1 \sin \phi_1, q = C_1 \cos \phi_1, r = C_2 \sin \phi_2, s = C_2 \cos \phi_2$ とおいて、式(39)から(42)を書き換えると次式となる。

$$\left(\delta \gamma + \frac{1}{2} \delta \gamma r \right) p + \left(\gamma^2 - \alpha + \frac{1}{2} \delta \gamma s \right) q = -\beta \quad (43)$$

$$\left(\gamma^2 - \alpha - \frac{1}{2} \delta \gamma s \right) p + \left(\frac{1}{2} \delta \gamma r - \delta \gamma \right) q = 0 \quad (44)$$

$$2\delta \gamma r + (4\gamma^2 - \alpha) s = \frac{1}{2} \delta \gamma (q^2 - p^2) \quad (45)$$

$$(4\gamma^2 - \alpha) r - 2\delta \gamma s = \delta \gamma p q \quad (46)$$

式(43)及び(44)を r, s を含んだままで p, q について解けば次のようになる。

$$\begin{aligned} & \left\{ \delta^2 \frac{\gamma^2}{4} (r^2 + s^2) - \delta^2 \gamma^2 - (\gamma^2 - \alpha)^2 \right\} p = \\ & -\beta \left(\frac{1}{2} \delta \gamma r - \delta \gamma \right) \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \delta^2 \frac{\gamma^2}{4} (r^2 + s^2) - \delta^2 \gamma^2 - (\gamma^2 - \alpha)^2 \right\} q = \\ & \beta \left(\gamma^2 - \alpha - \frac{1}{2} \delta \gamma s \right) \end{aligned} \quad (48)$$

式(45), (46)を p, q を含んだままで r, s について解けば次式が導かれる。

$$\begin{aligned} & \left\{ (4\gamma^2 - \alpha)^2 + 4\delta^2 \gamma^2 \right\} r = \\ & \delta^2 \gamma^2 (q^2 - p^2) + \delta \gamma (4\gamma^2 - \alpha) p q \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ (4\gamma^2 - \alpha)^2 + 4\delta^2 \gamma^2 \right\} s = \\ & \frac{1}{2} \delta \gamma (4\gamma^2 - \alpha) (q^2 - p^2) - 2\delta^2 \gamma^2 p q \end{aligned} \quad (50)$$

式(49)及び(50)をそれぞれ2乗して和をとると次式となる。

$$\begin{aligned} & \left\{ 4\delta^2 \gamma^2 + (4\gamma^2 - \alpha)^2 \right\} (r^2 + s^2) = \frac{1}{4} \delta^2 \gamma^2 (q^2 + p^2)^2 \\ & \quad (51) \end{aligned}$$

式(49)-(51)を用いて式(47), (48)から r, s を消去すれば次式となる。

$$\begin{aligned} & \left\{ \delta^2 \gamma^2 + (\gamma^2 - \alpha)^2 \right\} p = -\beta \delta \gamma \\ & + \frac{1}{2} \frac{\beta \delta \gamma}{4\delta^2 \gamma^2 + (4\gamma^2 - \alpha)^2} \left\{ \delta^2 \gamma^2 (q^2 - p^2) + \delta \gamma (4\gamma^2 - \alpha) p q \right\} \\ & + \left(\frac{\delta^2 \gamma^2}{4} \right) \frac{(p^2 + q^2)^2 p}{4\delta^2 \gamma^2 + (4\gamma^2 - \alpha)^2} \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \delta^2 \gamma^2 + (\gamma^2 - \alpha)^2 \right\} q = -\beta (\gamma^2 - \alpha) \\ & + \frac{1}{2} \frac{\beta \delta \gamma}{4\delta^2 \gamma^2 + (4\gamma^2 - \alpha)^2} \left\{ \frac{1}{2} \delta \gamma (4\gamma^2 - \alpha) (q^2 - p^2) - 2\delta^2 \gamma^2 p q \right\} \\ & + \left(\frac{\delta^2 \gamma^2}{4} \right) \frac{(p^2 + q^2)^2 q}{4\delta^2 \gamma^2 + (4\gamma^2 - \alpha)^2} \end{aligned} \quad (53)$$

