

成層弾性流体波動場の時間領域の Green 関数の スペクトル表現について

Spectral Representation of Green's function in the time domain for Acoustic Layered Half Space

栗田圭一*・東平光生**

Keiiti AWATA and Terumi TOUHEI

*学生会員 東京理科大学大学院 理工学研究科修士課程

**正会員 工博 東京理科大学助教授 理工学部土木工学科 (〒278-8510 千葉県野田市山崎 2641)

Green's function in the time domain for 3-D layered acoustic half space is derived here. The Green's function is composed by the time-wavenumber domain solution based on discrete wavenumber method. The time-wavenumber domain solution is obtained from the Fourier inverse transform for the frequency-wavenumber domain solution with respect to the time, so that the time-wavenumber domain solutions satisfies the causality condition. The frequency-wavenumber domain solution is expressed in terms of the eigenfunctions for the discrete and continuous spectra. As a result, the present Green's function is completely expressed in terms of the eigenfunctions for the discrete and continuous spectra. Several numerical calculations are carried out to verify the accuracy of the present Green's function.

Key Words : *Green's function, spectral representation, discrete and continuous spectra, layered acoustic half space*

1. はじめに

成層波動場の Green 関数を算出することは、地震応答解析や地下資源探査といった課題の中でも重要な位置付けを占める。これまでに Green 関数計算手法やその応用についての研究が Lamb の問題¹⁾を契機としてさまざまな研究者によって行われてきた²⁾⁻¹⁰⁾。例えば、Green 関数を表現する波数積分を離散化波数で計算する研究²⁻⁶⁾、正規モード合成法で Green 関数を計算する研究⁷⁾、リーキングモードの合成によって Green 関数を計算する方法⁸⁾⁻¹⁰⁾などである。また、著者の一人は、成層弾性流体波動場ならびに成層弾性波動場の Green 関数のスペクトル表現とその散乱問題への応用を検討してきた¹¹⁻¹³⁾、そこでの研究目的は、Green 関数の新たな計算手法の展開というよりもむしろ、Green 関数を構成するところの留数項と分岐線積分の数学的な共通の枠組みを固有値問題の視点から明らかにすることであった。また、散乱問題への適用においては、散乱波に影響する留数項と分岐線積分項の影響を統一的に定量化することであった。本研究は、著者らのこれまでの研究に引き続き、成層波動場の時間領域での Green 関数をスペクトル分解の視点で検討したものである。ここでの定式化の概略を述べると、まず時間領域での Green 関数を離散化波数表現することが出発点である。この出発点は第2著者の示した discrete wavenumber and normal mode method¹⁴⁾¹⁵⁾の延長上にあるものと言える。ただし、discrete wavenumber and normal mode method

は離散化波数法で重ね合わせる時間-波数領域解を剛基盤上の正規モード合成で近似するのに対し、ここでは時間-波数領域解を正規モードと連続スペクトルの固有関数で表現することを目指している。この定式化のプロセスによって、時間領域での Green 関数の表現に現れる留数項と分岐線積分の数学的な共通の枠組みについて議論が可能となる。なお、本論文では扱う波動場は簡単のため成層弾性流体とする。

2. 基礎方程式および基本仮定

議論の出発点を明確にするために、はじめに基礎方程式および基本仮定を示す。図-1に成層弾性流体波動場を示す。ここでは円筒座標系 (r, θ, z) を用い、鉛直座標 z は、鉛直下向きに正の方向をとる。ここでは、層境界の鉛直座標は z_j ($j = 1, 2, \dots$) と添え字をつけて表し、自由表面には z_1 を用いる。図中、 ρ は質量密度、 α は音波速度であり層ごとに一定な正の有界な関数である。この意味で ρ および α は $\rho(z)$ 、 $\alpha(z)$ と表記されることもあるし、簡単のため layer index や z が省略されることもある。また、layer index のうち、 l は半無限層を表すために用いる。

流体の微小振幅の運動は、対流項を無視した Euler 方程式で記述される。

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\nabla p(\mathbf{r}, t) \quad (1)$$

ここに、 $\mathbf{v}$ は流体粒子の速度ベクトル、 $\mathbf{r}$ は空間座標、

t は時間, ∇ は勾配演算子, p は圧力を表す. 流体粒子の運動が非回転の場合には, 媒質に変位ポテンシャルを定義することができ, 流体粒子速度と次の関係で結ばれる.

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla u(\mathbf{r}, t) \quad (2)$$

ここに, u は変位ポテンシャルを示す. 式(1)と(2)より, 変位ポテンシャルと圧力の関係が導かれる.

$$p(\mathbf{r}, t) = -\rho \frac{\partial^2 u(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} \quad (3)$$

この変位ポテンシャルは次の波動方程式を満足する.

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 u(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (4)$$

ここに, ∇^2 はラプラシアンを示す.

さて, この波動場で Green 関数を定義しよう. Green 関数を計算するためのソース点を図-1に示す座標系で $\mathbf{r}' = (0, 0, z')$ とする. また, 衝撃を与える時刻を $t = 0$ とすれば, 変位ポテンシャルを表す Green 関数の定義式は次式となる.

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = -\frac{1}{2\pi r} \delta(r) \delta(z - z') \delta(t) \quad (5)$$

ここに, $\mathbf{r}$ は観測点, r はソース点と観測点の水平距離, z は観測点の鉛直座標, $\delta(\cdot)$ は Dirac のデルタ関数を示す. 式(5)ではソース点を z 軸上に置いたことで, Green 関数の θ 成分の依存性は無くなっていることに注意する. したがって以下簡単のため, Green 関数は $G(r, z, z'; t)$ と表記し議論を進める.

