

侵食性河床上のステップ発達に関する弱非線型安定解析

Nonlinear stability analysis of the step development on erosional beds

山口 里実*・泉 典洋**

Satomi YAMAGUCHI and Norihiro IZUMI

*学生会員 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻 (〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

**正会員 PhD 東北大学助教授 大学院工学研究科土木工学専攻 (同上)

It has been known that a series of steps often develop on an erosional bed. In this study, a weakly nonlinear stability analysis is performed with the use of the two-dimensional Reynolds equations. The analysis leads the value of the first Landau coefficient in a nonlinear amplitude equation with the use of the amplitude expansion method. The results show that when the wavenumber is larger than the characteristic wavenumber obtained in the linear stability analysis, the perturbation keeps growing in the process of the nonlinear development. This result corresponds to the fact that steps on erosional beds develop to form a series of waterfall-like steps or overhanging cliffs in channels. This does not mean the steps can actually grow infinitely. Fully-developed steps, which cannot be described by this formulation, can be illustrated by Parker et al's theory to have an equilibrium amplitude.

Key Words : weakly nonlinear stability analysis, steps, erosional beds, nonlinear development

1. はじめに

粘着性物質で構成されるような斜面において流水の侵食によって河道が形成される際、連続した段状（ステップ）の縦断形状が発達することがある^{1),2)}。このようなステップ形状は、山間部における沢や小渓流など基盤岩が露出し侵食が卓越すると考えられるような河床においてもよく見られるものである。図-1は広瀬川の支流である竜の口沢に見られる河床形状である。図を見ると、河床上に滝状部と湛水部が連続して現われるような発達したステップ形状が形成されていることがわかる。

芦田・澤井²⁾は侵食性河床に現れるステップの形成過程に関する実験を行い、図-2のような結果を得ている。図を見ると、侵食初期に発生した微小擾乱が侵食の進行とともに振幅を増加させながら発達し、連続したステップ形状が形成されていく様子がわかる。さらに形成されたステップが上流側へ移動しながら発達し、湛水部を伴うような発達したステップ縦断形状が形成される過程が確認できる。

Parker and Izumi³⁾は侵食性河床上に形成されたステップに対して非線型解析を行い、十分発達した後のステップ形状を説明している。浅水流方程式を用いた彼らの理論は、有限振幅のステップに対して適用可能であるものの、ステップの発生初期過程および有限振幅にいたるまでの発達過程を説明することはできない。著者らはステップの発生過程を説明するために、レイノルズ方程式を用いた線形安定解析を行っている⁴⁾。この理論によって、浅水流モデルでは説明できなかったステップの発生初期卓越波長が求められている。しかし、線形安定性理論の範囲では、微小擾乱が有限振幅にいたる過程、すなわち非線型発達段階は説明できない。



図-1 竜の口沢に見られる発達したステップ形状。(仙台市青葉区広瀬川支流)

発生初期の微小振幅から有限振幅にいたる発達段階を説明する手段として弱非線型安定解析が挙げられる。弱非線型理論は、擾乱の振幅が小さくても非線形性を無視できない程度の大きさである場合に適用されるもので、非線型発達段階を説明するのに有効である。本研究では、弱非線型解析の手法を用い、侵食性河床において発生した微小擾乱の非線型発達過程を理論的に説明することを試みる。

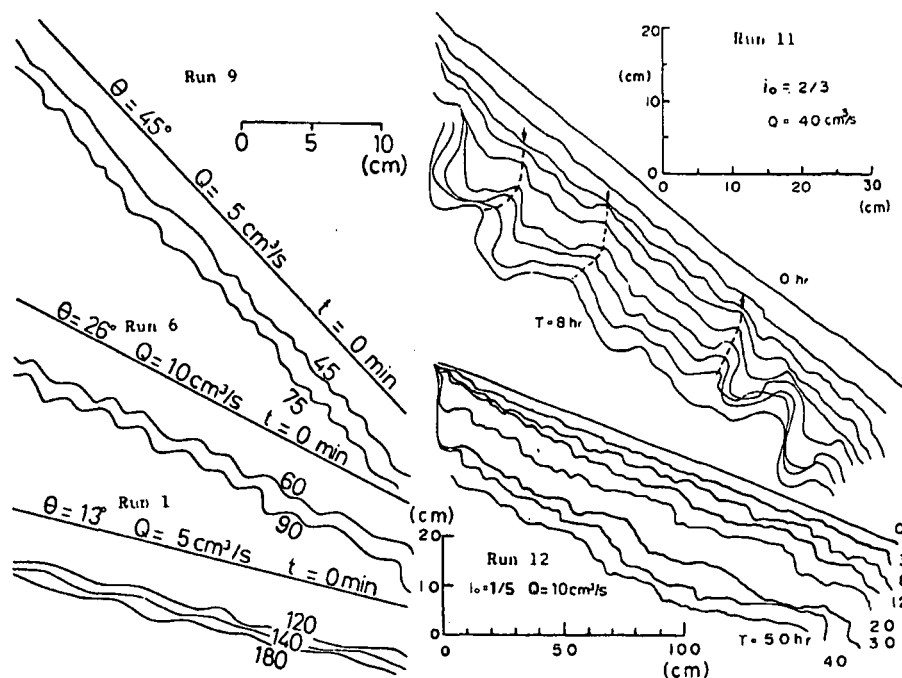


図-2 実験（芦田・澤井, 1977）によって侵食性河床上に発達するステップ形状. 文献2)より転載.

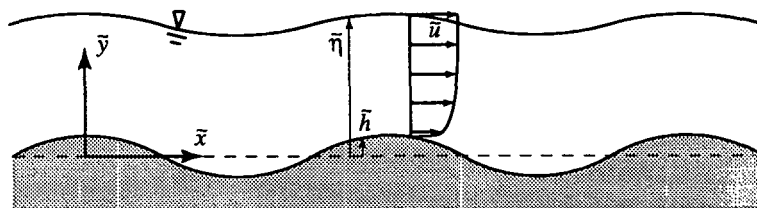


図-3 座標系の概念図.

