

振動計測に基づく非比例減衰系の非反復損傷同定法

A non-iterative approach in vibration-based damage detection for a damped mechanical system

阿部雅人*, 藤野陽三**, 長山智則***, Hong Vu-Manh****
Masato ABE, Yozo FUJINO, Tomonori NAGAYAMA, Hong Vu-Manh

* Ph.D. 東京大学大学院工学系研究科社会基盤工学専攻 助教授 (〒113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1)

** Ph.D. 東京大学大学院工学系研究科社会基盤工学専攻 教授 (〒113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1)

*** 工修 東京大学大学院工学系研究科社会基盤工学専攻 (〒113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1)

**** 工修 東京大学大学院工学系研究科社会基盤工学専攻 (〒113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1)

A new approach to detect locations and magnitude of damage incurred in a damped mechanical system is presented. Damage is defined as changes in system parameters such as mass, damping and stiffness. The method is derived from the equation of motion of the system before and after damage stage and importantly the method does not require any iteration procedure. It also accounts for the incomplete modal measurement and does not require estimation of stiffness matrix before damage stage. Numerical results indicate that the technique can pinpoint exact locations and magnitude of damage even though the measured modes are incomplete.

Key Words: damage detection, non-iterative approach, incomplete modal measurement

1. はじめに

想定された供用年限に達する構造物や長大構造物を多数抱える中、限られた資源で構造物を維持管理するための効率的で信頼性の高い技術が必要とされている。維持管理のうち損傷検出後の修繕あるいは更新については個別のケースでそれぞれ対応が検討され実施されているが、損傷検出はいまだ経験や目視に頼るところが大きく、手法は確立されていない。難しさとしてたとえば、構造物が大きかつ多数あるため詳細検査に多大なコストがかかること、検査に際して供用停止が困難であるという制約、しばしば外部から損傷を確認できないことなどが挙げられる。

その有効な解決手法のひとつとして振動計測を利用した損傷同定が期待されている。基本的な考え方は次のとおりである。損傷は構造物モデルの質量、減衰、剛性といった構造特性の変化に現れる。構造特性自体の計測は容易でないが、その変化は振動数、減衰比、モード形といったモード特性に反映されるので、従来から計測のなされているモード特性から、構造特性を逆解析できれば損傷が検出されるはずである。この手法にはモード特性の把握と構造逆解析の2つのステップが含まれる。

モード特性の把握には近年著しい進展が見られる。レーザードップラー速度計や計算機など計測、情報処理技術の進歩¹⁾や ERA²⁾などモード解析法の発展により、時間、空間における密な計測信号を効率的に、詳細に解析できるようになった。これにより減衰比、位相を含めた複素モード

形など定量的な把握が困難であった情報も詳細に得られる。効率的な解析に加え、風力、波力、交通荷重など未知外力による常時微動を解析することで供用中も検査できることや構造物内部の損傷もモード特性の変化に現れることは損傷検出に際しモード特性を利用することの長所である。ただし、構造逆解析に必要となる精度や各モードの可観測性については更なる検討を要する³⁾。

一方で構造特性の逆解析はいまだ多くの問題点を抱えている。Smith⁴⁾や Kaouk⁵⁾は損傷前の減衰行列、剛性行列が既知の場合に最小ランク摂動法を用いて損傷に相当する次数を決定し、更に減衰、剛性の変化を同定しているが、損傷前の構造特性を正確に推定することは極めて困難である。Cha⁶⁾は振動計測から得られるモード特性を利用して有限要素法の解析モデルを構造逆解析する試みのなかで、事前に構造特性を正確に把握する必要のないことを示した。具体的には非減衰系に既知の質量を付加し、その前後のモード特性と付加質量の情報から解析モデルの構造特性を精度よく逆解析できることを数値モデルにより確認したが、減衰を扱えないという問題がある。損傷などによるモード特性の変化はしばしばモード形の位相に現れるが⁷⁾、非減衰系を仮定するとこの情報を扱うことができない。伝達関数を利用した逆解析は Tsuei⁸⁾により試みられているが、常時微動のように外力が未知である場合には伝達関数を得ることが困難である。

構造逆解析の数値演算についてみると、非比例減衰系ではモード展開によっても連成システムとなること、また線

り返し計算が必要となることから計算負荷が大きな問題である。運動方程式の状態変数表示を利用して非連成化することが可能で、Yee⁹⁾は質量、減衰、剛性各行列の変化を同定するための収束の早い繰り返し計算法を報告している。しかし、著者らがこの繰り返し計算を7自由度系モデルに適用したところ計算負荷は依然として大きいものであった¹⁰⁾。多変数問題の繰り返し計算には遺伝アルゴリズムをはじめ目覚ましい発展がみられるものの逆解析に十分なものではない。計算負荷に加えて、探索すべき未知数を限定する必要性や適当な初期値を要することも逆解析を扱いづらいものとしている。

本研究ではレーザードップラー速度計などを利用して得られる損傷前後のモード特性から繰り返し計算なしに構造逆解析する損傷同定法を構築する。まず、離散多自由度モデルで損傷とモード特性変化の関係式を表す。ここで非比例減衰系を扱うために状態変数表示を利用する。次に繰り返し計算によらず逆解析するために構造特性変化を表す行列をベクトルに変換する。そして、モード特性、モード刺激係数、質量を利用すると損傷の関係式中の未知数が構造特性変化を表すベクトルのみとなり、必要に応じて物理的制約を用いて未知数の数を減らすと最小二乗法により解が定まることを示す。最後に数値モデルでその妥当性を確認する。