波動場は層間で鉛直変位の連続と圧力の釣り合いが確保されなければならないことから, Green 関数は次式を満足する.

$$\begin{aligned} \partial_z G(r, z_{j+}, z', t) &= \partial_z G(r, z_{j-}, z', t) \\ \rho(z_{j+}) G(r, z_{j+}, z', t) &= \rho(z_{j-}) G(r, z_{j-}, z', t) \end{aligned} \quad (6)$$

ただし,

$$\begin{aligned} z_{j+} &= z_j + \epsilon \\ z_{j-} &= z_j - \epsilon \end{aligned} \quad (7)$$

であり, ϵ は無限小の正数である. また, Green 関数は自由表面で圧力がゼロとなることから, 次式を満足する.

$$G(r, z_1, z', t) = 0 \quad (8)$$

3. 時間領域での Green 関数の導出

3.1 導出過程のアウトラインおよび必要な変換

式(5)で定義された Green 関数を導出するにあたって, 導出過程のアウトラインを示す. まず Green 関数を離散化波数法で表現する. これは参考文献¹⁵⁾を参照する. すなわち,

$$G(r, z, z', t) = \frac{1}{\pi R^2} \sum_{k_n \in N} \frac{J_0(k_n r)}{(J_1(k_n R))^2} g_n(z, z', t) \quad (9)$$

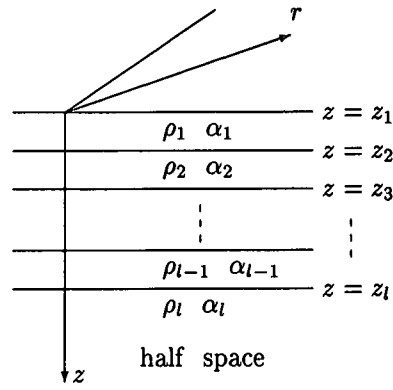


図-1 成層弾性波動場

ここに, R は Green 関数を離散化波数表現するために設定した鏡像点までの水平方向の距離であり, 十分大きな正の値を設定する. これにより, 鏡像点からの波動が到達しない間の有限な time-window で Green 関数の表現は有効なものとなる. また, k_n は離散化波数, N は離散化波数の集合を示す. すなわち,

$$N = \{k_n | J_0(k_n R) = 0, k_n \geq 0\} \quad (10)$$

であり, ここに, J_0 は 0 次の第 1 種 Bessel 関数を示す. 式(9)の J_1 は同様に 1 次の第 1 種 Bessel 関数である. また, $g_n(z, z', t)$ は時間-波数領域の Green 関数で, $G(r, z, z', t)$ とは以下の関係で結ばれる.

$$g_n(z, z', t) = 2\pi \int_0^R r J_0(k_n r) G(r, z, z', t) dr \quad (11)$$

この変換によって $g_n(z, z', t)$ は Klein-Gordon 方程式を満足することになる.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - k_n^2 \right) g_n(z, z', t) = -\delta(z - z') \delta(t) \quad (12)$$

本論文では, $g_n(z, z', t)$ を因果性を満足するように解く. またこの過程でスペクトル分解の視点を導入する. 因果性を確保するための本質的な流れは, 時間に関する Fourier 積分変換を用い, Fourier 逆変換での複素周波数平面での積分路を工夫して $g_n(z, z', t)$ の因果性を確保することにある. この積分経路に対する議論は後述する. $g_n(z, z', t)$ に対する Fourier 積分変換は次のように定義する.

$$\begin{aligned} \hat{g}_n(z, z'; \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g_n(z, z', t) \exp(-i\omega t) dt \\ g_n(z, z', t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}_n(z, z'; \omega) \exp(i\omega t) d\omega \end{aligned} \quad (13)$$

式(13)の Fourier 積分変換によって, 式(12)は次のように変換される.

$$\left(\frac{d}{dz^2} + k_\alpha^2 - k_n^2 \right) \hat{g}_n(z, z'; \omega) = -\delta(z - z') \quad (14)$$

ただし, $k_\alpha = \omega/\alpha$ であり, k_α 層ごとに一定の z' の関数であることに注意する. $\hat{g}_n(z, z'; \omega)$ を解くために, 複

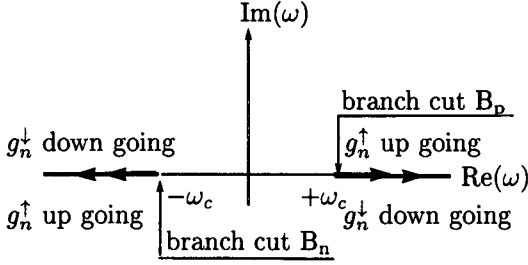


図-2 複素周波数平面における分岐線
および半無限層での波の方向性

素波数平面で $\hat{g}_n(z, z', \omega)$ はどのような branch cut や極を持つかを明らかにする必要がある。ここでは、複素周波数平面での $\hat{g}_n(z, z', \omega)$ の branch cut について述べよう。 $\hat{g}_n(z, z', \omega)$ は半無限層で以下のような表現を持つ。

$$\hat{g}_n(z, z', \omega) = A_l \exp(-\nu_l z), \quad z > z_l \quad (15)$$

ただし、

$$\nu_l = \sqrt{k_n^2 - (\omega/\alpha_l)^2} \quad (16)$$

である。これは、式(14)の解が一般的に次式の形で与えられて半無限層において放射条件を満足するからである。

$$\hat{g}_n(z, z', \omega) = A_j \exp(-\nu_j z) + B_j \exp(\nu_j z) \quad (17)$$

従って、複素周波数平面では Green 関数の放射条件を確保するために

$$\text{Re}(\nu_l) > 0$$

となる必要がある。このための branch cut を図-2 に示す。図中 $\omega_c = k_n \alpha_l$ は分岐点である。表面層での波動関数については branch cut は不要である。このことは伝達マトリックス法で明らかになることであり、ここでの議論は省略する。Branch cut 上の角振動数の集合は次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} B &= B_p \cup B_n \\ B_p &= \{\omega | \omega > k_n \alpha_l\} \\ B_n &= \{\omega | \omega < -k_n \alpha_l\} \end{aligned} \quad (18)$$