2. モデル

図-3に示すような二次元の開水路流れを考える。ここで $\bar{h}$ および $\bar{\eta}$ はそれぞれ河床高および水面高を表す。流れは二次元レイノルズ方程式と水面および底面における境界条件によって決定される。

図-1 および 図-2 に見られるようなステップ形状は、流水の侵食による河床形状の変化過程において形成されるものと考えられる。本研究では、河床高さは侵食の過程だけで決定されるものとし、その時間変化には次のようなエクスナー方程式を適用する^{3),4)}。

$$(1 - \lambda_p) \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} = -\bar{E} = -a(\bar{\tau}_t - \bar{\tau}_{th})^\gamma \quad (1)$$

ここで、 $\bar{E}$ 、 $\bar{\tau}_t$ 、 $\bar{\tau}_{th}$ および λ_p はそれぞれ侵食速度、河床に対し接線方向の底面せん断力、限界せん断力および河床物質の空隙率である。また a および γ は実験等によって経験的に与えられる係数である。粘着性流路の場合、 γ の値は 1~4 程度の値をとることが従来の研究より明らかになっている^{5),6),7)}。また岩盤については、侵食速度に関する研究はほとんど行われておらず

γ の値は詳しくわかっていないが、数少ない研究においては 1 前後の値をとるといわれている^{8),9)}。本研究では、後述するように γ の値として 2.0 および 1.5 を適用している。

まず基準状態では、勾配 S の平坦河床において等流状態が実現しているとする。この平坦床に対して次式で表されるような微小擾乱を与え、線型安定解析を行う。

$$\bar{h} = \bar{A} e^{\bar{\Omega} \bar{t}} \cos(\bar{k} \bar{x}) \quad (2)$$

ここで $\bar{A}$ および $\bar{\Omega}$ 、 $\bar{k}$ はそれぞれ擾乱の振幅および増幅率、波数を表す。増幅率 $\bar{\Omega}$ の値が正であれば、平坦床は不安定となり、この場合、侵食の初期過程で微小擾乱が発生することになる。その発生した微小擾乱が自身の相互作用によって有限振幅のステップへ発達する過程に対して弱非線型安定解析を行う。ここで、本研究ではステップの線型および弱非線型発達段階において平均河床勾配が一定値 S に保たれているとしている。

擾動の弱非線型安定性の解析には、主に増幅率展開法と振幅展開法の二つの手法が用いられる¹⁰⁾。増幅率展開法は、線形安定性が示す中立状態からのわずかなずれを考え、中立点近傍において増幅率を微小パラメー

タとして展開する手法である。そのため、増幅率が微小でなくなるような中立点から離れた領域においては、この手法を適用できない。一方、振幅展開法は、振幅を微小パラメータとして展開する手法であり、中立点から離れた領域においても振幅が小さい範囲であれば適用可能である。本研究は、線形不安定性によって発生したステップの非線形発達段階を説明することを目的とするため、線形増幅率が正となる広い領域に対して適用可能でなければならない。したがって、ここでは振幅展開法を用いた弱非線形安定解析を適用する。

振幅展開法では非線形振幅方程式は次のように仮定される。

$$\frac{d\tilde{A}}{d\tilde{t}} = \tilde{\alpha}_0 \tilde{A} + \tilde{\alpha}_1 |\tilde{A}|^2 \tilde{A} \quad (3)$$

ここで $\tilde{\alpha}_0$ は線形増幅率に相当する。 $\tilde{\alpha}_1$ は第一ランダウ定数と呼ばれ、非線形性の影響を表す定数である。式(3)を用いると、発生した微小擾乱が有限振幅にいたる過程を説明することができる。式(3)において $\tilde{\alpha}_0 > 0$ かつ $\tilde{\alpha}_1 < 0$ の場合は、微小擾乱の非線形発達段階のその増幅が抑制されることを意味する。これは超臨界安定と呼ばれる状態であり、微小擾乱が有限振幅にいたる段階において、平衡振幅が現れることになる。一方、 $\tilde{\alpha}_0 > 0$ かつ $\tilde{\alpha}_1 > 0$ の場合は擾乱の増幅が抑制されず、絶対不安定と呼ばれる状態が現れる。このとき、擾乱は平衡振幅を持たずに常に発達し続けることになる。

つまり $\tilde{\alpha}_1$ が正の場合、侵食初期に発生した微小擾乱が発達し続けるような発達過程が現れることになる。従って、本研究では非線形振幅方程式(3)中の $\tilde{\alpha}_1$ の値を求めることが第一の目的である。

3. 定式化

3.1 支配方程式

図-3に示されるような流れは次のような二次元レイノルズ方程式および連続の式によって表される。

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + gS + \tilde{\epsilon} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \right) \quad (4)$$

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + \tilde{\epsilon} \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2} \right) \quad (5)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0 \quad (6)$$

ここで $\tilde{x}$ および $\tilde{y}$ はそれぞれ流下方向および水深方向の座標、 $\tilde{u}$ および $\tilde{v}$ はそれぞれ流速の $\tilde{x}$ および $\tilde{y}$ 方向成分、 $\tilde{p}$ はピエゾ圧力、($= \tilde{p}^* + \rho g \tilde{y}$)、 $\tilde{p}^*$ は圧力、 S は前述したように河床勾配、 ρ および g はそれぞれ水の密度および重力加速度である。また、 $\tilde{\epsilon}$ は渦動粘性係数であり、次のように表される。

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon U_f D \quad (7)$$

ここで U_f および D はそれぞれ基本状態における摩擦速度および水深であり、次の関係が成立している。

$$U_f = \left(\frac{\tilde{\tau}_0}{\rho} \right)^{1/2} = (gDS)^{1/2} \quad (8)$$

ここで $\tilde{\tau}_0$ は基準状態における底面剪断力である。Engelund¹¹⁾ および Fredsøe¹²⁾ は ϵ の値として 0.077 の値を採用しており、本研究でもこの値を用いることにする。

河床高さの時間変化式は前述のように式(1)で表される。ここで、 $\tilde{\tau}_t$ は次式で表される。

$$\tilde{\tau}_t = \frac{1}{1 + (\partial \tilde{\eta} / \partial \tilde{x})^2} \left[2 \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} \right) + \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} \right) \left\{ 1 - \left(\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} \right)^2 \right\} \right] \quad (9)$$

3.2 境界条件

水面での運動学的境界条件は次式で表される。

$$\tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{e}_{ns} = 0 \quad \text{at} \quad \tilde{y} = \tilde{\eta} \quad (10)$$

水面において法線方向応力が大気圧に等しくなる条件は次のように表される。

$$\mathbf{e}_{ns} \cdot \tilde{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{e}_{ns} = \text{const.} \quad \text{at} \quad \tilde{y} = \tilde{\eta} \quad (11)$$

また、水面では剪断力がほぼゼロとなるため、次式が与えられる。

$$\mathbf{e}_{ts} \cdot \tilde{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{e}_{ns} = 0 \quad \text{at} \quad \tilde{y} = \tilde{\eta} \quad (12)$$

ここで $\tilde{\mathbf{u}}$ および $\tilde{\mathbf{T}}$ はそれぞれ流速ベクトルおよび応力テンソルであり、次のように表される。

$$\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{u}, \tilde{v}), \quad (13)$$

$$\tilde{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} \tilde{\tau}_{xx} & \tilde{\tau}_{xy} \\ \tilde{\tau}_{yx} & \tilde{\tau}_{yy} \end{pmatrix} \quad (14)$$

