

成層弾性波動場の Green 関数のスペクトル表現に関わる horizontal wavefunction の特異性および 複素 Rayleigh 波モードについて

Singularity of the Horizontal Wavefunction and Properties of Complex Rayleigh Wave Modes for the Spectral Representation of the Green's Function for an Elastic Layered Half-space

東平光生*

Terumi TOUHEI

*正会員 工博 東京理科大学助教授 理工学部土木工学科 (〒278-8510 千葉県野田市山崎2641)

Singularity of the horizontal wavefunction as well as properties of the complex Rayleigh wave modes are investigated for the spectral form of the Green's function for an elastic layered half space. First, the spectral representation of the Green's function is extended into the form for which the field and source points are separated completely to generalize the investigations. The effects of the singularity at $k = 0$ of the horizontal wavefunction are studied next, where k is the wavenumber. A close investigation reveals that the singularity has no effects on the Green's function, that is summarized by Theorem 1. The properties of the complex Rayleigh wave modes are also examined based on the present Green's function. Here, a comprehensive explanation for that the complex Rayleigh waves show standing waves is given, that is summarized by Theorem 2. Finally, a practical method for obtaining the derivative of the spectral form of the Green's function is discussed based on numerical calculations.

Key Words : Green's function, layered half space, Rayleigh wave, Discrete wavenumber integral, spectral representation

1. はじめに

成層波動場の Green 関数の計算手法やその数学的な枠組みを考察することは、地震動の研究や地盤探査技術の開発にとって基本的な課題であると考えられ、これまでに多数の研究がなされてきた¹⁻¹⁰⁾。また、著者もこれまでに成層波動場の Green 関数の固有関数展開表現について考察してきた¹¹⁾⁻¹³⁾。この研究の目的は Green 関数を構成する留数項と分岐線積分項の数学的な共通の枠組みから Green 関数を理解するためばかりでなく、成層波動場での散乱問題において、散乱波の分岐線積分からの寄与と留数からの寄与を統一的に定量化することを行うためであった。

これら一連の研究の中で、成層弾性流体の波動場では、方程式に現れる演算子の対称性から固有関数の直交関係式の確立も容易に行われたばかりでなく、Green 関数に寄与する留数項は正規モードのみであることも示すことができた。さらに、ここでの horizontal wavefunction の複素波数平面での原点 $k = 0$ 周辺での特異性は強いものでなく、分岐線積分も通常の意味で実行でき、総じて Green 関数のスペクトル表現の散乱場への適用¹¹⁾¹³⁾はさほど困難はなかったと言わべきであった。

しかし、成層弾性波動場の Green 関数のスペクトル表現では、周波数-波数領域の方程式の演算子が対

称でない。これにより、固有関数の直交関係式を導くことは困難であり、しかも複素 Rayleigh 極が permissible sheet にも現れることになった。他にも horizontal wavefunction の $k = 0$ での特異性は強く、前論文¹²⁾では Green 関数の固有関数展開表現にこの $k = 0$ の留数項を加えて表現した。一方でこの留数項の数学的、物理的な意味、固有関数との関係、また $k = 0$ の特異点の処理においてスペクトル積分をどのような意味で実行するかなど、さらに詳細な解明が理論的にも必要である。この問題は Green 関数のスペクトル表現を散乱問題に適用する際、表面力をあらわす Green 関数をどのように用いるかに関連して、重要になってくる。

本論文では、これらの成層弾性波動場の Green 関数のスペクトル表現に関わる問題、特に、horizontal wavefunction の特異性の問題、これに付随して、積分方程式で必要となる表面力の Green 関数のスペクトル表現についての問題を考察することを主眼とする。このために、まずソース点と観測点を完全に分離した形式の Green 関数を誘導する。この理由は、ソース点と観測点を分離した形式の Green 関数によって、より一般的で見通しの良い議論が可能になるからである。同様に、この形式の Green 関数によって、成層波動場の複素 Rayleigh 波モード¹²⁾が非伝播性のものとなるメ