ここに、 B_p および B_n は正および負の実軸の branch cut の角振動数を表す。図-2 には、branch cut の上と下で半無限層での波動の進行方向も記述している。波動の進行方向が上向きの場合は↑の添字を下向きの場合は↓の添字を付与した。図-2 に示すように、正の実軸上の branch cut の上側では g_n は半無限層で上昇波、下側では下降波を示す。また、負の実軸上の branch cut の上側では g_n は半無限層で下降波、下側では上昇波を示す。これらは複素周波数平面で $\text{Re}(\nu_l) > 0$ の条件を設定したことの帰結である。

3.2 $\hat{g}_n(z, z'; \omega)$ のスペクトル表現

ここでは式(14)の解 $\hat{g}_n(z, z', \omega)$ をスペクトル表現を求めることを主な目的とする。ただし、ここでの ω は、実数に制限せず、前述の複素周波数平面の値をとるものとする。 $\hat{g}_n(z, z', \omega)$ のスペクトル表現に必要な固有関数を考察するために式(14)に基づき微分演算子 A を

$$A = -\frac{d^2}{dz^2} + k_n^2 \quad (19)$$

を定義し、固有値問題を

$$A\varphi_m(z) = \frac{\omega_m^2}{\alpha^2} \varphi_m(z) \quad (20)$$

を考える。式(19)で考える固有値問題では鉛直座標 z の関数としての α が右辺に入り込み、固有値問題としては特殊な形となっていることに注意する。式(19)で考える固有値はあくまでも ω_m^2 であり、これに対応する固有関数は φ_m とする。また、微分演算子 A の定義域を $\text{dom } A$ で表し

$$\begin{aligned} \text{dom } A &= \{u(z) \in L_2 | D_z u(z) \in L_2, D_z^2 u(z) \in L_2, \\ &B(u(z)) = 0\} \end{aligned} \quad (21)$$

と設定する。ただし、 L_2 は二乗可積分の関数空間を表し、 $D_z = d/dz$ 、 $B(u) = 0$ は u が自由表面および層間の境界条件を満足することを表す。定義域の空間の距離を特徴づける内積は層間のポテンシャルの連続条件を考慮して

$$(u, v) = \int_0^\infty \rho(z) u(z) v(z) dz \quad (22)$$

のように質量密度を積分の中に組入れる。微分演算子 A とその定義域、ならびに内積の設定によって、 A には次の性質があることが示せる。

$$(u(z), Av(z)) = (Au(z), v(z)) \quad u, v \in \text{dom } A \quad (23)$$

$$(u(z), Au(z)) \geq 0 \quad u \in \text{dom } A \quad (24)$$

すなわち、演算子 A は式(23)より対称であること、式(24)より正値であることが示される。したがって、 A に対する固有値は実数で正、すなわち $\omega^2 > 0$ となり結局、微分演算子 A の固有値、すなわち、 $\hat{g}_n(z, z'; \omega)$ の極は実軸にのみ存在することになる。また、 $-\omega_m$ が $\hat{g}_n(z, z'; \omega)$ の極とすれば、 $+\omega_m$ も極となる。また、微分演算子 A の対称性から固有関数の間で直交関係式を確立することができ、固有関数の規格化の条件は次のように設定できる。

$$\int_0^\infty \rho(z) \varphi_n(z) \varphi_m(z) / \alpha(z)^2 dz = \delta_{nm} \quad (25)$$

ここに、 δ_{nm} は Kronecker のデルタである。

また、演算子 A の定義域 $\text{dom } A$ の外ではあるが、branch cut 上の角振動数に対して、固有関数を構成することができる。以下にこの事情について少し述べてみよう。複素周波数平面の branch cut の説明でも述べたように、例えば、正の実軸の branch cut の上側では

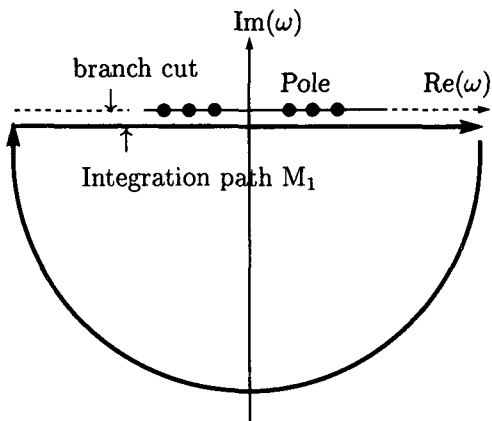


図-3 $t < 0$ での複素周波数平面の積分経路

波動は上昇波，下側では下降波を示す。いまこれらの波動の方向を持つ $\hat{g}_n$ を $\hat{g}_n^\uparrow(z, z'; \omega + i\epsilon)$ および $\hat{g}_n^\downarrow(z, z'; \omega - i\epsilon)$ と表してみる。ただし， $\omega \in B_p$ である。この時，これらの波動関数は式 (14) を満足するから，

$$\Phi_\omega(z) = \hat{g}_n^\uparrow(z, z'; \omega + i\epsilon) - \hat{g}_n^\downarrow(z, z'; \omega - i\epsilon) \quad (26)$$