さらに、式(52)と(53)を用いて次の演算を行うと p, q の解を得ることができる。

[式(52) $\times q$ - 式(53) $\times p$]

$$\begin{aligned} & \left\{ \beta (\gamma^2 - \alpha) + \frac{1}{4} \beta \delta^2 \gamma^2 \frac{(4\gamma^2 - \alpha) C_1^2}{4\delta^2 \gamma^2 + (4\gamma^2 - \alpha)^2} \right\} p \\ & + \left\{ -\beta \delta \gamma + \frac{1}{2} \beta \delta^3 \gamma^3 \frac{C_1^2}{4\delta^2 \gamma^2 + (4\gamma^2 - \alpha)^2} \right\} q = 0 \end{aligned} \quad (54)$$

[式(52) $\times p$ + 式(53) $\times q$]

$$\begin{aligned} & \left\{ -\beta \delta \gamma - \frac{1}{2} \beta \delta^3 \gamma^3 \frac{C_1^2}{4\delta^2 \gamma^2 + (4\gamma^2 - \alpha)^2} \right\} p \\ & + \left\{ -\beta (\gamma^2 - \alpha) + \frac{1}{4} \beta \delta^2 \gamma^2 \frac{(4\gamma^2 - \alpha) C_1^2}{4\delta^2 \gamma^2 + (4\gamma^2 - \alpha)^2} \right\} q \end{aligned}$$

$$= \left\{ \delta^2 \gamma^2 + (\gamma^2 - \alpha)^2 \right\} C_1^2 - \frac{\delta^4 \gamma^4}{16} \frac{C_1^6}{4\delta^4 \gamma^2 + (4\gamma^2 - \alpha)^2} \quad (55)$$

式(54), (55)を p, q について解き, $p^2 + q^2 = C_1^2$ を計算すると, C_1^2 に関する関係式が導かれる。

$$\frac{1}{16} \frac{\delta^4 \gamma^4}{4\delta^2 \gamma^2 + (4\gamma^2 - \alpha)^2} C_1^6 + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 \gamma^2 \{ \gamma^2 - \alpha \} (4\gamma^2 - \alpha) - 2\delta^2 \gamma^2}{4\delta^2 \gamma^2 + (4\gamma^2 - \alpha)^2} C_1^4 + \left\{ \delta^2 \gamma^2 + (\gamma^2 - \alpha)^2 \right\} C_1^2 = \beta^2 \quad (56)$$

上式中 C_1^4, C_1^6 を無視すれば線形化方程式の応答関係式(35)に一致する。

C_1 の表示を得ることができたので, 式(51)を書き直した

$$\frac{C_1^4}{C_2^2} = \frac{4\delta^2 \gamma^2 + (4\gamma^2 - \alpha)^2}{\frac{\delta^2 \gamma^2}{4}} \quad (57)$$

を用いて C_2 も計算できる。

以上の結果を用いて, 式(58)に示した立坑水深 h_0 の表示式における係数 C_{h0}, C_{h1}, C_{h2} を求めることができる。

$$h_0 = C_{h0}(t) + C_{h1}(t) \sin(\omega t + \phi_{h1}(t)) + C_{h2}(t) \sin(2\omega t + \phi_{h2}(t)) \quad (58)$$

3. 4 水理実験結果と解析結果の比較

次にこれまでに理論的に考察してきた管水路非定常流の水理実験について概説し, 実験結果と比較することにより基礎式や解析結果の妥当性について検証する。

(1) 水理実験の概要

実験装置の概要を図-6に示す。PCにより周期的流入流量の周期や振幅を制御し, 超音波変位センサ(キーエンス製)を用いて立坑水深の時間変化を記録した。

(2) 実験結果と解析結果の比較

3.3で導いた非線形解の応答特性を示すとともに, 実験結果と解析結果を比較する。その際, 基礎式をルンゲ・クッタ法で解いた数値解析結果も示す。

実験条件を表-3に示す。Run BはRun Aに比べて流入流量変動の振幅に関する無次元パラメータ β が大きく, 非線形性が強い条件となっている。

実験条件に合わせて計算した線形解, 非線形解, 数値解析結果を用いて得られる立坑水位変動の振幅と流入流量変動の角周波数の関係を図-7に示した。図中の非線形1次は C_1 のみを考慮した場合であり, 非線形2次は C_1 と C_2 ともに考慮した場合を示す。

