

X-FEMによるき裂折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率の解析

Energy release rate at the onset of crack kinking by the X-FEM analysis

矢富盟祥*, 李 炳奇**

Chikayoshi Yatomi, Li Bingqi

*正会員 Ph. D. 金沢大学大学院, 自然科学研究科教授 (〒920-8667 石川県金沢市小立野 2-40-20)

** 博士 (工学) 金沢大学大学院 21 世紀 COE ポストドクター (〒920-8667 石川県金沢市小立野 2-40-20)

Using the X-FEM (eXtended Finite Element Method), we analyze the energy release rate at the onset of crack kinking for an isotropic linear elastic material in an infinite plate with a centered crack under an uniaxial tension load. In the X-FEM, we propose a simple method in which only the four-node quadrilateral isoparametric elements in the fractured element are employed without the enrichment by the near-tip asymptotic solution. In the trial example for a stationary crack, we find that this method gives the rather good approximation for the stress distribution near the crack tip. The result of the energy release rate for any kinking angle using the path independent E-Integral shows a very high accuracy in comparison with a known theoretical result.

Key Words: X-FEM, energy release rate, E-integral, kinking crack

1. はじめに

材料や構造物の破壊, 地盤の地滑り崩壊など, 種々の破壊メカニズムを知ることは工学的安全対策上極めて重要な問題である. 破壊のメカニズムとは, 物体に与えられた過大な荷重により, 物体にひずみの局所化が生じ, さらにき裂, すなわち変位の不連続の発生・進展により, やがて耐荷力を失い崩壊へと至る一連の力学的現象と考えられる. そのような問題に対して, 近年の目覚ましいコンピューターのメモリの増加や高速化に伴い, 従来実験のみで行われていた材料の破壊強度や構造物の耐荷力測定にも, 破壊のメカニズムを考慮した有限要素法による数値解析による手法が取り入れられるようになり, 現在も種々の有限要素法による数値解析手法が盛んに研究されている.

現在でも汎用されている破壊力学分野における有限要素法による数値解析の研究では, き裂のような変位不連続面は, 要素の辺上に沿って要素節点を分離する事によって表現されている. その場合, 一般にはき裂先端近傍では応力やひずみの特異性などが生じ, き裂近傍を非常に小さな要素で構成したり, 特異要素を組み込む等の工夫が必要になる. このような特殊性を考慮した有限要素によるメッシュ生成は, 自動要素生成プログラムを利用したとしても, かなり煩雑な処理となる. さらに, 汎用されている要素の辺上に沿って要素節点を分離する方法でき裂進展解析すると, 当然ながら, き裂の進展挙動は, あらかじめ設定された要素配置に限定されてしまう. したがって, これを回避するためには, 非常に面倒な要素のリメッシュと FEM 解析を交互に行う必要があり計算が非常に面倒になる. 物体が弾塑性体などになると, 同じ点でのリメッシュ前後の物理量の決定が

非常に困難になる.

このような背景の下で, 最近になって, 面倒な要素のリメッシュを避けるため, Simo¹⁾, Oliver²⁾ や Larsson³⁾ によって要素内に不連続な形状関数を用いる強不連続解析手法が提案された. この手法により荷重-荷重点変位関係などの解の要素依存性が大幅に軽減し, 損傷モデルや弾塑性体などの裂進展解析が数多く報告された. しかし, この手法によると, 不連続な形状関数の作成が非常に複雑となり, 変位不連続面によって分割され独立なひずみを持つはずの 2 つの部分の部分が独立でなくなる. 例えば, 一般には, 不連続面に沿う方向のひずみは不連続になるが, この研究で汎用されている階段関数から 1 次の 3 角形状関数を引くことにより作成された不連続な形状関数を用いた場合, 不連続面両側の全ひずみ成分が常に同一になり, クラック進展挙動を捉える上では致命的な欠点を有する⁴⁾. 一方, この強不連続解析手法に対し, 上記の欠点を持たない, より簡便な手法として, 拡張有限要素法 (X-FEM: eXtended Finite Element Method) と呼ばれる解析手法が Belytschko⁵⁾ や Moes⁶⁾ によって提案されている. この手法は, き裂などの変位の不連続面を有する要素に対して, 要素節点に新たな自由度を付加することにより変位の不連続を表現できるようにしたものである. X-FEM は, 未知量の増加により計算時間は多少増加するが, 従来の有限要素法に付加的な自由度を加えるだけでよく, 比較的容易にプログラムを作成することが可能である. X-FEM では, 線形弾性体内のき裂の先端近傍の解をより精度の良いものとするために, 変位の不連続を表す自由度だけでなく, メッシュフリー法でも使用された, き裂先端近傍の応力の $-1/2$ 特異性をもつような変位分布の自由度をも節点に付加することを提案している. しかし, この付加自由度によって, 未知数が大幅に増加するだけでなく, 物体が線形弾性体で