を定義して $\epsilon \rightarrow 0$ として置くと，

$$A\Phi_\omega(z) = \frac{\omega^2 \Phi_\omega(z)}{\alpha^2} \quad (27)$$

を得る。すなわち $\omega \in B_p$ の角振動数に対して，固有関数が構成できたことになる。ただし，この固有関数は半無限層で

$$\Phi_\omega(z) = a_\omega \sin \hat{\nu}_l z + b_\omega \cos \hat{\nu}_l z \quad (z > z_l) \quad (28)$$

$$\hat{\nu}_l = \frac{1}{\alpha_l^2} \sqrt{\omega^2 - k_n^2 \alpha_l^2} \quad (29)$$

の形の解となるので二乗可積分空間には属さない。この性質を持つ固有関数は $\omega \in B_n$ の角振動数についても同様に構成できる。ここでは， $\omega \in B_p \cup B_n$ の角振動数に対する固有関数を一般的に $\psi_\omega(z)$ と表現する。すなわち，

$$A\psi_\omega(z) = \frac{\omega^2}{\alpha^2} \psi_\omega(z), \quad (\omega \in B_p \cup B_n) \quad (30)$$

とする。この分岐線上の固有関数の規格化について考えてみよう。 $\psi_\omega(z)$ は半無限層 $z > z_l$ で式 (27) の形を持つから $\psi_\omega(z)$ と $\psi_{\omega'}(z)$ の積分をとると，

$$\int_0^\infty \frac{\rho(z) \phi_\omega(z) \phi_{\omega'}(z)}{\alpha^2} dz = \frac{\pi \rho \hat{\nu}_\omega}{2|\omega|} [a_\omega^2 + b_\omega^2] \delta(\omega - \omega') + O(1) \quad (31)$$

となる。ただし， O は Landau の記号であり，ここでは具体的には表面層の影響をあらわす。ところがこの表面層の影響は A の対称性から消すことができる。この事情については著者の一人によって参考文献¹¹⁾に示されているのでここでは省略する。従って，固有関数は半無限層の部分で

$$\frac{\pi \rho \hat{\nu}_\omega}{2|\omega|} [a_\omega^2 + b_\omega^2] = 1 \quad (32)$$

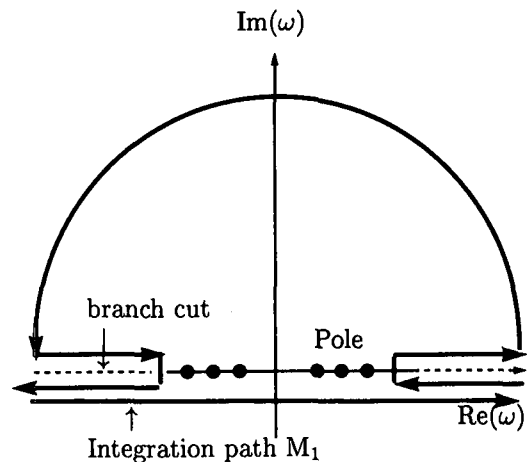


図-4 $t > 0$ での複素周波数平面の積分経路

と係数を規格化すれば次式のように直交関係式を定義することができる。

$$\int_0^\infty \frac{\rho(z) \phi_\omega(z) \phi_{\omega'}(z)}{\alpha^2} dz = \delta(\omega - \omega') \quad (33)$$

ここまで，複素角振動数平面上での固有関数が存在できる角振動数，すなわちスペクトルならびにそこでの固有関数の規格化について述べてきた。次のステップでは，このスペクトルの補集合，すなわちレゾルベント集合での $\hat{g}_n(z, z'; \omega)$ を固有関数で表現することを考える。ここでは，

$$\begin{aligned} \hat{g}(z, z', \omega) &= \sum_{\omega_m \in P} a_m(z') \varphi_m(z) \\ &+ \int_{B_p \cup B_n} b_{\omega'}(z') \psi_{\omega'}(z) d\omega' \end{aligned} \quad (34)$$

として，Fourier 係数 a_m および $b_{\omega'}$ を定める問題を考えてみる。ただし， P は $\hat{g}(z, z', \omega)$ の極を示す角振動数の集合である。式 (14) および固有関数の直交関係式から，これらの Fourier 係数は定まり，結局 $\hat{g}_n(z, z'; \omega)$ は次のように表現されることになる。

$$\begin{aligned} \hat{g}_n(z, z', \omega) &= - \sum_{\omega_m \in P} \frac{\varphi_m(z) \varphi_m(z') \rho(z')}{\omega^2 - \omega_m^2} \\ &- \int_{B_p \cup B_n} \frac{\psi_{\omega'}(z) \psi_{\omega'}(z') \rho(z')}{\omega^2 - \omega'^2} d\omega' \end{aligned} \quad (35)$$

ここでの分岐線すなわち連続スペクトルの積分の方向については，図-2に示している。式 (35) によるレゾルベント集合上の Green 関数の表現から，次の展開が必要となる関係式が次式のように誘導できる。

$$\text{Res}_{\omega=\omega_m} \hat{g}_n(z, z', \omega) = - \frac{1}{2\omega_m} \varphi_m(z) \varphi_m(z') \rho(z') \quad (36)$$

$$\begin{aligned} &\hat{g}_n^\uparrow(z, z', \omega + i\epsilon) - \hat{g}_n^\downarrow(z, z', \omega - i\epsilon) \\ &= \frac{\pi i}{\omega} \psi_\omega(z) \psi_\omega(z') \rho(z') \quad \omega \in B_p \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} &\hat{g}_n^\uparrow(z, z', \omega - i\epsilon) - \hat{g}_n^\downarrow(z, z', \omega + i\epsilon) \\ &= - \frac{\pi i}{\omega} \psi_\omega(z) \psi_\omega(z') \rho(z') \quad \omega \in B_n \end{aligned} \quad (38)$$