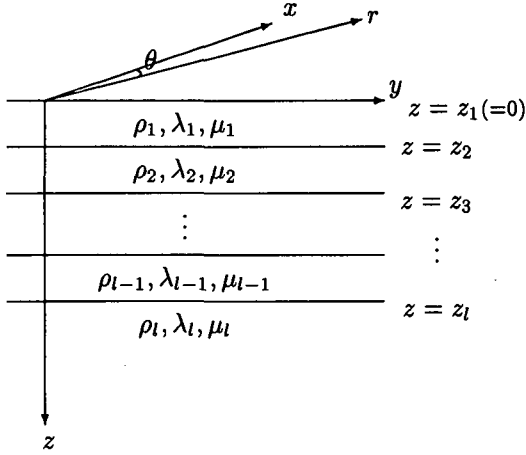


図-1 成層弾性波動場

カニズムがより深く理解できるようになる。ここでは、この議論もあわせて記述した。論文の後半では、数値計算結果を示しながら、スペクトル表現の形式において、震源近傍で精度の良い表面力のGreen関数の算出方法について論じ、Green関数のスペクトル表現の実用化に関する問題についても言及する。

2. ソース点と観測点の座標を分離した形式のGreen関数

2.1 Green関数の直接波数積分表現

図-1に成層弾性波動場を示す。ここに、 ρ は質量密度、 λ および μ はLaméの定数である。これら材料定数にはlayer indexが付けられているが、以降ではこれらは層ごとに一定な深さ方向の正の有界な関数であることを承認したのち、layer indexは省略する。ここでは、円筒座標系 (r, θ, z) を用い、鉛直座標 z は、鉛直下向きに正の方向をとる。また、自由表面の鉛直座標 z_1 は $z_1 = 0$ とする。

ここでソース点の座標を (r', θ', z') とする。波動場のGreen関数は次式で定義できる。

$$\begin{aligned} & ((\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot + \mu\nabla^2 + \rho\omega^2) \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ &= -1 \frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{r} \delta(\theta - \theta') \delta(z - z') \end{aligned} \quad (1)$$

ここに、 λ 、 μ はLaméの定数で層ごとに一定の正の有界な関数である。また、 ω は角振動数、 $\mathbf{G}$ はGreen関数、 $\mathbf{r}$ および $\mathbf{r}'$ は観測点とソース点で

$$\mathbf{r} = (r, \theta, z)$$

$$\mathbf{r}' = (r', \theta', z')$$

と表される。また、 $\delta(\cdot)$ はDiracのデルタ関数である。さらに $\mathbf{1}$ は単位テンソルである。Aki & Richardsのテキスト¹⁴⁾を参照すれば式(1)の解を次のように表現で

きることは、容易に理解できよう。

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} k \mathbf{H}_k^m(r, \theta) \mathbf{u}_k^m dk \quad (2)$$

ここに、 k は波数、 $\mathbf{H}_k^m$ はhorizontal functionで

$$\mathbf{H}_k^m(r, \theta) = [\mathbf{R}_k^m(r, \theta), \mathbf{S}_k^m(r, \theta), \mathbf{T}_k^m(r, \theta)] \quad (3)$$

と表現される。ただし、 $\mathbf{R}_k^m$ 、 $\mathbf{S}_k^m$ および $\mathbf{T}_k^m$ はsurface vector harmonicsで次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_k^m(r, \theta) &= Y_k^m(r, \theta) \mathbf{e}_z \\ \mathbf{S}_k^m(r, \theta) &= \frac{1}{k} \partial_r Y_k^m(r, \theta) \mathbf{e}_r + \frac{1}{kr} \partial_\theta Y_k^m(r, \theta) \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{T}_k^m(r, \theta) &= \frac{1}{kr} \partial_\theta Y_k^m(r, \theta) \mathbf{e}_r - \frac{1}{k} \partial_r Y_k^m(r, \theta) \mathbf{e}_\theta \\ Y_k^m(r, \theta) &= J_m(kr) \exp(im\theta) \end{aligned} \quad (4)$$