なく、例えば、一般の非線形弾性体や弾塑性体の場合は、き裂先端近傍の応力ないしひずみの特性は、特別な場合を除き未知であるためこの手法は使えない。

著者らの将来の研究目的は、地盤の地滑りやコンクリートや岩盤などのき裂先端近傍が弾塑性体挙動する破壊過程の解明にあるため、あえて、上記の応力の $-1/2$ 特異性をもつような変位分布の自由度を考慮せず、変位の不連続を表す自由度のみを考慮した簡便な X-FEM の一手法を提案し、無限板中央にき裂があり、それを、き裂と垂直な方向に引っ張り荷重を作用させた場合のき裂の任意方向折れ曲がり時のエネルギー解放率を計算し、提案した X-FEM の妥当性を検証する。今まで報告された X-FEM 手法を用いた折れ曲がり進展などの解析はいくつか発表されているが、線形等方弾性体の 2 次元の場合でも、折れ曲がりき裂の完全理論解は、モード III の場合を除いて存在しない。そのため、直進き裂の場合の X-FEM の精度の検証⁷⁾はされているが、折れ曲がりき裂の場合の精度の検証は皆無である。幸い上記問題における折れ曲がり時のエネルギー解放率は、 Wu による半解析解⁸⁾が知られているので、この任意方向折れ曲がり時のエネルギー解放率の解析は、X-FEM の最大の長点である任意方向折れ曲がり解析のひとつの精度の検証にもなる。

2. X-FEM 解析

この章では、不連続変位場を有する物体の支配方程式と、それを離散化して解く X-FEM 手法の概説をする。ここでは議論を簡単にするため、変形は微小であるとし、運動は静的であり、物体力も無いものとする。更に、き裂表面は自由表面であり、き裂面間に結合力や摩擦などの表面力は生じないものとする。

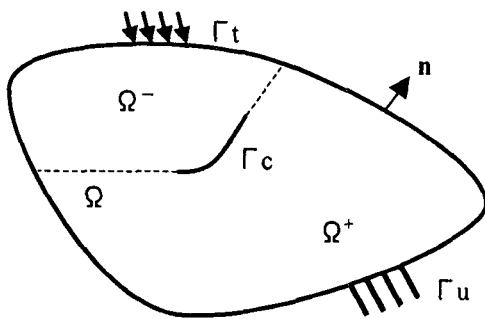


図-1 物体の領域と境界

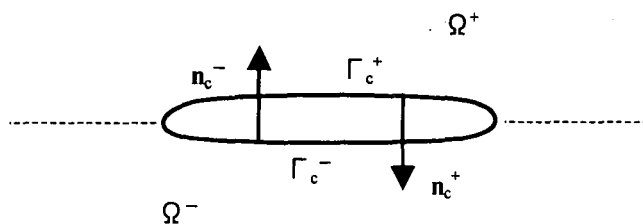


図-2 き裂部分の領域と境界

2.1 支配方程式と境界条件

図-1 に示すような物体 Ω を考える。き裂とその先端における接線を延長した線(図-1 中の破線)により分割される 2 つの領域を、それぞれ Ω^+ 、 Ω^- とする。図-1 には、 Ω^+ を灰色で塗りつぶして示す。 Γ で物体の全境界を表し、変位が既知である Γ_u 、表面力が既知である Γ_t 、き裂の面 Γ_c を合わせたものである。

$$\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_t + \Gamma_c \quad (1)$$

き裂面 Γ_c は、図-2 に示すように、 Ω^+ 側の面 Γ_c^+ と Ω^- 側の面 Γ_c^- からなる。そして、釣り合い方程式と境界条件は以下のとおりである。

$$\nabla \cdot \sigma = 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} \quad \text{on } \Gamma_u \\ \sigma \cdot \mathbf{n} &= \bar{\mathbf{t}} \quad \text{on } \Gamma_t \\ \sigma \cdot \mathbf{n}_c^+ &= \mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma_c^+ \\ \sigma \cdot \mathbf{n}_c^- &= \mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma_c^- \end{aligned} \quad (3)$$

ここで ∇ は、ナブラ演算子、 σ は Cauchy の応力テンソル、 $\mathbf{u}$ は変位、 $\mathbf{n}$ 、 $\mathbf{n}_c^+$ 、 $\mathbf{n}_c^-$ はそれぞれ境界およびき裂面 Γ_c^+ 、 Γ_c^- の外向き法線ベクトルを表している。(・) はテンソルとベクトルの内積を示している。また上付きの (ー) は既知量であることを示す。ひずみは変位より以下のように示される。

$$\varepsilon = (\nabla \otimes \mathbf{u})^s \quad (4)$$

ε はひずみテンソルを表し、 $\otimes$ はテンソル積である。上式の右肩の s は対称成分であることを表す。

応力とひずみを関係付ける構成関係は次のような Hooke の法則に従うものとする。

$$\sigma = \mathbf{C} : \varepsilon \quad (5)$$

ここで $\mathbf{C}$ は弾性構成テンソルで、(:) は 4 階のテンソルと 2 階のテンソルの内積を示す。なお、ここでは、線形等方弾性体を仮定する。

2.2 弱形式化

式(2)を弱形式化するため次のような Γ_c 上で不連続となる試験関数 η を考える。

$$\eta := \left\{ \eta : \Omega \rightarrow R^3 \mid \eta(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \Gamma_u \right\} \quad (6)$$