3.3 因果性を満足する $g_n(z, z'; t)$ の誘導

成層波動場の時間領域での Green 関数のスペクトル表現に関わる定式化の仕上げとしてここでは、

$$g_n(z, z'; t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}_n(z, z'; \omega) \exp(i\omega t) d\omega$$

の Fourier 逆変換を因果性を満足するように実行する。これまでの議論から、 $\hat{g}_n(z, z'; \omega)$ については、レゾルベント集合上でのスペクトル表現が得られており、これが Fourier 逆変換に用いられる。まず、因果性を確保する Fourier 逆変換の意味について考えてみる。 $g_n(z, z'; t)$ が因果性を満足するということは、

$$g_n(z, z'; t) = 0 \quad (t < 0) \quad (39)$$

が必要である。また、Fourier 逆変換に用いる時間因子は $\exp(i\omega t)$ であるから、 $t < 0$ で式 (34) が実現されるためには、積分路の上側に $\hat{g}_n(z, z'; \omega)$ のスペクトルを見なければならない。実際、 $t < 0$ の場合、 $\exp(i\omega t)$ は複素周波数平面の下半面で収束するから、積分路の下に積分に寄与するものが無ければ下半面に積分経路を付加することで積分はゼロになることがわかる。(図-3 参照)。従って、実軸の下側をとる図-3 に示す積分路を M_1 とする。これまでの議論から M_1 の積分路で式 (34) が実現されることがわかっている。

次に $t > 0$ とする。 M_1 の経路に上半面に示す積分路(図-4 参照)を付加することで $t > 0$ の積分の M_1 に関する積分は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \int_{M_1} \hat{g}_n(z, z'; \omega) \exp(i\omega t) d\omega \\ &= 2\pi i \sum_{\omega_m \in P} \text{Res} (\hat{g}_n(z, z'; \omega) \exp(i\omega t)) \\ &+ \int_{B_p \cup B_n} (\hat{g}_n^{\uparrow}(z, z'; \omega) - \hat{g}_n^{\downarrow}(z, z'; \omega)) \exp(i\omega t) d\omega \end{aligned} \quad (40)$$

さらに、式 (36) ならびに式 (38) を用い、 ω_m が Green 関数の極であれば $-\omega_m$ も極であるという性質によって、 $g_n(z, z'; t)$ は $t > 0$ で次の表現を持つことが分かる。

$$\begin{aligned} g_n(z, z'; t) &= \sum_{\omega_m \in P_p} \frac{\varphi_m(z) \varphi_m(z') \rho(z')}{\omega_m} \sin \omega_m t \\ &+ \int_{\omega \in B_p} \frac{\psi_\omega(z) \psi_\omega(z') \rho(z')}{\omega} \sin \omega t \end{aligned} \quad (41)$$

ここに P_p は正の角振動数の極の集合を表わす。式 (9) に現れた $g_n(z, z', t)$ は式 (40) のスペクトル表現で与えられることになった。式 (9) を以下のように再記しておく。

$$G(r, z, z', t) = \frac{1}{\pi R^2} \sum_{k_n \in N} \frac{J_0(k_n r)}{(J_1(k_n R))^2} g_n(z, z', t) \quad (42)$$

以上より因果性を満足する成層波動場の時間領域での Green 関数が誘導されたことになる。式 (40) より、

Green 関数が $\frac{1}{\omega} \sin \omega t$ の重ね合わせで表現されていることがわかる。この $\frac{1}{\omega} \sin \omega t$ は振動系の単位インパルス応答であるから、ここでの Green 関数はこの単位インパルス応答の重ね合わせで表現されていると理解することもできる。また、本解析での固有関数は伝達マトリクス法でを求める事ができ (40), (41) のように簡潔な形で時間領域での Green 関数を表現できる。

後述の数値計算では、半無限均質弾性流体の波動場をあつかう。ここでは Green 関数のスペクトル表現が Sommerfeld 積分を経由して鏡像法から得られる Green 関数が一致する事を示しておく。この波動場では鏡像法を用いて次のように Green 関数が表現される。ただし、以下では $R_a = \sqrt{r^2 + (z - z')^2}$ は震源と観測点の距離であり、 $R'_a = \sqrt{r^2 + (z + z')^2}$ は鏡像点と観測点との距離を示す。

$$G(r, z, z', t) = \frac{1}{4\pi R_a} \delta(t - \frac{R_a}{\alpha}) - \frac{1}{4\pi R'_a} \delta(t - \frac{R'_a}{\alpha}) \quad (43)$$

式 (42) を Sommerfeld 積分と Fourier 変換を用いて表わすと

$$\begin{aligned} G(r, t) &= \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty k J_0(kr) dk \\ &\int_{-\infty}^\infty \frac{[e^{-\nu|z-z_0|} - e^{-\nu|z+z_0|}]}{\nu} e^{i\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (44)$$

となり、 ω に関する積分経路を変形し次式の固有関数を用いる事でスペクトル表現と一致することになる。

$$\psi_\omega(z) = \sqrt{\frac{2\omega}{\pi\nu}} \sin(\nu z) \quad (45)$$

なお、式 (44) の積分経路の変形の結果がスペクトル表現の結果と一致することを示すためのアウトラインは以下のである。まず、連続スペクトル領域の上昇波ならびに下降波を表す Green 関数を $\hat{g}_n^{\uparrow}(z, z'; \omega)$, $\hat{g}_n^{\downarrow}(z, z'; \omega)$ として次式で与える。

$$\hat{g}_n^{\uparrow}(z, z'; \omega) = \frac{[e^{\nu^\uparrow|z-z_0|} - e^{\nu^\uparrow|z+z_0|}]}{2\nu^\uparrow} \quad (46)$$

$$\hat{g}_n^{\downarrow}(z, z'; \omega) = \frac{[e^{-\nu^\downarrow|z-z_0|} - e^{-\nu^\downarrow|z+z_0|}]}{2\nu^\downarrow} \quad (47)$$