2. 損傷のモデリング

N 自由度非比例減衰系は次式で与えられる。

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f(t)\} \quad (1)$$

ここで、 $[\cdot]$ は行列、 $\{\cdot\}$ はベクトルをあらわす。 $[M]$ は質量行列、 $[C]$ は減衰行列、 $[K]$ は剛性行列 ($N \times N$ 次元)、 $\{x\}$ は変位ベクトル、 $\{f\}$ は外力ベクトル (N 次元) である。状態変数を用いて、式(1)を $2N$ 個の1階微分方程式で表すと

$$[A]\{\dot{y}\} + [B]\{y\} = \{f'(t)\} \quad (2)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} [C] & [M] \\ [M] & [0] \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} [K] & [0] \\ [0] & -[M] \end{bmatrix}$$

$$\{y\} = \begin{Bmatrix} \{x(t)\} \\ \{\dot{x}(t)\} \end{Bmatrix}, \{f'(t)\} = \begin{Bmatrix} \{f(t)\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (3a,b,c,d)$$

となり、その斉次解は次の一般化固有値問題より得られる。

$$[B][\Phi_u] = [-A][\Phi_u][\Lambda^d] \quad (4)$$

ここで $[\Phi_u]$ は固有ベクトルを列成分に、 $[\Lambda^d]$ は固有値を対角成分にもつ行列である。

損傷は質量、剛性、減衰行列の変化、つまり $[\delta M]$ 、 $[\delta K]$ 、 $[\delta C]$ としてモデル化される。接続性に関する物理的制約により一般に $[\delta M]$ は対角行列、 $[\delta K]$ と $[\delta C]$ は疎行列でしばしば三重対角行列である。これらの行列から式(3)と同

様に $2N \times 2N$ 次元の行列 $[\delta A]$ 、 $[\delta B]$ を

$$[\delta A] = \begin{bmatrix} [\delta C] & [\delta M] \\ [\delta M] & [0] \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$[\delta B] = \begin{bmatrix} [\delta K] & [0] \\ [0] & -[\delta M] \end{bmatrix} \quad (6)$$

と定義する。損傷後の系の運動方程式を状態変数表示すると、式(2)中の行列はそれぞれ $[A] + [\delta A]$ 、 $[B] + [\delta B]$ と表される。 $[\delta A]$ 、 $[\delta B]$ はそのサブマトリックスから明らかに疎行列である。損傷後の一般化固有値問題は

$$[B + \delta B][\Phi_d] = [- (A + \delta A)][\Phi_d][\Lambda^d] \quad (7)$$

となる。 $[\Phi_d]$ は固有ベクトルを列成分に、 $[\Lambda^d]$ は固有値を対角成分にもつ行列である。

次に、計測したモード特性 $[\Phi_u]$ 、 $[\Lambda^u]$ 、 $[\Phi_d]$ 、 $[\Lambda^d]$ と損傷を関係づけるために得られた一般化固有値問題を变形する。式(4)を転置し $[\Phi_u]$ を右からかけると

$$[\Phi_u]^T [B][\Phi_d] = [\Lambda^u][\Phi_u]^T [-A][\Phi_d] \quad (8)$$

となり、式(7)に $[\Phi_u]^T$ を左からかけると

$$[\Phi_u]^T [B + \delta B][\Phi_d] = [\Phi_u]^T [- (A + \delta A)][\Phi_d][\Lambda^d] \quad (9)$$

になる。式(9)から式(8)を引くと

$$[\Phi_u]^T [\delta A][\Phi_d][\Lambda^d] + [\Phi_u]^T [\delta B][\Phi_d] = [\Lambda^u][\Phi_u]^T [A][\Phi_d] - [\Phi_u]^T [A][\Phi_d][\Lambda^d] \quad (10)$$

が得られる。

式(10)は損傷前後のモード特性と構造特性、損傷の関係式である。 $[\delta A]$ 、 $[\delta B]$ を決定することがすなわち損傷同定であるが一般に容易でない。まず未知行列 $[\delta A]$ 、 $[\delta B]$ について直接解くことができない。繰り返し計算により解を求めることが試みられているが計算時間が長くなることや適当な初期値が必要であることなど解決すべき問題点が多い。更に、右辺の $[A]$ はサブマトリックスに損傷前の質量、減衰行列を含み既知とは限らない。従来から減衰を無視したり比例減衰を仮定したりして $[A]$ を推定することが試みられているが必ずしも妥当な推定でなく損傷同定の信頼性を損なうものである。そこで、損傷-モード特性関係式の直接解法を提案し、ついで損傷前構造特性が未知の場合の扱いについて検討を加える。

3. 損傷-モード特性関係式の変形

損傷-モード特性関係式の直接解法の基本的な考え方は $[\delta A]$ 、 $[\delta B]$ をベクトルに変形することである。まず行列変形について説明し、次に式(10)に適用する。更に $[\delta A]$ 、 $[\delta B]$ が疎行列であることを利用して求めるべき未知数を減らす。

3.1 行列方程式の変形

次の行列方程式を考える。

$$[Z]^T [\delta Y][W] = [R] \quad (11)$$

ここで行列 $[Z]$, $[W]$ は、 $2N \times 2N_e$ 次元、 $[R]$ は $2N_e \times 2N_e$ 次元の既知行列であり、 $[\delta Y]$ は $2N \times 2N$ 次元の未知行列である。 N は系の自由度、 N_e は可観測モード数を想定している。