ここで

$$\tilde{\tau}_{xx} = -\tilde{p}^* + 2\rho\tilde{\epsilon} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}}, \quad (15a)$$

$$\tilde{\tau}_{yy} = -\tilde{p}^* + 2\rho\tilde{\epsilon} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}}, \quad (15b)$$

$$\tilde{\tau}_{xy} = \rho\tilde{\epsilon} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} \right) \quad (15c)$$

また、 $\mathbf{e}_{ns}$ および $\mathbf{e}_{ts}$ はそれぞれ水面に対する単位法線ベクトルおよび単位接線ベクトルであり、次式で表される。

$$\mathbf{e}_{ns} = \frac{(-\partial \tilde{\eta} / \partial \tilde{x}, 1)}{\sqrt{1 + (\partial \tilde{\eta} / \partial \tilde{x})^2}}, \quad (16a)$$

$$\mathbf{e}_{ts} = \frac{(1, \partial \tilde{\eta} / \partial \tilde{x})}{\sqrt{1 + (\partial \tilde{\eta} / \partial \tilde{x})^2}} \quad (16b)$$

底面での運動学的境界条件は次式で与えられる.

$$\tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{e}_{nb} = 0 \quad \text{at} \quad \tilde{y} = \tilde{h} \quad (17)$$

底面における接線方向の流速 $\tilde{u}_t$ と剪断力 $\tilde{\tau}_t$ の間に次のような関係を仮定する^{(11),(12)}.

$$\rho \tilde{u}_t^2 = K^2 \tilde{\tau}_t \quad (18)$$

この条件は次のように書き表される.

$$\frac{\rho}{K^2} (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{e}_{tb})^2 = \mathbf{e}_{tb} \cdot \tilde{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{e}_{nb} \quad \text{at} \quad \tilde{y} = \tilde{h} \quad (19)$$

ここで $\mathbf{e}_{nb}$ および $\mathbf{e}_{tb}$ はそれぞれ底面に対する単位法線ベクトルおよび単位接線ベクトルであり、次のように表される.

$$\mathbf{e}_{nb} = \frac{(-\partial \tilde{h} / \partial \tilde{x}, 1)}{\sqrt{1 + (\partial \tilde{h} / \partial \tilde{x})^2}}, \quad (20a)$$

$$\mathbf{e}_{tb} = \frac{(1, \partial \tilde{h} / \partial \tilde{x})}{\sqrt{1 + (\partial \tilde{h} / \partial \tilde{x})^2}} \quad (20b)$$

3.3 無次元化および座標変換

次式のような無次元化を導入する.

$$(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{h}, \tilde{\eta}) = D(x, y, h, \eta), \quad (21a)$$

$$(\tilde{u}, \tilde{v}) = \frac{U_f}{\epsilon}(u, v), \quad \tilde{p} = \rho \left(\frac{U_f}{\epsilon} \right)^2 p, \quad (21b, c)$$

$$\tilde{t} = \frac{(1 - \lambda_p)D}{a\tau_0^\gamma} t \quad (21d)$$

上式を用いると、支配方程式 (4)–(6) は次のように表される.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \epsilon^2 \left(1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (22)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \epsilon^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (23)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (24)$$

次式で定義される流関数を導入する.

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (25a, b)$$

このとき支配方程式 (22)–(24) は次のように書き直される.

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \epsilon^2 \left(1 - \nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \quad (26)$$

$$-\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \epsilon^2 \nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (27)$$

ここで ∇^2 は次式を表す.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (28)$$

式 (26) および (27) から p を消去して次式を得る.

$$-\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial y} - \epsilon^2 \nabla^2 \nabla^2 \psi = 0 \quad (29)$$

無次元化された河床高さの時間変化は次式のように表される.

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -(\tau_t - \theta)^\gamma \quad (30)$$

ここで、 τ_t は無次元化された底面剪断力 $\tilde{\tau}_t$ であり、次式で表される.

$$\tau_t = \frac{1}{1 + (\partial \eta / \partial x)^2} \left[2 \frac{\partial h}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left\{ 1 - \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right\} \right] \quad (31)$$

また、 θ は基準状態における底面剪断力 $\tilde{\tau}_0$ で正規化された限界剪断力であり、次式のように表される.

$$\theta = \frac{\tilde{\tau}_{th}}{\tilde{\tau}_0} \quad (32)$$

次のような座標変換を導入する.

$$\xi = x, \quad \chi = \frac{y - h}{\eta - h} \quad (33a, b)$$

この座標変換によって境界上での流関数の値を評価することが可能になる. 式 (33) の座標変換を用いると、水面および底面における境界条件 (10)–(12), (17) および (19) はそれぞれ次のように書き表される.

$$-u \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + v = 0 \quad \text{at} \quad \chi = 1 \quad (34)$$

$$\begin{aligned} & -p^* + \frac{2\epsilon^2}{1 + (\partial \eta / \partial \xi)^2} \\ & \times \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} \\ & = \text{const.} \quad \text{at} \quad \chi = 1 \quad (35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2 \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ & + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left\{ 1 - \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)^2 \right\} = 0 \\ & \text{at} \quad \chi = 1 \quad (36) \end{aligned}$$

$$-u \frac{\partial h}{\partial \xi} + v = 0 \quad \text{at } \chi = 0 \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \left(u + v \frac{\partial h}{\partial \xi}\right)^2 &= \kappa^2 (\eta - h) \left[2 \frac{\partial h}{\partial \xi} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left\{ 1 - \left(\frac{\partial h}{\partial \xi} \right)^2 \right\} \right] \\ &\quad \text{at } \chi = 0 \quad (38) \end{aligned}$$

ここで p^* は無次元化された圧力 ($= \bar{p}^* \epsilon^2 / \rho U_f^2$) であり, κ は正規化された K ($= \epsilon K$) である.

式 (26), (27), (29), (30) および境界条件 (34)–(38) に対して, 式 (33) を用いてさらに変数変換を行う. 例えば一回微分は次のように変換されることになる.

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \chi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial \chi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \chi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial \chi} \quad (39a, b)$$

変換された各式については, スペースの都合上ここでは省略する.

3.4 基準状態

基準状態における等流流速分布 U_0 は式 (22) より次のように求められる.

$$U_0(\chi) = \kappa + \chi - \frac{1}{2} \chi^2 \quad (40)$$

Fredsoe¹²⁾ は上式で表される等流流速をコサイン関数で近似し, 厳密解を用いた場合との誤差は無視できる程度であるとしている. 本研究でも, 後の解析を容易にするため, 次の近似式を用いることとする.

$$U_0(\chi) = (1/2 + \kappa) \cos[\beta(1 - \chi)] \quad (41)$$

ここで $\beta = (\kappa + 1/2)^{-1/2}$ である.