ただし、 $\nu^\uparrow$, $\nu^\downarrow$ は次式で与えられる。

$$\nu^\uparrow = \sqrt{k_n^2 - (\omega/\alpha_1)^2} \quad (48)$$

$$\nu^\downarrow = -\sqrt{k_n^2 - (\omega/\alpha_1)^2} \quad (49)$$

これよりたとえば、

$$\begin{aligned} & \hat{g}_n^{\uparrow}(z, z'; \omega) - \hat{g}_n^{\downarrow}(z, z'; \omega) \\ &= \frac{\pi i}{\omega} \psi_\omega(z) \psi_\omega(z') \rho(z'), \omega \in B_p \end{aligned} \quad (50)$$

となることが示され、スペクトル表現と一致することになる。

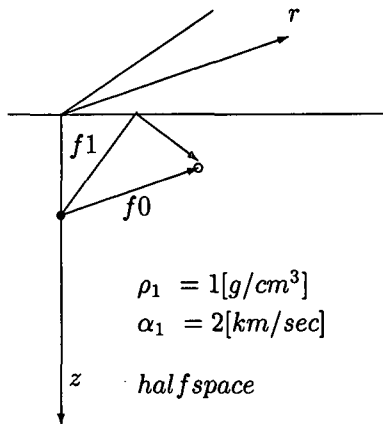


図-5 半無限弾性波動場

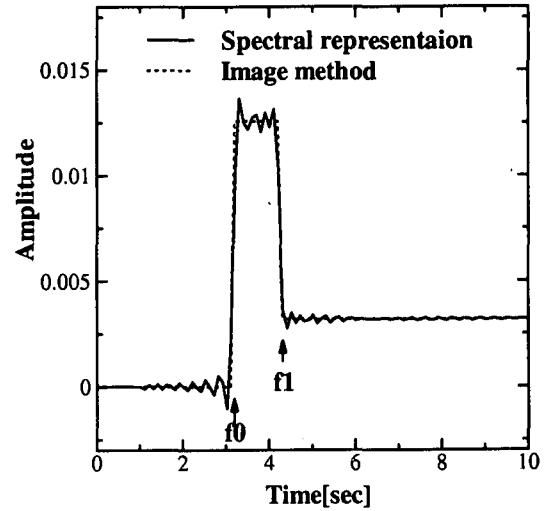


図-7 スペクトル表現の Green 関数 ($r=6\text{km}$)

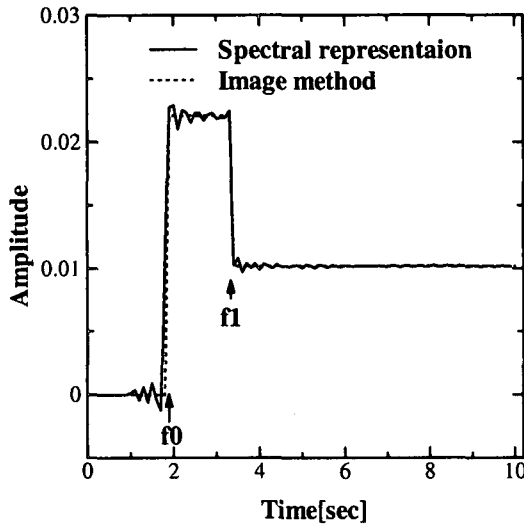


図-6 スペクトル表現の Green 関数 ($r=3\text{km}$)

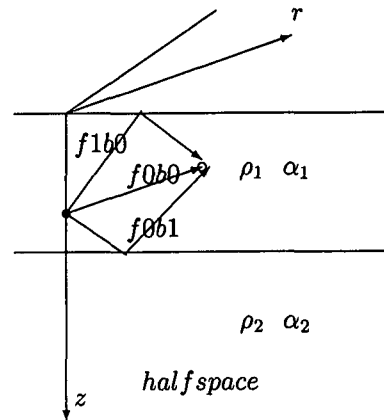


図-8 二層半無限体

4. 数値計算

成層波動場の時間領域での Green 関数のスペクトル表現の妥当性ならびに波動の過渡的な伝播特性を検討するためにここでは、半無限均質弾性流体波動場と2層からなる弾性流体波動場について数値計算を行う。

4.1 半無限弾性流体の応答計算

まず、半無限均質弾性流体波動場の過渡的応答特性を検討する。この波動場では上述のように Green 関数を鏡像法で行うことで、Green 関数のスペクトル表現による結果と比較が可能となる。半無限弾性流体波動場は図5に示めされており、ここでは波速 $\alpha = 2\text{km/sec}$ 、密度 $\rho = 1\text{g/cm}^3$ とする。図-6,7は観測点の座標で $r = 3\text{km}$ と $r = 6\text{km}$ の場合で、観測深さ $z = 2\text{km}$ 、震源深さ $z' = 4\text{km}$ としたときの波動場の応用である。また数値計算に delta 関数が入る事をさけるために震源の source function を unit step function とする。このとき

$$u(r, z, z', t) = \frac{1}{4\pi R_a} H\left(t - \frac{R_a}{\alpha}\right) - \frac{1}{4\pi R'_a} H\left(t - \frac{R'_a}{\alpha}\right) \quad (51)$$