未知行列をより扱いやすいベクトルに変形する。行列 $[Z]$, $[W]$, $[\delta Y]$, $[R]$ の第 (i,j) 成分をそれぞれ $z_{i,j}$, $w_{i,j}$, $\delta y_{i,j}$, $r_{i,j}$ と、 $[Z]$, $[W]$ の第 j 列ベクトルを z_j , w_j ($j=1, \dots, N_e$)と表す。行列 $[\delta Y]$, $[R]$ を次のように列ベクトルに変形すると

$$\delta y = [\delta y_{1,1} \cdots \delta y_{1,2N} \mid \delta y_{2,1} \cdots \delta y_{2,2N} \mid \cdots \mid \delta y_{2N,1} \cdots \delta y_{2N,2N}]^T \quad (12)$$

$$r = [r_{1,1} \cdots r_{1,2N_e} \mid r_{2,1} \cdots r_{2,2N_e} \mid \cdots \mid r_{2N_e,1} \cdots r_{2N_e,2N_e}]^T \quad (13)$$

式(11)の行列方程式は

$$[G]\delta y = r \quad (14)$$

と表される。 $[G]$ は $4N_e^2 \times 4N^2$ 次元の行列、 δy と r はそれぞれ次元が $4N^2$, $4N_e^2$ の列ベクトルである。成分ごとに計算すると、 $[G]$ は $2N_e \times 4N^2$ 次元の行列 $[G_i]$ を用いて次のように表されることが確認できる。

$$[G] = \begin{bmatrix} [G_1] \\ \vdots \\ [G_i] \\ \vdots \\ [G_{2N_e}] \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$[G_i] = \begin{bmatrix} z_{1,i} w_1^T & z_{2,i} w_1^T & z_{3,i} w_1^T & \cdots & z_{2N,i} w_1^T \\ z_{1,i} w_2^T & z_{2,i} w_2^T & z_{3,i} w_2^T & \cdots & z_{2N,i} w_2^T \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{1,i} w_{2N_e}^T & z_{2,i} w_{2N_e}^T & z_{3,i} w_{2N_e}^T & \cdots & z_{2N,i} w_{2N_e}^T \end{bmatrix} \quad (16)$$

$N_e = N$ の場合にはガウスの消去法により式(14)を解くことができる。 $N_e > N$ の場合には最小二乗法を利用する。 $N_e < N$ である場合は未知数が方程式の数よりも多いために解が定まらない。そこで解のノルムを最小とする条件を加え、最小二乗最小ノルム解を利用することになるが、一般にこの場合誤差が大きくなるので、未知数を減らす、あるいは観測量を増やすといった工夫がなされる。なお、 $[Z]$, $[W]$ がモード形行列のようにフルランクの場合行列 $[G]$ もフルランクになる⁹⁾。

3.2 損傷-モード特性関係式への適用

Cha⁶⁾は非減衰系のモード特性と構造特性の関係式に前節の変形を適用し構造逆解析を試みた。ここでは状態変数

表示により得た非比例減衰系の関係式に前節の変形を適用し減衰を考慮した構造逆解析を試みる。式(10)左辺の各項は次のように表される。

$$[\Phi_u]^T [\delta A][\Phi_d] [\Lambda^d] \rightarrow [G]\delta a \quad (17)$$

$$[\Phi_u]^T [\delta B][\Phi_d] \rightarrow [H]\delta b \quad (18)$$

δa , δb は $[\delta A]$, $[\delta B]$ を列ベクトルに直したものである。 $[\delta A]$, $[\delta B]$ は先に述べたように疎行列であるので変形後の δa , δb も多くのゼロ成分を含んでいる。そこでまずこれらのゼロ成分と、それに対応する $[G]$, $[H]$ の成分を消去して行列、ベクトルの次元を小さくすることができる。質量変化 $[\delta M]$ は対角行列、つまり

$$\delta m_{i,j} = 0, \quad i \neq j \quad (19)$$

であるので N 個の非ゼロ成分だけが δa , δb に寄与する。同様にして減衰、剛性行列の接続性を考慮すると行列方程式の次元は小さくなる。たとえば各質点の自由度が1で、隣の質点とのみ連結されている場合を考えると、減衰行列は三重対角行列つまり

$$\delta c_{i,j} = 0, \quad |i-j| > 1 \quad (20)$$

と表され、 $3N-2$ 個の非ゼロ成分が δa に含まれる。剛性行列も同様に、 $3N-2$ 個の非ゼロ成分が δb に寄与する。この場合 δa , δb に現れる質量、減衰、剛性変化の各ベクトルは次のとおりである。

$$\delta m = [\delta m_{1,1} \quad \delta m_{2,2} \quad \cdots \quad \delta m_{N,N}]^T \quad (21)$$

$$\delta c = [\delta c_{1,1} \quad \delta c_{1,2} \mid \delta c_{2,1} \quad \delta c_{2,2} \quad \delta c_{2,3} \mid \cdots \mid \delta c_{N,N-1} \quad \delta c_{N,N}]^T \quad (22)$$

$$\delta k = [\delta k_{1,1} \quad \delta k_{1,2} \mid \delta k_{2,1} \quad \delta k_{2,2} \quad \delta k_{2,3} \mid \cdots \mid \delta k_{N,N-1} \quad \delta k_{N,N}]^T \quad (23)$$