基準状態における河床高さ h_0 および水面高さ η_0 はそれぞれ次のように表される.

$$h_0 = -(1 - \theta)^\gamma t, \quad \eta_0 = 1 - (1 - \theta)^\gamma t \quad (42a, b)$$

上式からも明らかなように, 基準状態では, 河床高さおよび水面高さが等流水深を保ったまま一定の速度 $(1 - \theta)^\gamma$ で低下することになる. このため, 水深方向の座標 y を次のように変換する必要がある.

$$y = \tilde{y} + (1 - \theta)^\gamma t \quad (43)$$

この座標系における基準状態の河床高 $\tilde{h}_0$ および水面高さ $\tilde{\eta}_0$ はそれぞれ次のように表される.

$$\tilde{h}_0 = 0, \quad \tilde{\eta}_0 = 1 \quad (44a, b)$$

式 (43) による座標変換の影響を受けるのは, 式 (44) に示された基準状態の河床高さおよび水面高さだけであるため, この変換後の各支配方程式の表記は省略する. また, 表記の簡単化のためこのあとの記述において, $\tilde{y}$ や $\tilde{h}_0$ 等の $\sim$ 表示は省略することとする.

また等流状態における平均流速を用いるとフルード数は次式で表される.

$$Fr = \sigma^{\frac{1}{2}} \left(\kappa + \frac{1}{3} \right) \quad (45)$$

ここで σ は正規化された勾配 ($= S/\epsilon^2$) である.

4. 線形理論

弱非線型安定解析を行う前に線形安定解析を行う. 平坦河床に対して微小振幅 A の摂動を与え, 各変数をそれぞれ次のように展開する.

$$\psi = \psi_0(\chi) + Ae^{\Omega t} \psi_{11}(\chi) E + \text{c.c.}, \quad (46a)$$

$$\eta = 1 + Ae^{\Omega t} \eta_{11} E + \text{c.c.}, \quad (46b)$$

$$h = Ae^{\Omega t} E + \text{c.c.} \quad (46c)$$

ここで, $E = \exp[i(k\xi - \omega t)]$ であり, c.c. はその直前の項の複素共役を表す. また, k は擾乱の波数, Ω は線形増幅率, ω は角速度である. このとき位相速度は ω/k で表される. 式 (29) を座標変換した後, 式 (46) を代入すると $O(A)$ のオーダーにおいて次式を得る.

$$\begin{aligned} ik \left\{ U_0 \psi_{11}'' - (k^2 U_0 + U_0'') \psi_{11} \right. \\ - k^2 U_0' [1 - (1 - \eta_{11}) \chi] - 2U_0 U_0' (1 - \eta_{11}) \Big\} \\ - \epsilon^2 \left\{ \psi_{11}^{(4)} - 2k^2 \psi_{11}'' + k^4 \psi_{11} \right. \\ - k^2 \left\{ (k^2 U_0 - 2U_0'') [-1 + \chi(1 - \eta_{11})] \right. \\ \left. \left. + 4U_0' (1 - \eta_{11}) \right\} \right\} = 0 \quad (47) \end{aligned}$$

ここで χ は χ による全微分を表している. この摂動方程式は特異摂動法によって解くことができ^{4), 12)}, その一般解は次のように求められる.

$$\begin{aligned} \psi_{11}(\chi) &= a_{11} e^{-\sqrt{k^2 - \beta^2} \chi} + b_{11} e^{\sqrt{k^2 - \beta^2} \chi} \\ &\quad + c_{11} \exp \left[-\sqrt{ik\kappa} \frac{\chi}{\epsilon} \right] \\ &\quad + d_{11} \exp \left[-\sqrt{ik \left(\kappa + \frac{1}{2} \right)} \frac{1 - \chi}{\epsilon} \right] \\ &\quad + \beta^{-2} (-1 + \chi - \eta_{11} \chi) \cos[\beta(1 - \chi)] \quad (48) \end{aligned}$$

境界条件 (34) および (36)–(38) を $O(A)$ について整理するとそれぞれ次のように表される.

$$\psi_{11}(1) = 0 \quad (49)$$

$$-k^2 \eta_{11} \left(\frac{1}{2} + \kappa \right) - k^2 \psi_{11}(1) - \psi_{11}''(1) = 0 \quad (50)$$

$$\psi_{11}(0) = 0 \quad (51)$$

$$\begin{aligned} k^2 \kappa \psi_{11}(0) - 2\psi_{11}'(0) + \kappa \psi_{11}''(0) \\ + \kappa(1 - \eta_{11}) + k^2 \kappa^2 = 0 \quad (52) \end{aligned}$$

境界条件 (35) を $O(A)$ のオーダーで整理するためには p^* に対しても摂動展開を導入する必要がある. p^* も次のように展開されるはずである.

$$p^* = p_0^*(\chi) + Ae^{\Omega t} p_{11}^*(\chi) E + \text{c.c.}, \quad (53)$$

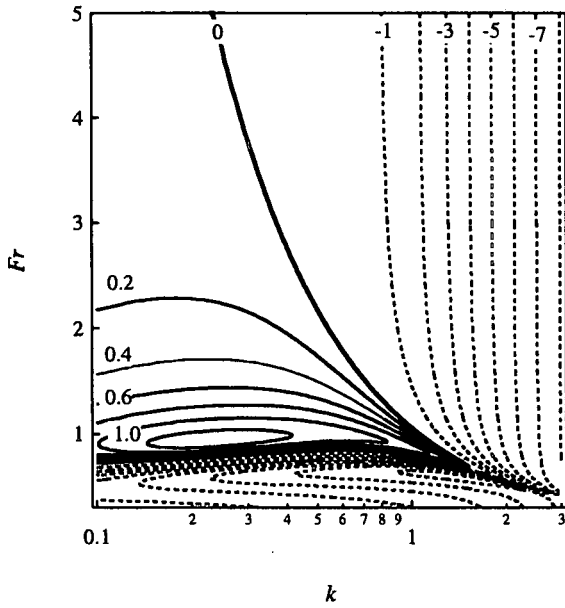


図-4 線形増幅率 Ω のコンター図. $\kappa = 0.1$, $\gamma = 2$, $\theta = 0.3$.
太実線は中立曲線を表している。実線および破線はそれぞれ正および負の増幅率を表している。

式(53)を式(35)に代入すると $O(A)$ について次式が得られる。

$$p_{11}^*(1) = -ik\epsilon^2 \left[(1 - \eta_{11})(1 + 2\kappa) - 2\psi_{11}'(1) \right] \quad (54)$$