ここに $J_m(\cdot)$ は第1種Bessel関数、 $\mathbf{e}$ は3次元空間の単位基本ベクトルで下付きの添え字でベクトルの方向を示している。式(2)の (r, θ) は観測点の座標系であることに注意する。また、 $\mathbf{u}_k^m$ は波数領域の解で次式で与えられる。

$$\mathbf{A}_k \mathbf{u}_k^m = -\mathbf{F}_k^m \delta(z - z') \quad (5)$$

ここに、 $\mathbf{A}_k$ は演算子で

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{a}_1 \partial_z^2 + k \mathbf{a}_2 \partial_z - k^2 \mathbf{a}_3 + \rho \omega^2 \mathbf{1} \quad (6)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \text{diag} \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu) & \mu & \mu \end{bmatrix} \\ \mathbf{a}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -(\lambda + \mu) & 0 \\ (\lambda + \mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{a}_3 &= \text{diag} \begin{bmatrix} \mu & (\lambda + 2\mu) & \mu \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

と与えられる。また、 $\mathbf{F}_k^m$ は波数領域の外力場を表し、式(1)の外力項に対しては、いくつかの演算を積み上げることで、

$$\mathbf{F}_k^m = \frac{1}{2\pi} \mathbf{H}_k^m(r', -\theta') \quad (8)$$

を示すことができる。以上の議論の結果、式(1)の解は次のように表現できる。

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} k \mathbf{H}_k^m(r, \theta) \mathbf{g}_k(z, z') \mathbf{H}_k^m(r', -\theta') dk \end{aligned} \quad (9)$$

ただし、 $\mathbf{g}_k(z, z')$ は波数領域のGreen関数で次式で定義した。

$$\mathbf{A}_k \mathbf{g}(z, z') = -1 \delta(z - z') \quad (10)$$

今後の議論のため、本論文で用いているhorizontal wavefunctionの行列としての成分の配置を以下に示しておく。

$$\mathbf{H}_k^m(r, \theta) = \begin{bmatrix} Y_k^m(r, \theta) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \partial_r Y_k^m(r, \theta) & \frac{1}{kT} \partial_\theta Y_k^m(r, \theta) \\ 0 & \frac{1}{kT} \partial_\theta Y_k^m(r, \theta) & -\frac{1}{k} \partial_r Y_k^m(r, \theta) \end{bmatrix} \quad (11)$$

以上の array の設定で Green 関数の成分の配列は次のようになっている。

$$\mathbf{G}(r, r') = \begin{bmatrix} G_{zz'} & G_{zr'} & G_{z\theta'} \\ G_{rz'} & G_{rr'} & G_{r\theta'} \\ G_{\theta z'} & G_{\theta r'} & G_{\theta\theta'} \end{bmatrix} \quad (12)$$

ここに、 $G_{ij'}$ とはソース点の j' 方向での加振に対する観測点での i 方向変位を意味する。式 (9) の Green 関数の表現は観測点とソース点の水平座標が分離された形式になっている。ここで、ソース点の水平座標を原点に極限移行し、

$$\mathbf{H}_k^m(r', \theta') \rightarrow \mathbf{f}_k^m \quad (r' \rightarrow 0) \quad (13)$$

と表記すると、

$$\mathbf{f}_k^m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{when } m = 0)$$

$$\mathbf{f}_k^m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm(1/2) & -(1/2)i \\ 0 & -(1/2)i & \mp(1/2) \end{bmatrix} \quad (\text{when } m = \pm 1)$$

$$\mathbf{f}_k^m = 0 \quad (\text{otherwise}) \quad (14)$$

を得る。すなわち、 $-\infty < m < \infty$ に関する総和は $-1 \leq m \leq 1$ の有限和となり、この $\mathbf{f}_k^m$ は前論文¹²⁾で示したものとなる。

2.2 Green 関数のスペクトル表現

ここで、観測点とソース点を完全に分離した形式で Green 関数のスペクトル表現を誘導する。誘導プロセスは前論文¹²⁾で示したものとほとんど変わらないので概略のみを示す。ここで便宜上 $r > r'$ とする。まず、Horizontal wavefunction を

$$\mathbf{H}_k^m(r, \theta) = \frac{1}{2} [\mathbf{H}_k^{m(1)}(r, \theta) + \mathbf{H}_k^{m(2)}(r, \theta)]$$