の鏡像解に付加することで次式が与えられる。この応答は図よりも明らかなように直接波 (f_0) と自由表面からの反射波 (f_1) の二つから構成される。source function に unit step function を用いたことから、波動場の応答はそれぞれの波動が到着した後一定の値をとる。こうした応答特性に対し、スペクトル表現はほとんど良い一致をみている。ただし、スペクトル表現の結果は波動の到着前から小さな振動を示している。この小さな振動は離散化波数の重ね合わせの波数を増やしても除去できず、スペクトル表現の結果は波動到達前後で少し誤差が現れている。

4.2 二層半無限弾性流体の応答計算

次に、二層半無限弾性流体の過渡的応答特性を検討する。解析モデルを図-8に示す。ここでは表面層を

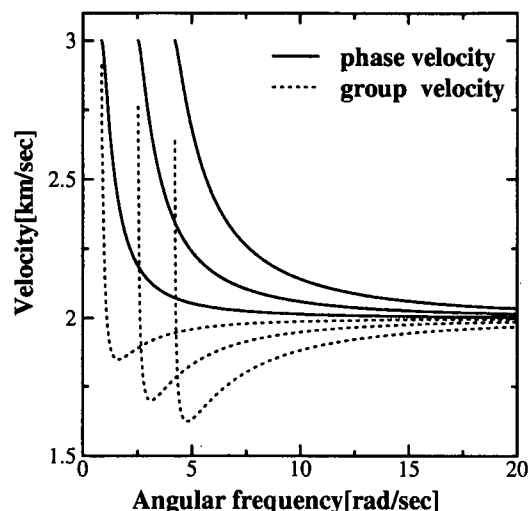


図-9 分散関係図

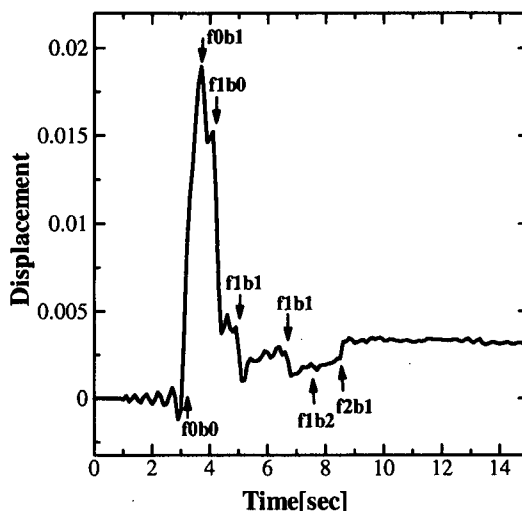


図-11 スペクトル表現の Green 関数 ($r=6\text{km}$)

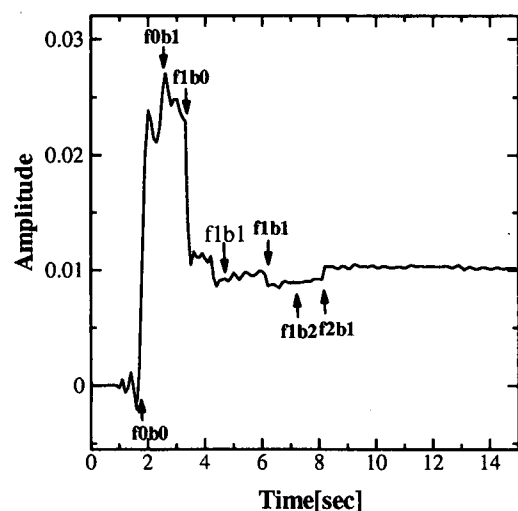


図-10 スペクトル表現の Green 関数 ($r=3\text{km}$)

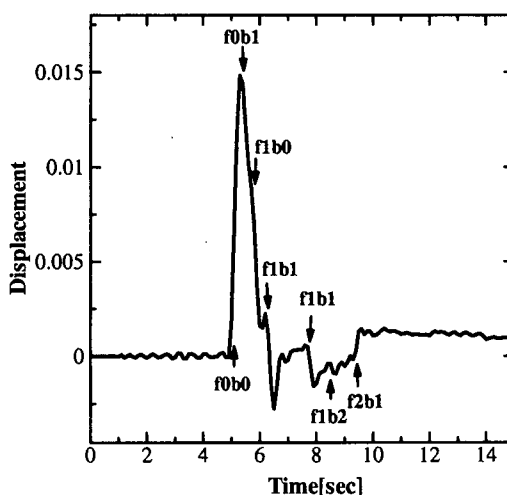


図-12 スペクトル表現の Green 関数 ($r=10\text{km}$)

$\alpha_1 = 2\text{km/sec}$, $\rho_1 = 1\text{g/cm}^3$ として半無限層では $\alpha_2=2\text{km/sec}$, $\rho_2 = 1\text{g/cm}^3$ として表層厚を 5km とする。また、震源を表層間にとり自由表面から深さとする。source function はここでも unit step function とする。二層構造の場合は、自由表面と境界面で反射が繰り返されるため波に分散性が生じて表面波が観測される。そこで図-9 にこの波動場の表面波についての分散性曲線を示す。縦軸は速度、横軸は角振動数を示す。また、図中の実線は位相速度、破線は群速度を示す。図-10 は観測点の座標点を座標を $r = 3\text{km}$, $z = 2\text{km}$, $z' = 4\text{km}$ とした場合の波動場の過渡的応答である。以下の図の説明では時刻 t を構成する波動の到達を f_m, b_n であらわしている。ここでの m は自由表面での反射回数であり、 n は層境界の反射回数である。したがって、 f_0b_0 は震源からの直達波を示す。直達波の f_0b_0 の前にスペクトル理論で計算された応答は微妙な振動をはじめ、直達波の到達時刻で大きく振動が現れる。これについて考えると、半無限層の場合でも同様であるが Fourier bessell 変換を離散化している事や、数値計算によることから