また、式(53)を式(27)に代入すると、 $O(A^0)$ について次式が得られる。

$$p_0^*(\chi) = -\frac{1}{\sigma} \quad (55)$$

式(53)および式(55)を式(26)に代入し、 $O(A)$ について整理すると、 $\chi = 1$ について次式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{ik\eta_{11}}{\sigma} + ikp_{11}^*(1) \\ & + \frac{i}{4}(1 + 2\kappa) \left[(1 - \eta_{11})(1 + 2\kappa) - 2\psi_{11}'(1) \right] \\ & + \epsilon^2 \left\{ \frac{1}{2}(1 - \eta_{11}) \left[6 + k^2(1 + 2\kappa) \right] \right. \\ & \quad \left. - k^2\psi_{11}'(1) + \psi_{11}^{(3)}(1) \right\} = 0 \quad (56) \end{aligned}$$

式(56)を用いると、境界条件(54)中の $p_{11}^*(1)$ を消去できる。

河床高さの時間変化式(30)は $O(A)$ について次のように表される。

$$\begin{aligned} \Omega - i\omega &= \gamma(1 - \theta)^{\gamma-1} \left[2(\eta_{11} - 1) \right. \\ & \quad \left. + k^2\kappa + k^2\psi_{11}(0) + \psi_{11}''(0) \right] \quad (57) \end{aligned}$$

境界条件(49)–(52)および(54)より、摂動解(48)中の係数 a_{11} , b_{11} , c_{11} , d_{11} および η_{11} が決定され、式(57)より線形増幅率 Ω の値が求められる。

図-4に式(57)より求められた増幅率 Ω のコンタ図を示す。図は $\kappa = 0.1$ とした場合の結果である。また、 $\gamma = 2$ および $\theta = 0.3$ とした。太実線が中立曲線を示し、その内側の領域において増幅率が正の値をとっていることがわかる。従って、この領域の擾乱が侵食初期において発生することになる。次節では、発生した微小擾乱が有限振幅にいたる段階を説明するため、振幅展開法を用いた弱非線形解析を行う。

5. 弱非線形安定解析

5.1 摂動展開

各変数を基準状態における部分と基準状態からの変動部分に分けて次のように展開する。

$$\psi(\chi) = \psi_0(\chi) + \hat{\psi}(\chi), \quad (58a)$$

$$\eta = 1 + \hat{\eta}, \quad h = \hat{h} \quad (58b, c)$$

式(29)を座標変換した後、式(58)を代入すると摂動部分について次式が得られる。

$$L\hat{\psi} + J\hat{h} + G\hat{\eta} = I(\hat{\psi}, \hat{\eta}, \hat{h}) \quad (59)$$

ここで上式において右辺は非線形項から現われる項である。また、 L および J , G はそれぞれ次式で表される。

$$L = U_0 \frac{\partial}{\partial \xi} \nabla^2 - U_0'' \frac{\partial}{\partial \xi} - \epsilon^2 \nabla^2 \nabla^2 \quad (60)$$

$$\begin{aligned} J &= U_0^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ (1 - \chi) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2U_0 U_0' \right\} \\ & - \epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left\{ (1 - \chi) \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2U_0'' \right) + 4U_0' \right\} \quad (61) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= U_0^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\chi \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2U_0 U_0' \right) \\ & - \epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\chi \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2U_0' \chi - 4U_0' \right) \quad (62) \end{aligned}$$

ここで χ は前述のように χ による全微分を表している。各変動成分をさらに次のように展開する。

$$\begin{aligned} (\hat{\psi}(\chi), \hat{\eta}, \hat{h}) &= (\hat{\psi}_1(\chi), \hat{\eta}_1, \hat{h}_1) \\ & + (\hat{\psi}_2(\chi), \hat{\eta}_2, \hat{h}_2) + (\hat{\psi}_3(\chi), \hat{\eta}_3, \hat{h}_3) \quad (63) \end{aligned}$$

ここで下付添字 1, 2 および 3 はそれぞれ $O(|A|)$, $O(|A|^2)$ および $O(|A|^3)$ の項を表している。

振幅の時間微分は前述のように次式で表される。

$$\frac{dA}{dt} = \alpha_0 A + \alpha_1 |A|^2 A \quad (64)$$

このとき、河床高さの時間微分(式(30)の左辺)は次のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} &= \frac{dA}{dt} \frac{\partial h}{\partial A} \\ &= \alpha_0 A \hat{h}_{1,A} + \text{c.c.} + \alpha_0 A \hat{h}_{2,A} + \text{c.c.} \\ & + \alpha_0 A \hat{h}_{3,A} + \text{c.c.} + \alpha_1 |A|^2 A \hat{h}_{1,A} + \text{c.c.} + \dots \quad (65) \end{aligned}$$

ここで、下付きの ${}_A$ は A による偏微分を表す。

5.2 $O(|A|)$ の解

式 (63) を式 (59) に代入すると $O(|A|)$ について次式が得られる。

$$L\hat{\psi}_1 + J\hat{h}_1 + G\hat{\eta}_1 = 0 \quad (66)$$

上式の解は次のような形で得られる。

$$\hat{\psi}_1 = A\psi_{11}(\chi)E + \text{c.c.}, \quad (67a)$$

$$\hat{\eta}_1 = A\eta_{11}E + \text{c.c.}, \quad \hat{h}_1 = Ah_{11}E + \text{c.c.} \quad (67b, c)$$

ここで、前述のとおり $E = \exp[i(k\xi - \omega t)]$ である。式 (67) を (66) に代入すると $O(A)$ について次式を得る。

$$L_1\psi_{11} + J_1h_{11} + G_1\eta_{11} = 0 \quad (68)$$

ここで L_n , J_n および G_n はそれぞれ次式で表される。

$$L_n = ink[U_0S_n - U_0''] - \epsilon^2 S_n^2 \quad (69)$$

$$J_n = ink[-n^2k^2(1-\chi)U_0' - 2U_0U_0'] + \epsilon^2 n^2k^2[(-n^2k^2U_0 + 2U_0'')(1-\chi) - 4U_0'] \quad (70)$$

$$G_n = ink[-n^2k^2U_0^2\chi + 2U_0U_0'] + \epsilon^2 n^2k^2[(-n^2k^2U_0 + 2U_0'')\chi + 4U_0'] \quad (71)$$

ここで S_n は次式を表す。

$$S_n = \frac{d^2}{d\chi^2} - n^2k^2 \quad (72)$$

振幅展開法では、後述するように摂動の振幅の定義を明確にするために以下の条件が与えられる。

$$h_{11} = 1 \quad (73)$$

上式を導入すると、式 (68) は式 (47) に等しくなり、この摂動方程式の解は既に前節で求められている。境界条件 (34)–(38) および河床高の時間変化式 (30) も $O(A)$ について同様に整理される。このとき、式 (64) の右辺第一項の係数 α_0 は線形安定解析で求めた線形増幅率 Ω に等しくなる。