と分解する。ここに、 $\mathbf{H}_k^{m(1)}(r, \theta)$ および $\mathbf{H}_k^{m(2)}(r, \theta)$ は

$$Y_k^{m(\tau)}(r, \theta) = H_m^{(\tau)}(kr) \exp(im\theta), \quad (\tau = 1, 2)$$

で構成される horizontal wavefunction であり、 $H_m^{(\tau)}(\cdot)$ は Hankel 関数を示す。前論文¹²⁾に示したように第1種 Hankel 関数は複素波数平面の上半面で収束し、第2種 Hankel 関数は下半面で収束するから、

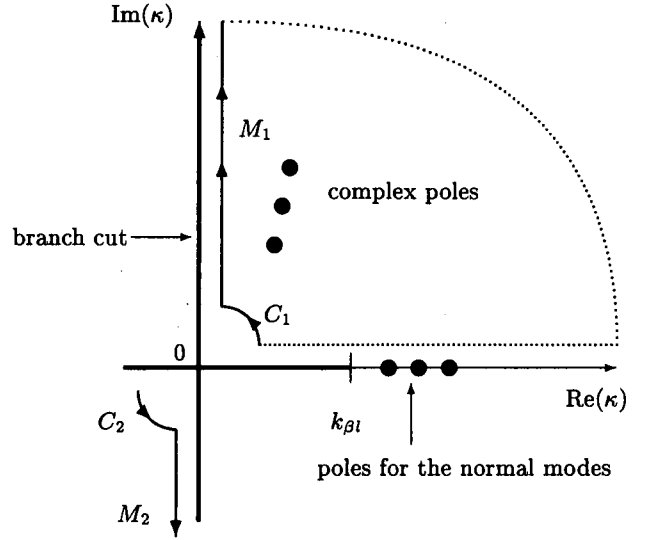


図-2 式 (15) のための積分路 M_1 , M_2 , C_1 および C_2

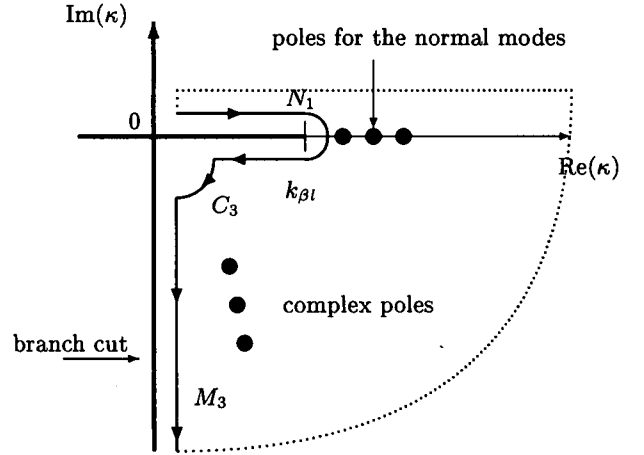


図-3 式 (16) の評価のための積分路 N_1 , M_3 および C_3

$$\begin{aligned} & \int_{\epsilon}^{\infty} k \mathbf{H}_k^{m(1)}(r, \theta) g_k(z, z') \mathbf{H}_k^m(r', -\theta') dk \\ &= \int_{M_1 + C_1} k \mathbf{H}_k^{m(1)}(r, \theta) g_k(z, z') \mathbf{H}_k^m(r', -\theta') dk \\ &+ 2\pi i \sum_{k_j \in \sigma_{pl}} \text{Res}_{k=k_j} k \mathbf{H}_k^{m(1)}(r, \theta) g_k(z, z') \mathbf{H}_k^m(r', -\theta') \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\epsilon}^{\infty} k \mathbf{H}_k^{m(2)}(r, \theta) g_k(z, z') \mathbf{H}_k^m(r', -\theta') dk \\ &= \int_{N_1 + C_3 + M_3} k \mathbf{H}_k^{m(2)}(r, \theta) g_k(z, z') \mathbf{H}_k^m(r', -\theta') dk \\ &- 2\pi i \sum_{k_j \in \sigma_{pl}} \text{Res}_{k=k_j} k \mathbf{H}_k^{m(2)}(r, \theta) g_k(z, z') \mathbf{H}_k^m(r', -\theta') \\ &- 2\pi i \sum_{k_n \in \sigma_{pn}} \text{Res}_{k=k_n} k \mathbf{H}_k^{m(2)}(r, \theta) g_k(z, z') \mathbf{H}_k^m(r', -\theta') \end{aligned} \quad (16)$$