完全に波動到達前の応答をゼロにする事が難しいと考えられる。しかし、数値計算結果において波動の到達が明瞭に現れている事がグラフより解かる。これにより、スペクトル理論による計算結果は波動の到達時刻の評価を精度良く行なえると考えられる。また、図-11, 12 ではそれぞれ $r = 6\text{km}$, $z = 2\text{km}$, $z' = 4\text{km}$ と $r = 10\text{km}$, $z = 2\text{km}$, $z' = 4\text{km}$ の場合の波動場の過渡的応答である。図-10 では $r = 3\text{km}$ で図-11, 12 に比べて震源近傍であり二層構造における表面波の影響が少ないため、過渡的応答が図-6 の半無限層での応答に近いと考えられる。震源から離れるに従い表面波の影響を受けて直達波以後に大きな波の乱れが生じてきている。これは表面層での多重反射による表面波の影響と考えられる。実際に表面波の影響を確かめるために、時刻歴に現れる振幅の大きな振動の周期を測り、この周期と図-9 の分散曲線との比較を行ってみた。これによると、たとえば図-10 で f_0b_0 から f_1b_1 までの間隔はおよそ 2sec ほどであり、これが応答な主要な動きを示している。この動きをおよそ半周期のものとして周

期に換算すればおよそ4secになり、この周期は表面波1次モードのAiry相の周期と一致することになる。このことは図-10のみならず、図-11ならびに、図-12についても成立する。この事実から図-12の時刻歴での大きな揺れはたくさんの多重反射を含みつつも、表面波1次モードであると考えることができる。

5. 結論

本論文は、成層弾性流体波動場の時間領域でのGreen関数のスペクトル表現を誘導するとともに、数値計算によってその有効性を確かめた。時間領域でのGreen関数の誘導プロセスの特徴としては、周波数-波数領域解をスペクトル表現し、因果性を満足するようにFourier逆変換を実行したこと、そして、時間-波数領域解を離散化波数法で重ね合わせたことを挙げることができる。結果的に、Green関数に現れる留数項と分岐線積分の項は固有関数を通して共通の枠組みを表したといえる。また、Green関数の表現で特徴として現れたことはGreen関数は振動系の単位インパルス応答のスペクトル上での和として考えられることである。Green関数の有効性を確かめるための数値計算は半無限均質弾性流体と2層の弾性流体波動場について行った。半無限均質弾性流体の波動場では解析的な解との比較が可能であり、この比較によれば、スペクトル表現されたGreen関数による結果は、ほぼ解析解と一致した。また、2層弾性流体波動場でのスペクトル表現による結果では、波動の多重反射によって時刻歴の特性が説明できることならびに表面波でその特性が説明できる可能性を明らかにすることができた。

参考文献

- 1) Lamb, H.: On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, A203, 1-42, 1904.
- 2) Bouchon, M. and Aki, K.: Discrete wavenumber representation of seismic wave fields. *Bull. Seis. Soc. Am.*, Vol. 67, 259-277, 1977.

- 3) Bouchon, M.: Discrete wavenumber representation of elastic wavefields in three space dimensions, *J. Geophys. Res.*, Vol. 84, pp. 3609-3614, 1979.
- 4) Bouchon, M.: Calculation of complete seismograms for an explosive source in layered medium, *Geophysics*, Vol. 45, pp. 197-203, 1980.
- 5) Bouchon, M.: A simple method to calculate Green's functions for elastic layered media, *Bull. seis. Soc. Am.*, Vol. 71, pp. 959-979, 1981.
- 6) Bouchon, M.: The complete synthesis of seismic crustal phases at regional distances, *J. Geophys. Res.*, Vol. 87, pp. 1735-1741, 1982.
- 7) Harvey, D. J.: Seismogram synthesis using normal mode superposition: the locked mode approximation. *Geophys. J. R. astr. Soc.* Vol. 66, pp. 37-69, 1981.
- 8) Haddon, R. A. W.: Computation of synthetic seismograms in layered earth models using leaky modes, *Bull. Seis. Soc. Am.*, Vol. 74, 1225-1248, 1984.
- 9) Haddon, R. A. W.: Exact evaluation of the response of a layered elastic medium to an explosive point source using leaky modes, *Bull. Seis. Soc. Am.*, Vol. 76, 1755-1775, 1986.
- 10) Haddon, R. A. W.: Response of an oceanic wave guide to an explosive point source using leaky modes, *Bull. Seis. Soc. Am.*, Vol. 77, 1804-1822, 1987.
- 11) Touhei, T.: A scattering problem by means of the spectral representation of Green's function for layered acoustic half space, *Computational Mechanics*, Vol. 25, 477-488, 2000.
- 12) Touhei, T.: Complete eigenfunction expansion form of the Green's function for elastic layered half-space, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 72, 13-38, 2002.
- 13) Touhei, T.: Spectral structures and radiation patterns of the scattering waves in a layered acoustic half space, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 72,
- 14) Touhei, T.: A discrete wavenumber and normal mode superposition method for synthetic seismograms, *Bull. Seis. Soc. Am.*, Vol. 84, 1473-1483, 1994.
- 15) Touhei, T.: Analysis of Layered Solid-Fluid Media Using a Discrete Wavenumber and Normal-Mode Superposition Method *Bull. Seis. Soc. Am.*, Vol. 85, 1718-1729, 1995.
- 16) 今村勤: 物理とGreen関数. 1981

(2002年4月19日受付)