δa には質量と減衰が、 δb には質量と剛性がそれぞれ寄与するのでいずれのベクトルも次元は $4N-2$ である。行列 $[G]$, $[H]$ はゼロ要素に対応する列成分を消去し、 $\delta m_{i,j}$ のように繰り返し現れる成分をまとめると $4N_e^2 \times (4N-2)$ 次元になる。一般性を失わないので今後特に断らない限り、減衰、剛性行列が三重対角行列として表される場合を例に説明する。

次に、 δa と δb には共通する成分が含まれるので、それぞれの成分が対応するように $3N-2$ 次元のゼロベクトル 0 を挿入する。これに対応して行列 $[G]$, $[H]$ には $4N_e^2 \times (3N-2)$ 次元のゼロ行列を挿入する。拡張した未知数ベクトルは次のように表される。

$$\delta a = [\delta m^T \quad \delta c^T \quad 0^T]^T \quad (24)$$

$$\delta b = [\delta m^T \quad 0^T \quad \delta k^T]^T \quad (25)$$

これを用いると $[G]\delta a + [H]\delta b$ はまとめて $[D]\delta v$ と表

することができる。

$$[D] = [g_1 \cdots g_N | g_{N+1} \cdots g_{4N-2} | 0 \cdots 0] \\ + [h_1 \cdots h_N | 0 \cdots 0 | h_{N+1} \cdots h_{4N-2}] \quad (26)$$

$$\delta \mathbf{v} = [\delta \mathbf{m} \quad \delta \mathbf{c} \quad \delta \mathbf{k}]^T \quad (27)$$

ここで、 g_j , h_j はそれぞれ行列 $[G]$, $[H]$ の拡張前の第 j 列ベクトルである。

ベクトル $\delta \mathbf{c}$, $\delta \mathbf{k}$ はそれぞれ N 個の減衰、剛性係数の変化を使って次のように表される。

$$\delta \mathbf{c} = [\delta c_1 + \delta c_2 \quad -\delta c_2 \quad -\delta c_2 \quad \delta c_2 + \delta c_3 \quad -\delta c_3 \quad \cdots \quad -\delta c_N \quad \delta c_N]^T \quad (28)$$

$$\delta \mathbf{k} = [\delta k_1 + \delta k_2 \quad -\delta k_2 \quad -\delta k_2 \quad \delta k_2 + \delta k_3 \quad -\delta k_3 \quad \cdots \quad -\delta k_N \quad \delta k_N]^T \quad (29)$$

よって $\delta \mathbf{v}$ を独立な項だけを含むように変形しそれに応じて行列 $[D]$ も変形することができる。ベクトル $\delta \mathbf{v}$ は $3N$ 次元に、行列 $[D]$ は $4N_e^2 \times 3N$ 次元になる。

一方、式(10)右辺は次のように変形できる。

$$[\Lambda^u]^T [\Phi_u]^T [A] [\Phi_d] - [\Phi_u]^T [A] [\Phi_d] [\Lambda^d] \\ = [\Lambda^u]^T [P] - [P] [\Lambda^d] \quad (30)$$

$$[P] = [\Phi_u]^T [A] [\Phi_d] \quad (31)$$

$[\Lambda^u]$, $[\Lambda^d]$ はともに対角行列であるので式(10)右辺の第 (i,j) 成分は次のように表される。

$$RHS_{i,j} = (\lambda_i^u - \lambda_j^d) P_{i,j} \quad (32)$$

式(10)左辺の変形にあわせて右辺から $4N_e^2$ 次元の列ベクトル $\mathbf{r}$ を得る。

$$\mathbf{r} = [RHS_{1,1} \cdots RHS_{1,2N_e} | RHS_{2,1} \cdots RHS_{2,2N_e} | \cdots | RHS_{2N_e,1} \cdots RHS_{2N_e,2N_e}]^T \quad (33)$$

以上より損傷同定問題は次の線形連立方程式と等価であることが導かれた。

$$[D] \delta \mathbf{v} = \mathbf{r} \quad (34)$$

ここで $[D]$ は $4N_e^2 \times 3N$ 次元の行列、 $\delta \mathbf{v}$, $\mathbf{r}$ はそれぞれ $3N$ 次元、 $4N_e^2$ 次元の列ベクトルである。 $[D]$ および $\mathbf{r}$ には互いに複素共役な成分が入っているため、 $\delta \mathbf{v}$ は常に実数である。

4. 損傷前構造特性の扱い

損傷同定は式(34)を $\delta \mathbf{v}$ について解くことに等価であることが分かったが、右辺 $\mathbf{r}$ は必ずしも既知ではない。本節では右辺に現れる損傷前構造特性の扱いを説明する。

変形前の式(10)から明らかなように式(34)左辺の $[D]$ はその成分にモード特性のみを含むため損傷前後の振動計

測により得られるが、右辺を計算するためには、モード特性に加えて $[A]$ のサブマトリックスである損傷前の質量、減衰の各行列が必要となる。これらの構造特性が得られればモード特性と共に $\mathbf{r}$ を計算して式(34)を $\delta \mathbf{v}$ について解くことで損傷同定が可能である。しかし実際に構造特性を決定することは容易でない。多数の部材からなる構造物の $[C]$ を精度よく定めることは極めて困難である。何らかの方法で $[C]$ が既知である場合と減衰が非常に小さく $[C]$ を零行列と仮定できる場合に限り、構造特性を用いて式(34)の右辺を得ることができるが、このようなケースはまれである。