5.3 $O(|A|^2)$ の解

式 (63) を式 (59) に代入すると $O(|A|^2)$ における摂動方程式は次のように得られる。

$$L\hat{\psi}_2 + J\hat{h}_2 + G\hat{\eta}_2 = A^2E^2I_{22}(\psi_{11}, \eta_{11}, h_{11}) + \text{c.c.} + AA^*I_{20}(\psi_{11}, \psi_{11}^*, \eta_{11}, \eta_{11}^*, h_{11}, h_{11}^*) \quad (74)$$

ここで上付きの $*$ はその複素共役を表す。 I_{22} および I_{20} は $O(|A|)$ の解 (つまり $\hat{\psi}_1$, $\hat{\eta}_1$ および $\hat{h}_1$) の積に

よって現われる非線型項であり、上の摂動方程式において非同次項を成している。また、下付きの二つの数字は、それぞれ A の次数および E の次数を表し、この添字の表記は以降も同様とする。式 (74) の非同次項には E^2 および E^0 を因子に持つ項が現われる。このため同次解は E^2 および E^0 を因子に持つ項で構成されることになり、次のような形で表される。

$$\hat{\psi}_2 = A^2\psi_{22}(\chi)E^2 + \text{c.c.} + AA^*\psi_{20}(\chi), \quad (75a)$$

$$\hat{\eta}_2 = A^2\eta_{22}E^2 + \text{c.c.} + AA^*\eta_{20}, \quad (75b)$$

$$\hat{h}_2 = A^2h_{22}E^2 + \text{c.c.} + AA^*h_{20} \quad (75c)$$

式 (75) を式 (74) に代入すると、 E^2 および E^0 を因子に持つ項についてそれぞれ次式が得られる。

$$L_2\psi_{22} + J_2h_{22} + G_2\eta_{22} = I_{22}(\psi_{11}, \eta_{11}, h_{11}) \quad (76)$$

$$L_0\psi_{20} + J_0h_{20} + G_0\eta_{20} = I_{20}(\psi_{11}, \psi_{11}^*, \eta_{11}, \eta_{11}^*, h_{11}, h_{11}^*) \quad (77)$$

このとき摂動解 ψ_{22} および ψ_{20} は次のように求められる。

$$\begin{aligned} \psi_{22}(\chi) = & a_{22}e^{-\sqrt{4k^2-\beta^2}\chi} + b_{22}e^{\sqrt{4k^2-\beta^2}\chi} \\ & + c_{22}\exp\left[-\sqrt{2ik\kappa}\frac{\chi}{\epsilon}\right] \\ & + d_{22}\exp\left[-\sqrt{2ik\left(\kappa+\frac{1}{2}\right)}\frac{1-\chi}{\epsilon}\right] \\ & - \eta_{22}\beta^{-2}\chi\cos[\beta(1-\chi)] \\ & - h_{22}\beta^{-2}(1-\chi)\cos[\beta(1-\chi)] \\ & + f_{22}(\psi_{11}, h_{11}, \eta_{11}) \end{aligned} \quad (78)$$

$$\begin{aligned} \psi_{20}(\chi) = & \frac{\eta_{20}}{2}\chi^3 + a_{20}\chi^2 + b_{20}\chi \\ & + f_{20}(\psi_{11}, \psi_{11}^*, \eta_{11}, \eta_{11}^*, h_{11}, h_{11}^*) \end{aligned} \quad (79)$$

ここで f_{22} および f_{20} はそれぞれ I_{22} および I_{20} に対応する非同次解である。

$O(|A|)$ の場合と同様に、境界条件 (34)–(38) を $O(|A|^2)$ で整理すると、 E^2 および E^0 を因子に持つ項についてそれぞれ式 (76) および式 (77) に対応する境界条件が得られる。

河床高の時間変化式 (30) を $O(|A|^2)$ について整理すると、 E^2 を因子に持つ項について次式が得られる。

$$\begin{aligned} 2h_{22}(\alpha_0 - i\omega) = & \gamma(1-\theta)^{\gamma-1}\left[2(\eta_{22} - h_{22})\right. \\ & \left.+ 4k^2\kappa h_{22} + 4k^2\psi_{22}(0) + \psi_{22}''(0)\right] \\ & + q_{22}(\psi_{11}(0), h_{11}, \eta_{11}) \end{aligned} \quad (80)$$

ここで q_{22} は非線型項を表している。また、 E^0 を因子に持つ項について整理すると、 h_{20} に関する式が導かれ

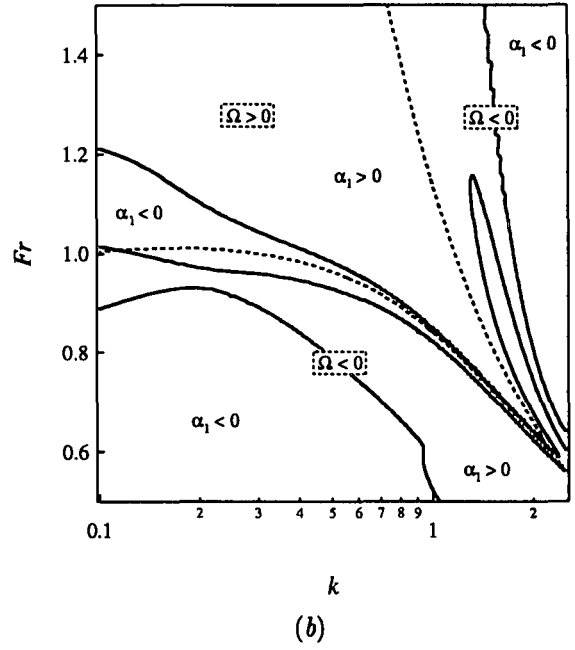
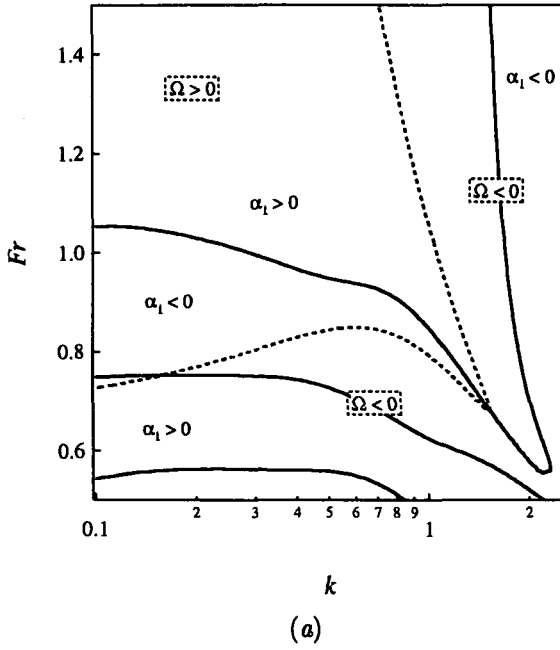