を得る。ただし、積分路 C_1 , M_1 , C_3 , M_3 は図-2 および図-3 に示している。また、 ϵ は無限小の正数、 σ_{pn} は正の正規モードの波数の集合、 σ_{pl} は第1象限にある複素 Rayleigh 波モードの波数の集合、 k^* は k の共役複素数を表している。これらの積分路の変形の成功は $r > r'$ の仮定が生きている。 $r < r'$ の場合はソース側の horizontal wavefunction を Hankel 関数に置き換える必要がある。

次に、積分路 C_1 , M_1 に関する積分で $k = -k'$ の変数変換を行う。このとき文献¹⁵⁾よりの帰結である Bessel 関数に関する性質

$$\begin{aligned} J_m(-kr) &= \exp(im\pi)J_m(kr) \\ H_m^{(1)}(-kr) &= \exp(i(m+1)\pi)H_m^{(2)}(kr) \end{aligned} \quad (17)$$

ならびにここでは詳細を省略するが伝達マトリックス法から明らかになる波数領域の Green 関数の性質

$$\begin{aligned} g_{-k}(z, z') &= \text{diag}[-1, -1, 1] \times \\ &\quad g_k(z, z') \times \text{diag}[-1, -1, 1] \end{aligned} \quad (18)$$

を用いることで、次式が得られる。

$$\begin{aligned} &\int_{\epsilon}^{\infty} k H_k^{m(1)}(r, \theta) g_k(z, z') H_k^m(r', -\theta') dk \\ &= - \int_{M_2+C_2} k H_k^{m(2)}(r, \theta) g_k(z, z') H_k^m(r', -\theta') dk \\ &\quad + 2\pi i \sum_{k_j \in \sigma_{pl}} \text{Res}_{k=k_j} k H_k^{m(1)}(r, \theta) g_k(z, z') H_k^m(r', -\theta') \\ &\quad (19) \end{aligned}$$

ただし、積分路 C_2 , M_2 は図-2 に示している。ここで、式(16)と式(19)を加えることで、次の Green 関数のスペクトル表現を得る。

$$\begin{aligned} G(r, r') &= -\frac{i}{4} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\\ &\quad \sum_{k_n \in \sigma_{p+}} \langle V_{k_n}^{m(2)}(r) | E(k_n) | V_{k_n}^m(r'^*) \rangle \\ &\quad + \sum_{k_j \in \sigma_{pl}} \langle V_{k_j}^{m(2)}(r) | E(k_j^*) | V_{k_j}^m(r'^*) \rangle \\ &\quad - \sum_{k_j \in \sigma_{pl}} \langle V_{k_j}^{m(1)}(r) | E(k_j) | V_{k_j}^m(r'^*) \rangle \\ &\quad + \int_{\sigma_{c+}} \langle V_k^{m(2)}(r) | E(k) | V_k^m(r'^*) \rangle |dk| \\ &\quad + \Gamma(r, r')] \end{aligned} \quad (20)$$

ここに、

$$V_k^{m(r)}(r) = H_k^{m(r)}(r, \theta) \Psi_k(z)$$

であり、 $\Psi_k(z)$ は固有関数を示す。ただし、ここでの固有関数は k の値に応じて、正規モード、連続スペクトルの固有関数、複素 Rayleigh 波モードを表すものとする。また、 $E(k)$ は固有関数に対するエネルギー積分で

$$E(k) = kI_2 + I_3$$

で与えられ、エネルギー積分の記号の使い方については前論文¹²⁾に従うものとする。また、式(16)と式(19)

の和の演算では、分岐線積分核の分解に関する定理¹²⁾

$$\begin{aligned} g_k^{\uparrow}(z, z') - g_k^{\downarrow}(z, z') \\ = \pi i \frac{k}{|k|} \Psi_k(z) E(k)^{-1} \Psi_k(z')^T \quad k \in \sigma_{c+} \end{aligned} \quad (21)$$