この試験関数を式(2)の両辺に掛け、物体の領域 Ω 全体で積分し Gauss の発散定理を用いると次式となる。

$$\int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \sigma \cdot \eta d\Gamma = \int_{\Omega} \sigma : (\nabla \otimes \eta) d\Omega \quad (7)$$

更に、境界条件(3)、式(4)、式(5)、および σ と ε の対称性を考慮して変形すると、

$$\int_{\Omega} \varepsilon : C : (\nabla \otimes \eta) d\Omega = \int_{\Gamma} \bar{t} \cdot \eta d\Gamma \quad (8)$$

となる。

2.3 不連続変位の離散化

この節では有限要素法に適用するため、式(8)の離散化を行う。一般に、有限要素法では連続節点変位 a を未知量として計算を行うが、X-FEMではき裂面の不連続性を表すために、通常の連続節点変位 a に、付加的な自由度として不連続変位 b を節点に付加する。以下、これらの付加的な自由度をそれぞれ、き裂を含む要素の節点不連続量 b と呼ぶ。これらの付加項を加える点は図-3の通りである。要素⑤内

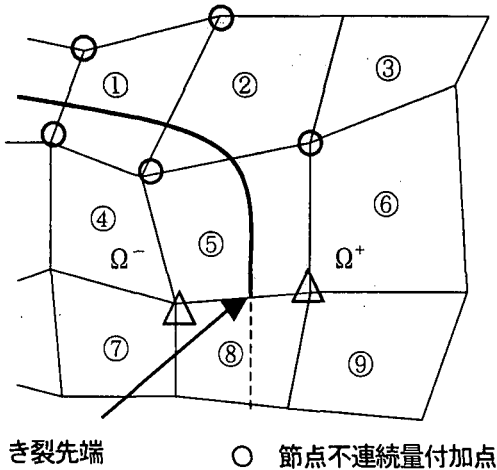


図-3 付加的な自由度を持つ点

のき裂先端では、き裂が閉じていることを保証するため、 Δ で示される点では、節点不連続量 b は付加しない。

節点変位 a 、節点不連続量 b を用いてき裂面 Γ_c で変位 u が不連続となるように離散化された変位 u は次式のように表せる、

$$\{u\} = [N]\{a\} + H(x)[N]\{b\} \quad (9)$$

ただし、第2項はき裂が存在する要素に(図-3中、①、②、⑤要素)のみ付加される。ここで $[N]$ は節点変位 a に対する標準的な形状関数行列、 $\{a\}$ は節点変位ベクトル、 $\{b\}$ は節点不連続量ベクトル、 $H(x)$ はき裂面により分割された Ω^+ 、 Ω^- に対して以下のような値を持つ階段関数である。

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x \in \Omega^+ \\ 0 & x \in \Omega^- \end{cases} \quad (10)$$

ひずみは式(9)を微分して、次式のように表せる。

$$\{\varepsilon\} = [B]\{a\} + H(x)[B]\{b\} \quad (11)$$

ここで、 $[B]$ は、 $[N]$ の各成分を x, y で微分した通常のBマトリクスである。数学的には、式(9)を微分する時、階段関数 $H(x)$ を微分した超関数の項が入るが、不連続面上でのひずみは、数値解析上関係無いので、式(11)では不要である。

試験関数 η に関しても同様に離散化を行うと、

$$\{\eta\} = [N]\{\alpha\} + H(x)[N]\{\gamma\} \quad (12)$$

のように表せる。また、 $\nabla \otimes \eta$ も、次式のようになる。

$$\{\nabla \otimes \eta\} = [B]\{\alpha\} + H(x)[B]\{\gamma\} \quad (13)$$

この試験関数においても、変位と同じく第2項はき裂が存在する要素にのみ付加される。各要素ごとに式(11)、式(12)、式(13)を式(8)に代入すると次式を得る。

$$\begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_a \\ f_b \end{Bmatrix} \quad (14)$$

ここで左辺の行列の項はそれぞれ次式のように表せる。

$$\begin{aligned} [K_{aa}] &= \int_{\Omega_e} [B]^T [C] [B] d\Omega \\ [K_{ab}] &= \int_{\Omega_e} [B]^T [C] [B] d\Omega \\ [K_{ba}] &= K_{ab}^T = \int_{\Omega_e} [B]^T [C] [B] d\Omega \\ [K_{bb}] &= \int_{\Omega_e} [B]^T [C] [B] d\Omega \end{aligned} \quad (15)$$

ここで Ω_e 、 Ω_e^+ はそれぞれ各要素の領域および正領域を表す。

式(14)の右辺は、次式となる。

$$\begin{aligned} \{f_a\} &= \int_{\Gamma_e} [N]^T \{\bar{t}\} d\Gamma \\ \{f_b\} &= \int_{\Gamma_e} [N]^T \{\bar{t}\} H(x) d\Gamma \end{aligned} \quad (16)$$