図-5 線形増幅率 Ω およびランダウ定数 α_1 のコンター図。(a) $\kappa = 0.1, \gamma = 2.0, \theta = 0.3$, (b) $\kappa = 0.8, \gamma = 2.0, \theta = 0.3$, 破線は中立曲線を表し、実線はランダウ定数 α_1 がゼロの線を表している。

る。ここで h_{20} は平均河床高の変動を表すものである。つまり基準状態における平均河床高の低下速度が基本波の相互作用によって修正されることになる。従って、座標変換式 (43) も修正される必要があるが、 h_0 と同様に $h_{20} = 0$ としても問題の無いことがわかる。

式 (78) および (79) 中の各係数 $a_{22}, b_{22}, c_{22}, d_{22}, a_{20}, b_{20}, \eta_{22}, \eta_{20}$ および h_{22} は $O(|A|^2)$ について整理した境界条件および式 (80) によって決定される。

5.4 $O(|A|^3)$ の解

式 (63) を式 (59) に代入すると $O(|A|^3)$ についての摂動方程式は次のように得られる。

$$\begin{aligned} L\hat{\psi}_3 + J\hat{h}_3 + G\hat{\eta}_3 \\ = A^3 E^3 I_{33}(\psi_{11}, \eta_{11}, h_{11}, \psi_{22}, \eta_{22}, h_{22}) + \text{c.c.} \\ + A^2 A^* E I_{31}(\psi_{11}, \psi_{11}^*, \eta_{11}, \eta_{11}^*, h_{11}, h_{11}^*, \\ \psi_{22}, \eta_{22}, h_{22}, \psi_{20}, \eta_{20}, h_{20}) + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (81)$$

ここで I_{33} および I_{31} は $O(|A|)$ および $O(|A|^2)$ の解の積によって現われる非線型項であり、上の摂動方程式において非同次項を成している。式 (81) の非同次項には E^3 および E を因子に持つ項が現われる。このため同次解は E^3 および E を因子に持つ項で構成されることになり、次のような形で表される。

$$\hat{\psi}_3 = A^3 \psi_{33}(\chi) E^3 + \text{c.c.} + A^2 A^* \psi_{31}(\chi) E + \text{c.c.}, \quad (82a)$$

$$\hat{\eta}_3 = A^3 \eta_{33} E^3 + \text{c.c.} + A^2 A^* \eta_{31} E + \text{c.c.}, \quad (82b)$$

$$\hat{h}_3 = A^3 h_{33} E^3 + \text{c.c.} + A^2 A^* h_{31} E + \text{c.c.} \quad (82c)$$

式 (82) を式 (81) に代入すると、 E^3 および E を因子に持つ項についてそれぞれ次式が得られる。

$$\begin{aligned} L_3 \psi_{33} + J_3 h_{33} + G_3 \eta_{33} \\ = I_{33}(\psi_{11}, \eta_{11}, h_{11}, \psi_{22}, \eta_{22}, h_{22}) \end{aligned} \quad (83)$$

$$\begin{aligned} L_1 \psi_{31} + J_1 h_{31} + G_1 \eta_{31} \\ = I_{31}(\psi_{11}, \psi_{11}^*, \eta_{11}, \eta_{11}^*, h_{11}, h_{11}^*, \\ \psi_{22}, \eta_{22}, h_{22}, \psi_{20}, \eta_{20}, h_{20}) \end{aligned} \quad (84)$$

式 (84) において、摂動解 ψ_{31} は次式のように求められる。

$$\begin{aligned} \psi_{31}(\chi) = & a_{31} e^{-\sqrt{k^2 - \beta^2} \chi} + b_{31} e^{\sqrt{k^2 - \beta^2} \chi} \\ & + c_{31} \exp \left[-\sqrt{i k \kappa} \frac{\chi}{\epsilon} \right] \\ & + d_{31} \exp \left[-\sqrt{i k \left(\kappa + \frac{1}{2} \right)} \frac{1 - \chi}{\epsilon} \right] \\ & - \eta_{31} \beta^{-2} \chi \cos [\beta (1 - \chi)] \\ & - h_{31} \beta^{-2} (1 - \chi) \cos [\beta (1 - \chi)] \\ & + f_{31}(\psi_{11}, \psi_{11}^*, \eta_{11}, \eta_{11}^*, h_{11}, h_{11}^*, \\ & \psi_{22}, \eta_{22}, h_{22}, \psi_{20}, \eta_{20}, h_{20}) \end{aligned} \quad (85)$$

ここで f_{31} は I_{31} に対応する非同次解である。

境界条件式 (34)–(38) を $O(|A|^3)$ で整理すると、 E^3 および E を因子に持つ項についてそれぞれ式 (83) および式 (84) に対応する境界条件が得られる。河床高さ

の時間変化式 (30) を $O(|A|^3)$ について整理すると、 E を因子に持つ項について次式が得られる。

$$\begin{aligned} & 3h_{31}(\alpha_0 - i\omega) + h_{11}\alpha_1 \\ &= \gamma(1 - \theta)^{\gamma-1} \left[2(\eta_{31} - h_{31}) \right. \\ & \quad \left. + k^2 \kappa h_{31} + k^2 \psi_{31}(0) + \psi_{31}''(0) \right] \\ & + q_{31}(\psi_{11}(0), \psi_{11}^*(0), h_{11}, h_{11}^*, \eta_{11}, \eta_{11}^*, \\ & \quad \psi_{22}(0), h_{22}, \eta_{22}, \psi_{20}(0), h_{20}, \eta_{20}) \quad (86) \end{aligned}$$

ここで q_{31} は E を因子に持つ非線型項を表す。

式 (85) 中の各係数 a_{31} , b_{31} , c_{31} , d_{31} , η_{31} および h_{31} は、 $O(|A|^3)$ について整理した境界条件より求められることになるが、このとき、求められるべき係数の個数に対して条件式の数が一つ足りないため、それらを決定することができない。振幅展開法では、摂動の振幅の定義を明確にすることによって、もう一つの条件が与えられる。本研究では、河床面に与えられた次のような振幅 A の基本擾乱を定義する。

$$h = AE + c.c. \quad (87)$$

このため、河床面において E を因子に持つ摂動の振幅が A であることが条件となり、前述の式 (73) および次式が与えられる。

$$h_{31} = 0 \quad (88)$$

上式および境界条件を用い、式 (85) 中の各係数が決定されると、式 (86) よりランダウ定数 α_1 の値が求められる。

6. 結果および考察

図-5 に式 (86) より求められるランダウ定数 α_1 のコンタ図を示す。実線が $\alpha_1 = 0$ を示し、図には α_1 の正負の領域を示した。また、線形安定解析より求められた中立曲線を破線で表し、線形増幅率の正負も合わせて表示している。図-5(a) および (b) にはそれぞれ $\kappa = 0.1$ および $\kappa = 0.8$ の場合を示している。計算には、 $\gamma = 2$ および $\theta = 0.3$ の値を用いた。