そこで $[C]$ が未知の場合にも、モード特性と構造特性の関係を利用して損傷前後のモード特性と $[M]$ から式(10)右辺を推定する方法を提案する。まず変換行列 $[\Theta]$ を次のように定義する。

$$[\Phi_d] = [\Phi_u][\Theta] \quad (35)$$

十分なモード特性同定がなされた場合にはモード形ベクトルは線形独立であり、 $[\Theta]$ はモード形行列の逆行列を利用して求められる。

$$[\Theta] = [\Phi_u]^{-1} [\Phi_d] \quad (36)$$

モード特性が十分に分からず $[\Phi_u]$ が正方行列にならない場合には最小二乗法で次のように求められる。

$$[\Theta] = ([\Phi_u]^T [\Phi_u])^{-1} [\Phi_u]^T [\Phi_d] \quad (37)$$

これを用いて式(31)の行列 $[P]$ を表す。

$$[P] = [\Phi_u]^T [A] [\Phi_u][\Theta] = [\Lambda^u] [\Theta] \quad (38)$$

行列 $[\Lambda^u]$ は付録に示すようにモード特性と $[M]$ から得られることから $[C]$, $[K]$ を用いることなく式(34)右辺を計算することができる。減衰と剛性の正確な推定は困難である一方で質量は容易に推定できることから本手法の実用上の意義は大きい。

5. 同定未知数と観測モード数

式(34)の解法について検討する。 $[D]$ が正則行列である場合には逆行列を用いて唯一解 $\delta \mathbf{v}$ が決まるが非正則行列の場合には工夫を要する。 $[D]$ のランクが未知数の総数と比べて等しいか大きければ特異値分解を利用した最小二乗解として損傷が同定される。ランクが未知数に比べて小さい場合には損傷のノルムを最小とする条件を加えて最小二乗最小ノルム解を得る。 $[D]$ のランクが小さい場合には誤差の上限が大きくなることから、未知数を減らす、あるいは観測モード総数を増やすといった工夫が必要である⁹⁾。どの程度の未知数あるいはモード総数で十分な精度を得られるかは、対象とする系について個別に判断する必要がある。

未知数を減らすためには例えば、損傷箇所など変化の生じる構造特性を限定することができる。特に、質量は損傷

により変化することは少ないので、また変化が生じるか否かをあらかじめ予測しやすいので未知数を減らすことができる。一方、観測モード総数を増やすことは容易ではない。従来モード特性が十分な次数まで把握できなかった一因に観測点数の少なさによる制約があったが、光ファイバーセンサーやレーザードップラー速度計など近年の計測技術の向上によりこれは解消されつつある。これらの計測技術を利用してより多くのモード特性の把握が可能となることが期待される。ただし、損傷同定精度の各モード特性誤差に対する感度や非可観測モードに対する感度について理論解は得られていないので、数値計算でそれぞれのケースに応じて検討する必要がある。

6. 数値計算

多自由度の離散数値モデル上で、3章で述べた同定法により損傷の場所と大きさを検出し手法の妥当性を確かめる。損傷前のモデルは図1に示すとおり、質点が複雑に連結された7自由度系である。

まず、モード特性を把握する。各質点に初速度を与え、その後の応答を数値シミュレーションした。系の速度応答にERA²を適用し得られたモード特性を表1に示す。

次にモデルに損傷を導入するためいくつかの質量、減衰、剛性をおよそ1%程度増加あるいは減少させた。質量は m_3, m_4, m_5 を、減衰は c_2, c_{31}, c_{53}, c_7 を、剛性は $k_3, k_{31}, k_{53}, k_{64}$ を変化させた。損傷前構造特性が既知、未知の場合について数値モデル上で損傷同定を行った。

6.1 損傷前構造特性が既知の場合

損傷箇所が未知とすると全質量、減衰、剛性係数の変化に相当する計27個の未知数が存在する。不定となることを避けるため構造特性をひとつ固定すると未知数は26個となる。このとき最小二乗法で解が定まるためには方程式が26個以上必要である。4つのモードが観測されたとすると方程式の数つまり行列 $[D]$ の行数は $4N_e^2 = 4 \times 4^2 = 64$ である。このうち半分は他方の複素共役であることから実質上32個の方程式があることになる。式(34)の最小二乗解を求めたところ図2の結果が得られた。

3つのモードが観測された場合には複素共役な方程式を除くと独立な方程式は18個である。未知数よりも独立な方程式が少ないので精度よく解を定めるためには、損傷箇所を限定する必要がある。たとえば、 $m_1, m_2, m_6, m_7, c_1, c_{51}, c_{32}, c_{42}, c_{64}$ に変化は生じないとあらかじめわかっている場合には未知数と同数の方程式が存在し、解を定めることができる。図3にこの場合の損傷同定結果を示す。いずれもすべてのモードが観測されているわけではなく精度よく損傷同定できている。