ここで、 (Γ_e) は各要素の表面力境界 Γ_t を示している。

2.4 要素剛性マトリクス作成のための数値積分法

本報告では、基本的には4節点四角形要素を用いるが、物体全体をメッシュ分割する場合、節点の連

続性を保持するため必要な3三角形部分領域、また後述するように、不連続面が存在することにより新たに生成される3三角形部分領域も、すべて4節点四角形アイソパラメトリック要素で Gauss の4点積分を用いて考える(図-4)。これにより、プログラムのアルゴリズムが非常に簡単になる。

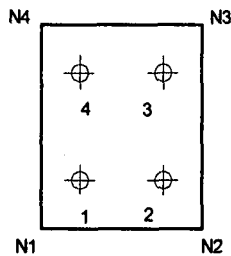


図-4 4節点四角形要素および Gauss 点

式(15)のような積分において、通常の四角形の場合の要素剛性マトリックスは、次式で表せる。

$$[K]_{ij} = \sum_{k=1}^4 [B]_i^T [C] [B]_j \det[J_k] W_k \quad (17)$$

ここで、Bマトリックスは、正規座標系 (ξ, η) における Gauss 点上の値、 $\det[J_k]$ は、ヤコビ行列式の Gauss 点上の値、 W_k は、重み係数である。

本報告では、プログラムのアルゴリズムを簡単にするため、き裂面は、要素内に存在するが、き裂先端は、常に要素辺上にあると仮定する。その場合、要素は、き裂面の位置により、図-5上図のような2種類の四角形領域に分割される場合と図-6のような三角形および五角形領域に分割される2種類のタイプが考えられる。

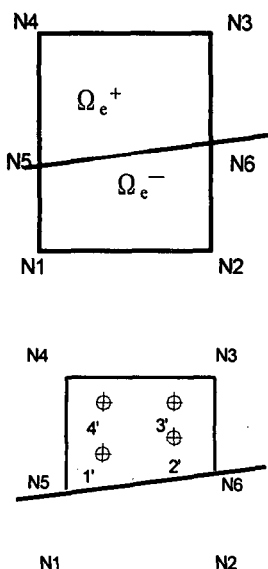


図-5 き裂により分割された2種類の4節点四角形部分領域と Gauss 積分点

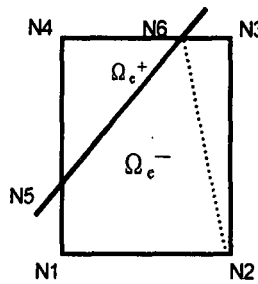


図-6 き裂により分割された四角形および五角形領域

既発表の X-FEM 手法の論文では、この分割された領域の積分を実行する場合、領域を更に小さな多くの三角形要素で分割したり、多くの三角形要素と四角形要素に分割する事によって積分されている。しかし、き裂が進展する場合、き裂で分割された新たな要素が出来るたびに、積分領域を小さな領域に再度分割しなおす操作が必要になり、このような操作は、き裂が存在する要素だけに限られるとはいえず、X-FEMでは、面倒なリメッシュを避けることが出来るという、せつかくの最大の長点が失われてしまう。そこで、本報告では、図-5上図のような2種類の四角形領域に分割される場合は、上下2つの四角形のみ、また図-6のような三角形および五角形領域に分割される場合は、五角形の部分を図-6のように、三角形と四角形の二つに分けて、合計3個の部分領域のみを考える。また、モデル上で現れた三角形領域は、その三角形の一つの頂点を二つに分離して、4節点四角形アイソパラメトリック要素に変換する方法⁷⁾を使用し、一貫して、4節点四角形アイソパラメトリック要素の Gauss の4点積分アルゴリズムだけを使用する簡便な手法を採用する。

き裂によって分割される要素が図-5のように、2種類の四角形に分割される場合、式(15)中の領域 Ω 全体の積分、およびき裂を含まない他の四角形要素の積分も、式(17)のように、通常の正規座標系 (ξ, η) における4個の Gauss 点上の値を使えば良い。一方、式(15)中の Ω^+ 上の積分は、き裂で分割される前の四角形の正規座標系 (ξ, η) に関する積分である事に注意して、次のような手順で求める。

1) 図-5上のように、き裂で分割された Ω^+ の四辺形部分領域を新たな $N3, N4, N5, N6$ による4節点四角形アイソパラメトリック要素とみなした Gauss 積分点に対応する全体座標 (x, y) を求める。(図-5下)

2) この全体座標 (x, y) に対応する分割前の要素における正規座標系における Gauss 点座標 (ξ, η) を求める。

3) その点で式(17)を使って数値積分を行う。

上記手順を、図-7に示す。

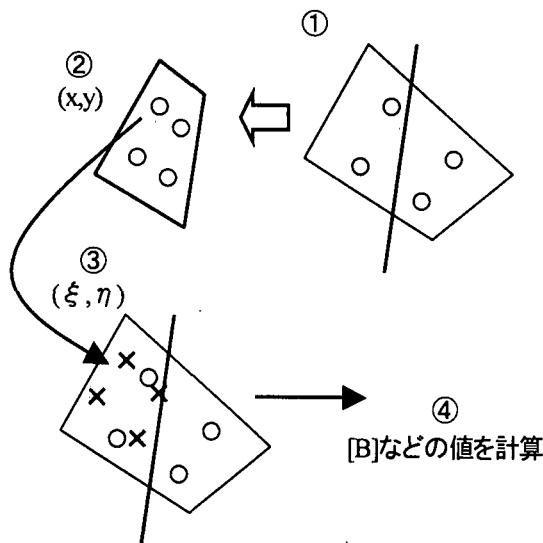


図-7 積分領域の分割の場合、 Ω^+ 上の積分

図-6の三角形 Ω^+ 上の積分は、その3角形の一つの頂点N4を二つに分離して、4節点四角形アイソパラメトリック要素に変換する方法⁹⁾を使用し、前記と同様な方法で分割前の要素における Gauss 点の正規座標系における座標(ξ, η)を求め、その点で式(17)を使って数値積分を行う