図を見ると、(a) および (b) いずれの場合も $k = 2-3$, $Fr = 0.4-0.5$ 付近においてステップ発生臨界フルード数が存在していることがわかる。この臨界値から左方向および上方向に延びる 2 本の中立曲線 (図中破線) がそれぞれ存在している。臨界値より左方向に延びている中立曲線上の一部で α_1 が負の値をとることがわかる。これは、この領域における擾乱は非線型発達段階においてその増幅が抑制されることを示す。しかし、その他のほとんどの領域において α_1 の値が正となっており、この領域における擾乱は非線型発達段階においても増幅が抑制されず、発達し続けることになる。図-1 や図-2 に示されているように、オーバーハングが生じたり連続した滝状の流路を形成したりするのは、侵食性のステップのこのような性質に起因しているものと考えられる。

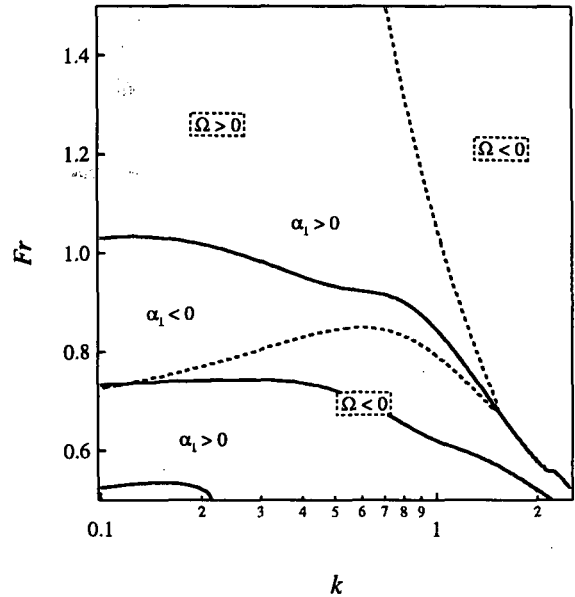


図-6 線形増幅率 Ω およびランダウ定数 α_1 のコンター図。
 $\kappa = 0.1$, $\gamma = 1.5$, $\theta = 0.3$ 。破線および実線は図-5 と同様である。

α_1 が負となる領域に存在するステップよりも、 α_1 が正となる領域に存在するステップの方が卓越して発達するため、実際に現れるステップ形状はこの α_1 が正の領域に位置すると考えられる。著者らが線形安定解析の結果と実験結果を比較したところ⁴⁾、実際に形成されたステップの波数はいずれも卓越波数より大きな値を示した。このことは、本解析の結果に対応している。

次に、 γ の値について検討してみる。 $\gamma = 1.5$, $\kappa = 0.1$, $\theta = 0.3$ とした場合の Ω および α_1 のコンタ図を図-6 に示す。線形増幅率 Ω に関しては式 (57) から明らかなように、 γ の値によって絶対値は変化するものの、 $\Omega = 0$ を示す中立曲線は γ とは無関係に求められる。また、図-5(a) ($\gamma = 2.0$) と図-6 ($\gamma = 1.5$) を比べると、波数の大きい領域において、 $\gamma = 1.5$ の場合の方が $\gamma = 2.0$ の場合よりも広範囲にわたってランダウ定数 α_1 の値が正となっている。しかし、 γ の値によって α_1 が異なる正負を示すのは、線形不安定性を示す領域から離れた一部の領域だけであり、ステップの非線型不安定性はそれほど影響を受けていないことがわかる。

本解析によって、侵食初期に発生した微小擾乱が非線型発達段階においても増幅が抑制されずに発達し続けることを説明できるが、発達したステップの平衡振幅を求めることはできない。しかし、ある程度振幅が大きくなると、ステップの発達過程は Parker³⁾らの提案する浅水流モデルで説明されるような現象へ移行する。このとき、ステップの平衡形状は Parker³⁾らの理論によって説明されることになる。

7. 結論

本研究では、ステップの非線型発達段階を理論的に説明するため、二次元レイノルズ方程式を用いた弱非

線型安定解析を行い、非線型振幅方程式の第一ランダウ定数を導いた。その結果、線形不安定性によって発生した微小擾乱は非線型発達段階においても、増幅が抑制されずに発達し続けることが示された。ただし、ステップが発達を続け、大きく成長すると、本理論で記述することは不可能となる。そのようなステップはやはり永遠に発達することはできず、Parker³⁾らの提案する浅水流モデルで説明されるような有限な振幅を持つにいたると考えられる。

参考文献

- 1) 池田 宏, 地形を見る目, 古今書院, 152p, 2001.
- 2) 芦田和男, 澤井健二, 裸地斜面における流路の形成過程に関する研究(3), 京都大学防災研究所年報, 第20号, B-2, 1977.
- 3) Parker, G. and Izumi, N., Purely erosional cyclic and solitary steps on a cohesive bed, *J. Fluid Mech.*, Vol. 419, 203-238, 2000.
- 4) 山口里実, 泉 典洋, 侵食性河床におけるステップ発生の線形安定性理論, 水工学論文集, 第45巻, pp.751-756, 2001.
- 5) Howard, A.D., A detachment-limited model of drainage-basin evolution, *Wat. Resources Res.*, 30, 2261-2285, 1994.
- 6) 底泥の飛び出し量に関する研究, 水理講演会論文集, 第26巻, pp.141-146, 1982.
- 7) Johanesen, C., Larsen, T. and Petersen, O., Experiments on the erosion of mud from the Danish Wadden Sea, *Proceedings INTERCOH '94, 4th Nearshore and Estuarine Cohesive Sediment Transport Conference*, Wallingford, England, Paper 24, 10p, 1994.
- 8) Forester, G.R., Modeling the erosion process, *Hydrologic modeling of small watersheds*, C.T. Hahn, H.P. Johnson and D. L. Brakensiek eds., St. Joseph, Michigan: American Society of Agricultural Engineers, 297-382, 1982.
- 9) Forester, G.R. and L.J. Lane, Erosion by concentrated flow in farm fields, *Proceedings of the D.B. Simons symposium on erosion and sedimentation*, Fort Collins, Colorado: Colorado State University, 9.65-9.82, 1983.
- 10) 藤村 薫, 水島二郎, 後藤金英, 二次元平行流に対する非線型安定性解析, *ながれ*, 4, pp.213-223, 1985.
- 11) Engelund, F., Instability of erodible beds, *J. Fluid Mech.*, Vol. 42, 225-244, 1971.
- 12) Fredsøe, J., On the development of dunes in erodible channels, *J. Fluid Mech.*, Vol. 64, 1-16, 1974.

(2002年4月19日受付)