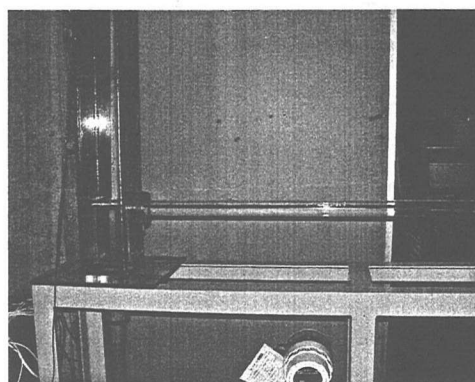


図-6 実験装置の概要

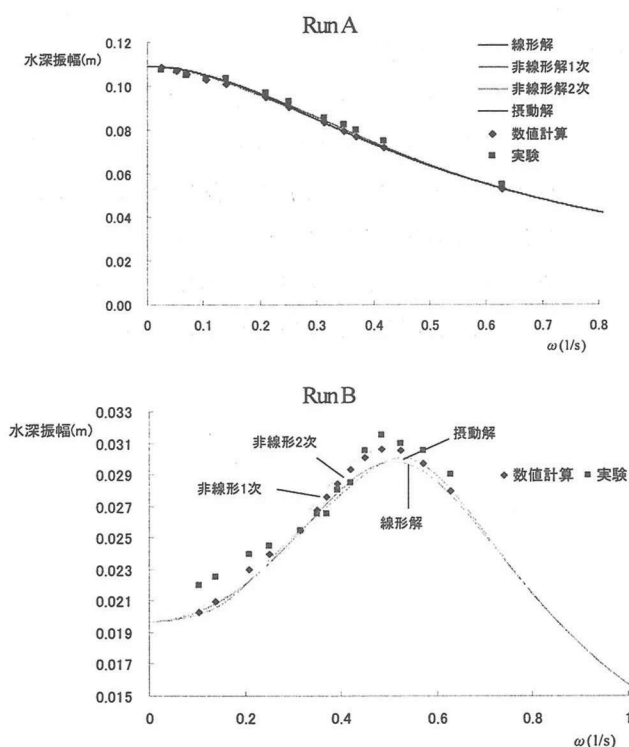


図-7 立坑水位変動の振幅に関する解析結果と実験結果の比較

表-3 実験の条件

	Q_0 (m^3/s)	Q_a (m^3/s)	a_0 (m)	A (m)	V_s (m/s)
Run A	0.00057	0.00030	0.0100	0.0007	0.804
Run B	0.00021	0.00012	0.0100	0.0007	0.303
	D (m)	l_0 (m)	f	Ke	F
Run A	0.030	2.0	0.027	0.35	3.15
Run B	0.030	2.0	0.027	1.00	3.80
	h_e (m)	α	β	δ	
Run A	0.00	0.00048	0.00025	0.047	
Run B	0.078	0.00340	0.00188	0.057	

Run A は非線形性が小さく、共鳴も生じない場合であり、線形解、非線形解、数値解析結果ともに実験結果によく適合している。非線形性が大きく共鳴が生じている Run B の場合、線形解は非線形解、数値解析結果及び実験結果と一致していない。また、1次と2次の非線形解の差は小さいが、どちらも非線形解と数値解析結果によく適合している。

5. おわりに

本研究は、立坑を有する管路系における非定常流の非線形特性について考察したものであり、得られた結果を要約すると以下ようになる。

- (1) 流入部分に立坑を有する管路系における排水過程について、立坑内の圧力分布に鉛直加速度を考慮した管路非定常流の基礎式の非線形解を導いた。得られた非線形解の考察により、立坑内での静水圧分布の仮定が成立する水理条件を検討できることを示した。
- (2) 同一の管路系における、周期的な流入を伴う場合の立坑水位や流出流量の非線形応答特性について考察し

た。立坑内圧力分布に静水圧を仮定した基礎式の非線形を導き、水理実験結果、線形解と比較した。非線形性の小さい場合はどの解析結果も実験結果に適合するが、非線形性が大きい水理条件の場合、非線形解の適合性がよいことを示した。

本解析や実験条件のもとでは、複雑な非線形振動やカオスは発生しなかったが、今後、立坑断面が小さい場合や複数の立坑を伴う管路系の場合の非線形振動特性について考察していきたい。

謝 辞

最後に、本研究を遂行するにあたりデータ整理、図面作成、水理実験などに多大な協力をいただいた京都大学工学部・技官、仙波秀治氏に謝意を表します。

参考文献

- 1) 戸田盛和、渡辺慎介：非線形力学、共立物理学講座、共立出版、1983
- 2) 岩佐義朗：水理学、朝倉書店、1972

(2003 年 4 月 18 日 受付)