また、図-6で、五角形の部分が Ω^+ となった場合は、先に述べたように、三角形と四角形の二つに分けて考え、前述と同様な手法で数値積分すれば良い。

2. 5 検証解析

ここでは、本報告の手法に従って作成された X-FEM プログラムを用いて、精度の検証解析を行う。

図-8に示す様に、長さ 4.0cm のき裂を中央に有する、縦 42cm、横 40.0cm の長方形で無限版の近似モデルと考え、き裂と垂直な方向に一樣引張り荷重 $P=5.0\text{MPa}$ が作用している線形等方線形モデルを解析する。材料定数は、ヤング率 $E=72.0\text{MPa}$ 、ポアソン比 $\nu=0.2$ とした、X-FEM 解析モデルのメッシュ分割は、図-9に示す。この図では、き裂の上下に三角形要素があるが、前記したように、3角形の一つの頂点を二つに分離して、4節点四角形アイソパラメトリック要素に変換する方法を採用しているため、近似モデルの要素は、全て 4 節点アイソパラメトリック要素であり、合計 1960 節点 2024 要素に分割している。なお、物体の剛体変位を取り除くため、長方形モデル中央左端の要素の左上の節点変位は、X、Y 両方向を固定し、左下の節点変位は、Y 方向の変位のみを固定した。(図-8、図-9 参照) なお、き裂は、中央線の一つ下の要素内の中央に沿って挿入している。き裂先端の変位をゼロとするため、き裂先端は、き裂を含む要素辺中央上に設置し、その節点を含む要素辺の上下の節点には、節点不連続量 b は付加しない。