6.2 損傷前構造特性が未知の場合

損傷前質量とモード特性のみから $[a_1]$ を推定し損傷

同定を行った。全てのモードが観測された場合の同定結果を図4に示す。精度よい解が得られ、損傷前の減衰が未知の場合にも損傷同定が可能であることが確認された。

6.3 観測モード数と同定精度

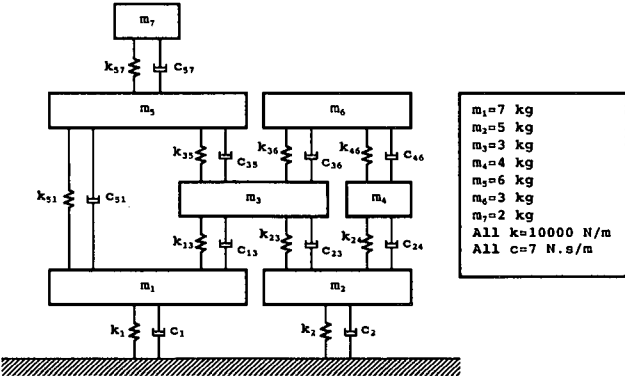
損傷同定誤差として次の指標を考える。これらは質量、減衰、剛性変化の各同定値と真値の差を、真値により基準化したもので Cha²⁰も同様の指標を用いている。

$$\varepsilon_{\delta m} = \frac{|\delta m_{identified} - \delta m|}{|\delta m|} \tag{39}$$

$$\varepsilon_{\delta c} = \frac{|\delta c_{identified} - \delta c|}{|\delta c|} \tag{40}$$

$$\varepsilon_{\delta k} = \frac{|\delta k_{identified} - \delta k|}{|\delta k|} \tag{41}$$

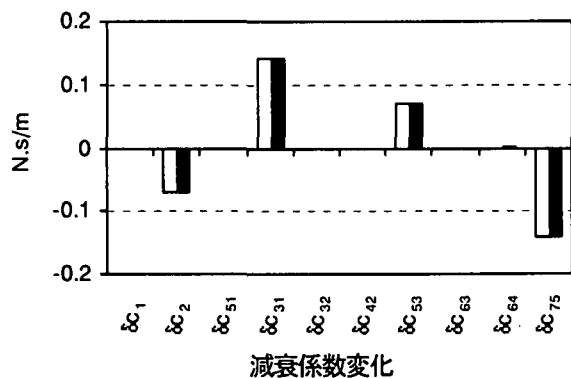
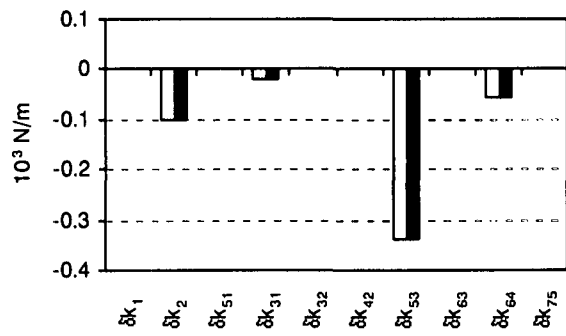
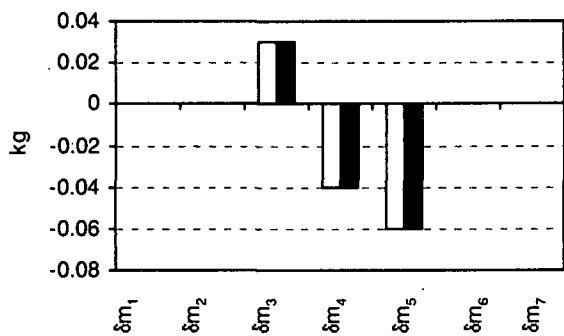
観測モード数を変化させて損傷同定した場合の誤差を求めた。損傷前構造特性が既知未知それぞれの場合を想定し、損傷箇所限定の有無、つまり同定すべき構造特性が18個、26個の各ケースについて計算した。図5に $\varepsilon_{\delta c}$ を示す。損傷前構造特性が未知で非可観測モードがある場合にも $N_e = 6$ では損傷をほぼ再現できている。損傷前構造特性が未知の場合には非可観測モードにより同定精度が低下するが、損傷箇所を限定することで誤差を抑制でき、損傷同定可能であることが確認された。



図－1 数値計算モデル

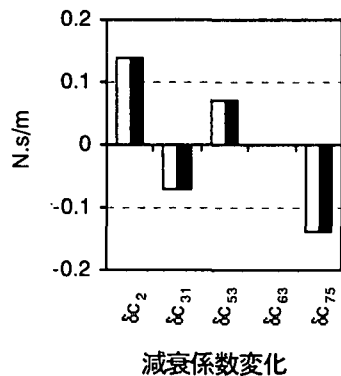
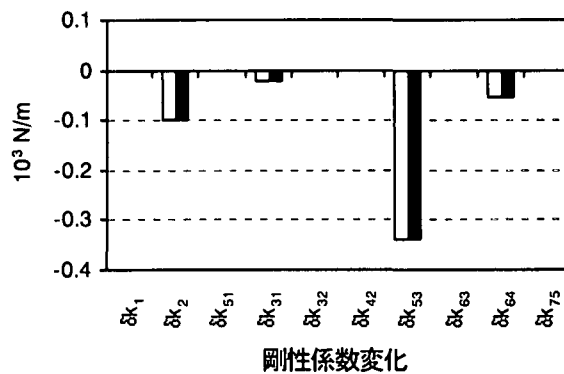
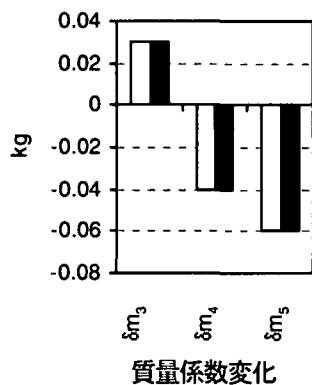
表－1 固有振動数とモード減衰比

Mode	Natural frequency (rad/s)	Modal damping ratio (%)
Mode 1	23.0346	0.81
Mode 2	42.5834	1.49
Mode 3	64.9751	2.27
Mode 4	78.9842	2.76
Mode 5	88.0424	3.08
Mode 6	92.2607	3.23
Mode 7	127.3499	4.46