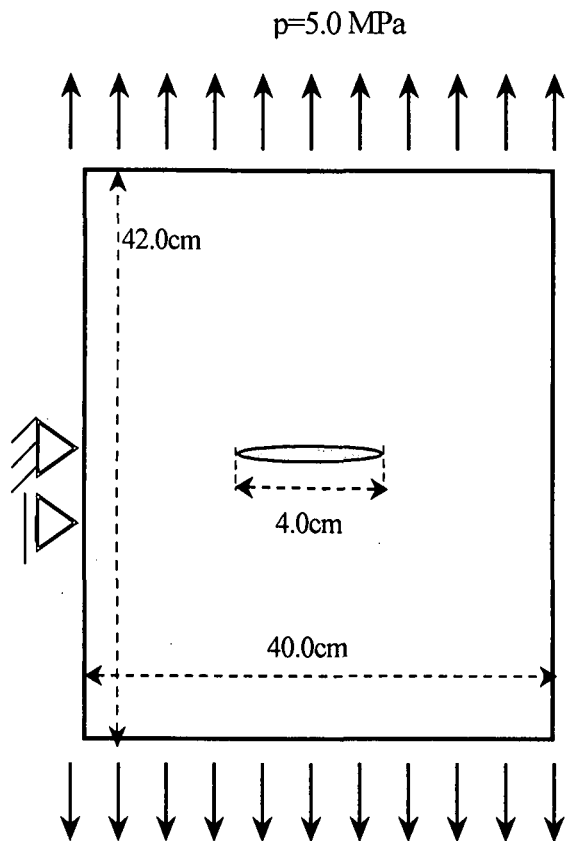


図-8 中央にき裂を有する2次元長方形モデル

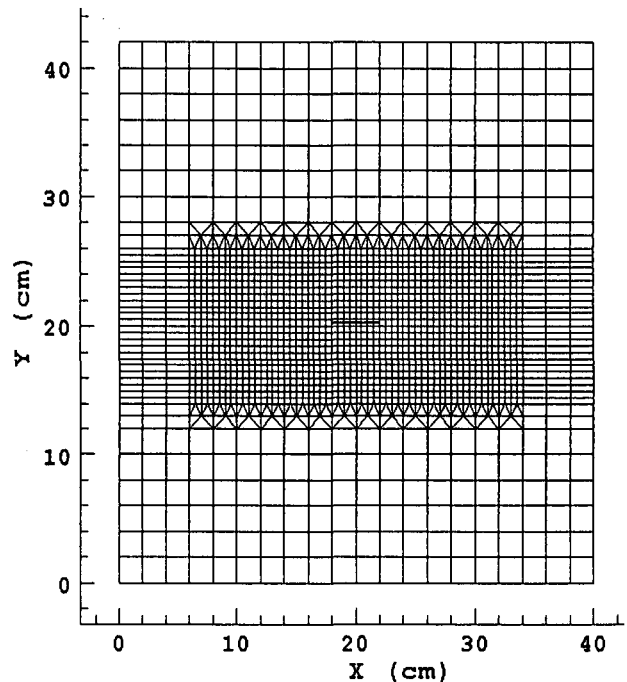
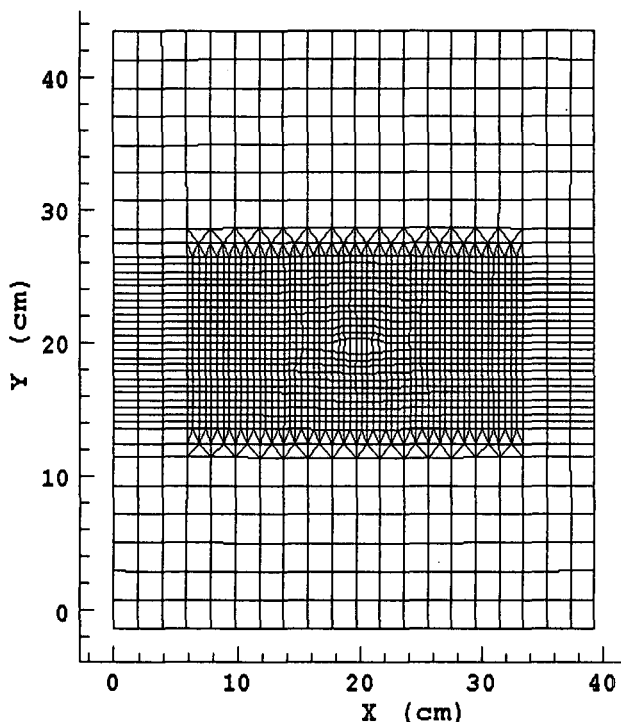


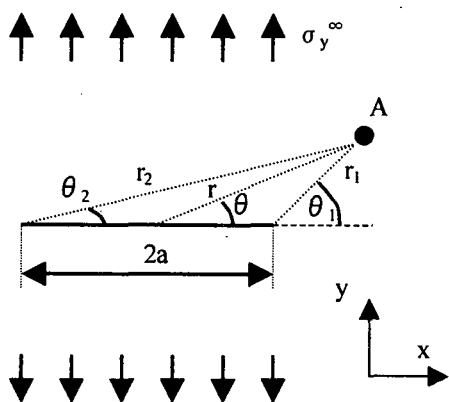
図-9 解析モデルのメッシュ分割

まず、最終変位状態での変形図を図-10 に示す。微小な変形を変位で図示している。変形が、不連続面近傍に局所化している様子が確認できる。



図—10 変形図

次に、応力 σ_y の数値解を検討する。図—11に示す中央に $2a$ の長さのき裂を持つ無限板を考える。角度 θ 、 θ_1 、 θ_2 および長さ r 、 r_1 、 r_2 はそれぞれき裂中央、右端、左端での値、 σ_y^∞ は無窮遠点での一様引張り応力である。このような場合、点Aの σ_y の理論解は Westergaard の応力関数を使用することにより次式で与えられる⁸⁾。

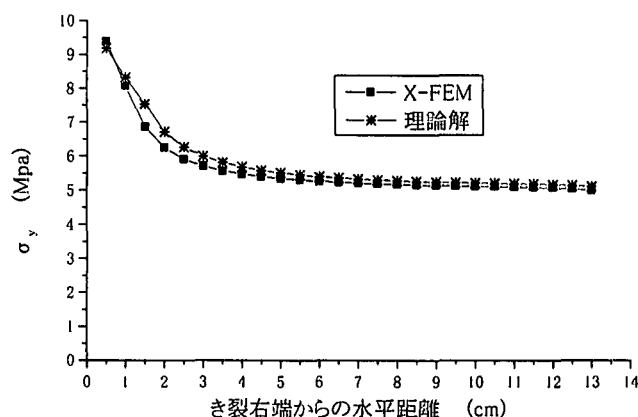


図—11 一様引張りを受ける中央き裂を有する無限板

$$\sigma_y = \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \sigma_y^\infty \left[\cos \left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) + \frac{a^2}{r_1 r_2} \sin \theta \sin \left\{ \frac{3}{2} (\theta_1 + \theta_2) \right\} \right] \quad (18)$$

図—12に、き裂右端から右側の応力 σ_y の分布図を本 X-FEM 解析による解と上記理論解とともに示

す。なお応力 σ_y の値は、ガウス積分点の値であるため、き裂延長線上より少し上の位置での値である。本解析解はき裂先端付近で応力が増大する理論解の特徴を表している。ただし、本X-FEM手法では、き裂先端を囲む要素節点に線形等方弾性体の特異応力を表す関数を付加していないため、それを付加した手法に比べ、き裂先端近傍の解の精度は劣るであろうが、通常の有限要素法による図・9のようにメッシュ分割された場合の解と同程度の精度が得られていると考えられる。図・12の結果からも、図・9のようにメッシュ分割された場合における σ_y は比較的良好と言える。