□ Real
■ Detected

図-2 損傷同定結果 ($N_e = 4$)



□ Real
■ Detected

図-3 損傷同定結果 ($N_e = 3$)

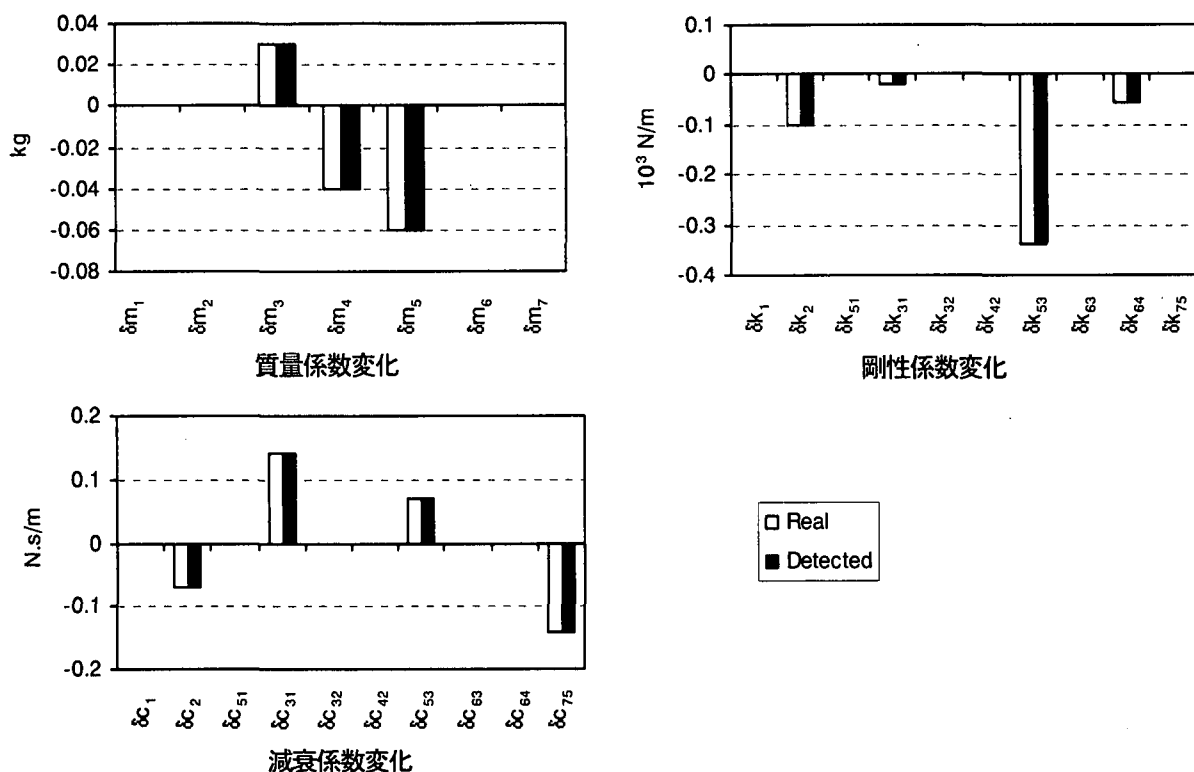


図-4 損傷同定結果 (減衰行列が未知の場合)

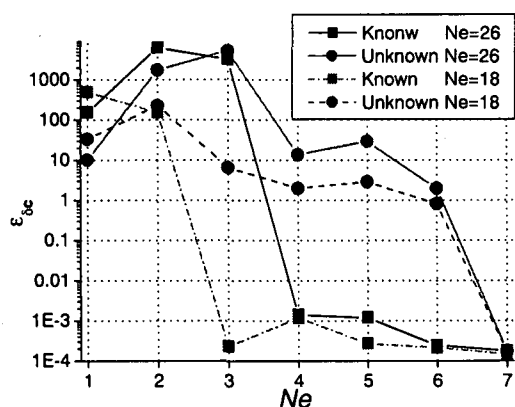


図-5 観測モード数と損傷同定誤差(減衰)

7. 結論

膨大な構造物の維持管理をするために効率的かつ確実な損傷同定が不可欠である。本研究では、振動計測を利用した非比例減衰系の非反復損傷同定法を構築した。このうちモード特性の解析には近年著しい進展がみられ詳細に把握できるようになりつつあるので、モード特性から構造特性を逆解析する方法について説明した。本方法の特徴として以下の点が挙げられる。①状態変数表示を利用することで非比例減衰系を扱うことができる。②モード特性、モード刺激係数、質量の情報を用いれば損傷前の減衰、剛性が既知である必要がない。③構造特性変化を表す行列をベクトルに変形し、繰り返し計算を必要としない。数値モデ

ルで本手法の妥当性を検討したところ、構造特性の変化を正確に検出できることが明らかになった。

本研究では振動計測を利用した損傷同定の枠組みを構築できた。今後、実構造物への適用が期待されるが¹⁰⁾、それにあたり問題となるであろうモード特性の精度について検討する必要がある。