図・12 き裂先端近傍の σ_y の分布図

3. X-FEM 解析を用いたE積分によるき裂折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率の解析

2.5節はき裂が直線の場合の、本X-FEM手法の精度の検証したが、本節では、き裂が折れ曲がる場合の精度の検証を行う目的もあり、き裂折れ曲がり瞬間時エネルギー解放率を求め、理論解と比較する事により、その精度の検証を行う。

3.1 E積分によるエネルギー - 解放率とその近似公式

本報告では線形等方弾性体を扱うので、エネルギー解放率を求める経路独立なE積分は、進展き裂先端を含む物体内の任意の領域の全境界 Γ 上の経路積分として次式のように与えられる¹¹⁾

$$E = \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{2} s \cdot \frac{\partial u}{\partial \ell} - \frac{1}{2} \frac{\partial s}{\partial \ell} \cdot u \right) ds \quad (19)$$

ここで、 s 、 u は、それぞれ、 Γ 上の表面力および変位である。また、 ℓ は、き裂の長さである。

数値解析においては、き裂長さに関する微分項をき裂進展前と進展後の2点差分近似をする。その時、式(19)は次式ようになる。

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ s_i(\ell) \cdot \frac{u_i(\ell + \Delta \ell) - u_i(\ell)}{\Delta \ell} - \frac{s_i(\ell + \Delta \ell) - s_i(\ell)}{\Delta \ell} \cdot u_i(\ell) \right\} \Delta s \quad (20)$$

ここに、 n は経路における要素辺の数、 Δs は各要素辺の長さ、 $\Delta \ell$ はき裂進展長さである。また (ℓ)

および $(\ell+\Delta\ell)$ は、それぞれき裂の進展前と進展後の物理量を表している。このE積分によれば、破壊力学で周知のJ積分では求める事が不可能であった任意方向折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率が経路独立な積分で求めることが出来る。

3.2 X-FEM 解析を用いたエルギ解放率の解析
 本節では、2.5節で解析したものと同様なモデルを使用し、き裂と垂直な方向に一樣引張り荷重 $p=5.0\text{MPa}$ が作用している場合の、き裂右先端が折れ曲がり進展する瞬間時のエネルギー解放率を、本X-FEMにより得た数値解析解を利用し、式(20)によって求める。なお、エネルギー解放率を算出する積分経路は、き裂右先端を囲む経路1、2、及び両側先端を囲む経路3、4の合計4種類設定した（図-14参照）。

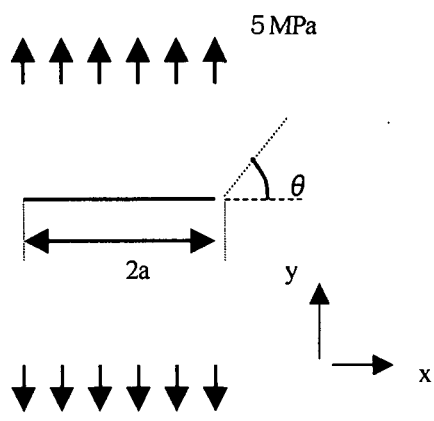


図-13 一樣引張り荷重下のき裂折れ曲がりモデル

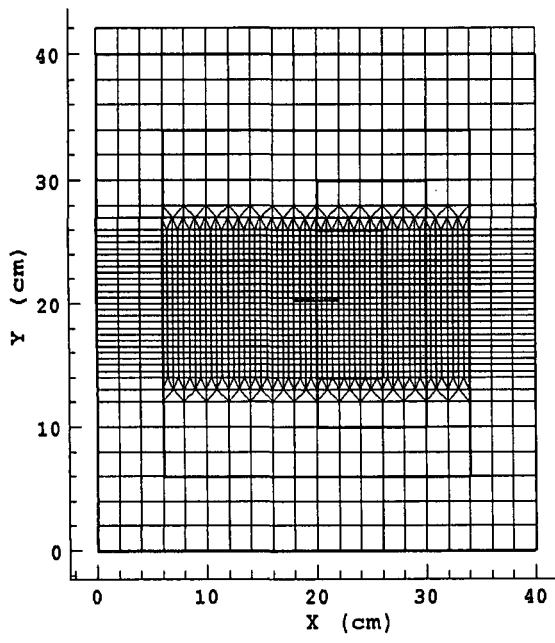


図-14 積分経路の設定

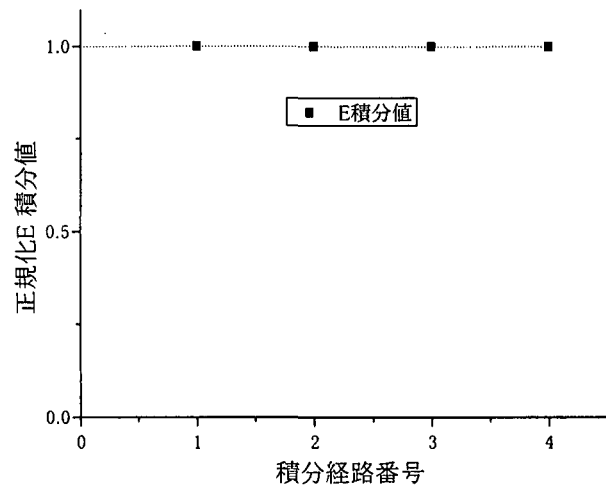


図-15 経路独立性の検証

なお、主き裂面からの折れ曲がり角度 θ は、 0° 、 18° 、 36° 、 54° 、 72° 、 89° の計6方向に進展する場合を解析した。 $\theta=0^\circ$ 即ちき裂が直進する場合のエネルギー解放率の経路の違いによるエネルギー解放率を図-15に示す。ここで、縦軸は数値解析結果を理論解で除して正規化している。横軸は4個の積分経路の番号である。解析結果により、き裂先端のみを囲む経路1と2およびき裂両先端を囲む3、4とすべての経路において一定の値となっており経路独立性が非常に良い精度で成立していることがわかる（経路誤差0.003%以下）。また、無限板の理論解との誤差も0.3%以下とエネルギー解放率の精度も非常に良いことがわかる。

図-16は、き裂面に垂直な方向に一樣引張応力を载荷した場合のき裂折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率を求めた結果であり、横軸はき裂折れ曲がり角度 θ 、縦軸はき裂がまっすぐ進む場合の理論解により求めたエネルギー解放率で正規化してある。折れ曲がり角度が負方向の値は、結果が正方向と同一となる対称性を確認したため、図では省略してある。図中■で示してあるのが本解析結果であり、破線で示したものがWuの半解析解⁸⁾である。なお、文献8)には、 $\theta\leq 0.4\pi$ までしか得られていない。このき裂の折れ曲がりの問題はモードⅢ以外厳密な理論解が存在しないが、このWuの結果はその他の多くの研究者によって確かめられており、最も信頼できる解である。そのWuの結果と本解析の結果は非常に良く一致していることが分かる。

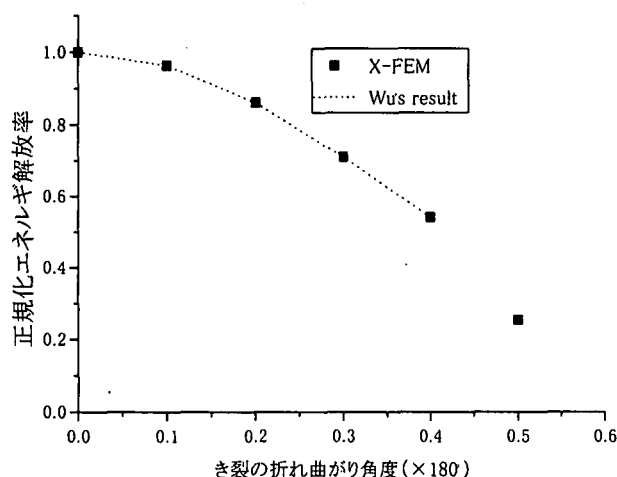


図-16. 本 X-FEM による解と Wu の解の比較

4. 結論

本研究では、4 節点四角形アイソパラメトリック要素を用いた簡便な X-FEM 手法を提案し、その解析手法により、中央にき裂がある無限板を近似したモデルに、き裂に垂直な方向に一様引っ張り荷重が載荷された場合において、E 積分により、き裂のいくつかの方向への折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率を求め、その有効性を検討した。その結果、進展き裂先端を囲み、先端近傍から離れた任意の積分経路で、折れ曲がり方向にかかわらず非常に精度良くエネルギー解放率を求めることができ、き裂の折れ曲がり問題に対しても本 X-FEM 手法は、非常に有効であることが確認できた。

参考文献

- 1) Simo, J.C., Oliver, J. and Armero, F.: An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent solids, Computational Mech., 12, pp.277-296, 1993.
- 2) Oliver, J.: Modeling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part 2: Numerical simulation, Int. J. Num. Meths. Engng. 39, pp.3601-3623, 1996.
- 3) Larsson, R. and K. Runesson: Element-embedded localization band based on regularized displacement discontinuity, J. of Eng. Mech. pp.402-411, 1996.
- 4) Jirásek, M. and T. Belytschko: Computational resolution of strong discontinuities, Proc. MCCM-V, Vienna, Austria, pp.7-12, 2002.
- 5) Belytschko, T. and T. Black: Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing, Int. J. Num. Meths. Engng, 45, pp.601-620, 1999.
- 6) Moes, N. and J. Dolbow, and T. Belytschko: A

finite element method for crack growth without remeshing, Int. J. Num. Meths. Engng, 46, pp.131-150, 1999.

7) 長嶋利夫: X-FEM による弾性解析の精度についての検討, 日本機械学会論文集 (A 編) 67, pp. 1569-1575, 2001.

8) Wu, C.H.: Explicit asymptotic solution for the Maximum Energy Release Rate problem, Int. J. Solids Structures, Vol.15, pp.561-566, 1983.

9) Bathe, K.J.: Finite Element Procedure, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1996.

10) 岡村弘之: 線形破壊力学入門, 培風館, 1976.

11) Yatom, C., K. Hashimoto and H. Ishida: Finite element analysis of the energy release rate for a kinked crack using the E-integral, Lecture Note in Num. Appl. Anal., 13, pp.61-74, Kyo-kuniya, 1994.

(2003 年 4 月 18 日 受付)