付録モード特性による行列 $[^{\backslash}a_i]$ の算出

式(2)を初期条件 $\{y_0\}$ のもとでラプラス変換すると

$$(\lambda[A] + [B])\{Y(\lambda)\} = \{F(\lambda)\} + [A]\{y_0\} \quad (A1)$$

座標変換 $\{Y\} = [\Phi_u]\{q\}$ を施し、 $[\Phi_u]^T$ を前からかけると、モード形ベクトルの直交性により式(A1)は非連成化される。

$$(\lambda[^{\backslash}a_i] + [^{\backslash}b_i])\{q\} = [\Phi_u]^T\{F\} + [\Phi_u]^T[A]\{y_0\} \quad (A2)$$

$$[^{\backslash}a_i] = [\Phi_u]^T[A][\Phi_u] \quad (A3)$$

$$[^{\backslash}b_i] = [\Phi_u]^T[B][\Phi_u] \quad (A4)$$

ERA などのモード特性同定法はインパルス応答などの自由減衰振動データを必要とする。ここでは初期変位ゼロ、初速度 v_0 を与えるケースを考える。式(A2)は次のように変形できる。

$$(\lambda[^{\backslash}a_i] + [^{\backslash}b_i])\{q\} = [\Phi_u]^T[A]\{y_0\} \quad (A5)$$

$$\{y_0\} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{v_0\} \end{Bmatrix} \quad (A6)$$

各モード座標 q_i について書き直すと

$$(a_i \lambda + b_i) q_i = \{\Phi_u\}_i^T [A] \{y_0\}, \quad i = 1, 2, \dots, 2N \quad (A7)$$

となる。ここで $\{\Phi_u\}_i$ は $[\Phi_u]$ の第 i 列ベクトルである。両辺を a_i で割ると

$$(\lambda - \lambda_i) q_i = \frac{1}{a_i} \{\Phi_u\}_i^T [A] \{y_0\}, \quad i = 1, 2, \dots, 2N \quad (A8)$$

が得られ、式(A8)を q_i について解きラプラス逆変換により時間領域に直すと

$$q_i(t) = \frac{1}{a_i} \{\Phi_u\}_i^T [A] \{y_0\} e^{\lambda_i t} \quad (A9)$$

となる。更にモード座標から物理座標に変換すると

$$\{y\} = \sum_{i=1}^{2N} \{\Phi_u\}_i \left(\frac{1}{a_i} \{\Phi_u\}_i^T [A] \{y_0\} \right) e^{\lambda_i t} \quad (A10)$$

である。上式中の $\frac{1}{a_i} \{\Phi_u\}_i^T [A] \{y_0\}$ は各モードの刺激

係数 $\bar{Q}_i$ で、ERAなどのモード特性同定の過程で得られる。次の関係

$$[A] \{y_0\} = \begin{bmatrix} [C] & [M] \\ [M] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{v_0\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [M] \{v_0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (A11)$$

を利用すると刺激係数 $\bar{Q}_i$ は簡略化される。

$$\bar{Q}_i = \frac{1}{a_i} \{\psi\}_i^T [M] \{v_0\} \quad (A12)$$

よって a_i は次のように表される。

$$a_i = \frac{1}{\bar{Q}_i} \{\psi\}_i^T [M] \{v_0\} \quad (A13)$$

ここで $\{\psi\}_i$ は i 次モード形で $\{\Phi_u\}_i$ の上半成分である。

参考文献

- 1) Vu-manh, H., Abe, M., Fujino, Y., Kaito, K.: The Eigensystem Realization Algorithm for Ambient Vibration Measurement Using Laser Doppler Vibrometers, Proceedings of the American Control Conference, pp435-440, 2001
- 2) Juang J.N., Pappa R.S.: An Eigensystem Realization Algorithm For Modal Parameter Identification And Model Reduction, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 8, No. 5., pp620-627, 1985
- 3) Abe, M.: Structural Monitoring of Civil Structures Using Vibration Measurement-Current Practice and Future, Artificial Intelligence in Structural Engineering: Information Technology for Design, Collaboration, Maintenance, and Monitoring, I. Smith, Springer, pp1-18, 1998
- 4) Smith, S.W., Zimmerman, D.C., Bartkiewicz, T.J., Kim, H.M.: Experiments for Damage Location in a Damped Structure, Proceedings of the 15th International Modal Analysis Conference (IMAC), Vol. II, Society of Experimental Mechanics, Florida, pp.1096-1102, 1997
- 5) Kaouk, M., Zimmerman, D.C.: Structural Damage Assessment Using a Generalized Minimum Rank Perturbation Theory, AIAA Journal, Vol.32, No.4, pp.836-842, 1994
- 6) Cha, P.D., de Pillis, L.G.: Model Updating by Adding Known Masses, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 50, pp.2547-2571, 2001
- 7) 阿部雅人, 藤野陽三, 長山智則, 池田憲二: 常時微動計測に基づく非比例減衰系の構造同定と長大吊橋への適用例, 土木学会論文集, No.689/I-57, pp.261-274, 2001
- 8) Tsuei, Y.G., Yee, E.K.L.: A Method To Modify dynamic Properties of Undamped Mechanical Systems, Transactions of the ASME Journal of Dynamic System, Measurement, and Control, Vol.111, pp.403-408, 1987
- 9) Yee, E.K.L., Tsuei, Y.G.: Method of Shifting Natural Frequencies of Damped Mechanical System, AIAA Journal, Vol.29, No.11, pp.1973-1977, 1991
- 10) Vu-manh, H.: Application of Laser Doppler Vibrometers in Damage Detection, 東京大学大学院社会基盤工学専攻修士論文, 2001
- 11) 長山智則, 阿部雅人, 藤野陽三, 池田憲二: 常時微動計測に基づく非比例減衰系の非反復構造同定法と長大吊橋への適用例, 土木学会論文集投稿中

(2002年4月19日 受付)