が用いられている。ここに、添え字の $\uparrow$ と $\downarrow$ は半無限層での波動の進行方向を示す。なお、式(20)の $\langle \cdot | \cdot \rangle$ の意味は

$$\begin{aligned} &\langle V_k^{m(r)}(r) | E(k) | V_k^m(r'^*) \rangle \\ &= k V_k^{m(r)}(r) E(k)^{-1} V_k^m(r'^*)^T \end{aligned}$$

である。ただし、 $r' = (r', \theta', z')$ として、

$$r'^* = (r', -\theta', z')$$

とした。また、 σ_{c+} は分岐線の波数で正の実軸と負の虚数軸にあるものの集合である。式(20)の $\Gamma(r, r')$ は horizontal wavefunction の $k = 0$ での特異性による Green 関数への寄与を考慮したもので、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \Gamma(r, r') \\ = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{C_2+C_3} k H_k^m(r, \theta) g_k(z, z') H_k^m(r', -\theta') dk \end{aligned} \quad (22)$$

3. Green 関数のスペクトル表現に関するいくつかの考察

3.1 Horizontal wavefunction の特異性の Green 関数への寄与

まず、式(22)で示された horizontal wavefunction の特異性の Green 関数への寄与を検討する。Horizontal wavefunction に用いている Hankel 関数は次数 m が増大するほど $k = 0$ での特異性は強くなる。ここで $m \geq 1$ として、horizontal wavefunction の $k \sim 0$ での特異項の主要部、すなわち、最も特異性の強い項を取り出すと次のようになる。

$$\begin{aligned} &H_k^{m(2)}(r, \theta) \\ &\sim_{k \rightarrow 0} \frac{2^m(m-1)!}{\pi} i e^{im\theta} (kr)^{-m} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -m(kr)^{-1} & im(kr)^{-1} \\ 0 & im(kr)^{-1} & m(kr)^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

次に、force density の Hankel 変換で現れた horizontal wavefunction では第1種 Bessel 関数を用いていることから、 m の増大とともに、 $k \rightarrow 0$ で急速にゼロに近づく。この horizontal wavefunction のうち、最もゼロに遅く近づく項は次のように表される。

$$H_k^m(r, -\theta) \sim_{k \rightarrow 0} \frac{(kr)^m}{2^m m!} e^{-im\theta} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (2kr)^{-1} & -im(2kr)^{-1} \\ 0 & -im(2kr)^{-1} & -(2kr)^{-1} \end{bmatrix} \quad (24)$$

ここで、波数領域の Green 関数 $g_k(z, z')$ は $k=0$ で極を持たないから有界である。結局ここまでの議論で式 (22) の積分は式 (23) と (24) および $g_k(z, z')$ の有界性を用いて、 m によらず $1/k$ 特異性を扱う積分であることが分かる。ところが、波数領域の Green 関数の定義式 (10) で $k \rightarrow 0$ の状況を考えて、式 (6) で定義された演算子 A_k は

$$A_k \xrightarrow{k \rightarrow 0} a_1 \partial_z^2 + \rho \omega^2 \mathbf{1} \quad (25)$$

となることから波数領域の Green 関数は、

$$g_k(z, z') \xrightarrow{k \rightarrow 0} \text{diag}[\alpha(z, z'), \beta(z, z'), \beta(z, z')] \quad (26)$$

となる。ここに、

$$((\lambda + 2\mu)\partial_z^2 + \rho\omega^2) \alpha(z, z') = -\delta(z - z')$$

$$(\mu\partial_z^2 + \rho\omega^2) \beta(z, z') = -\delta(z - z')$$

である。これらの $k \rightarrow 0$ の場合の主要部の性質から導かれる式 (22) の被積分関数の性質は

$$k H_k^m(r, \theta) g_k(z, z') H_k^m(r', -\theta') \xrightarrow{k \rightarrow 0} \frac{ik}{m\pi} \begin{bmatrix} \alpha(z, z') & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{k \rightarrow 0} 0 \quad (27)$$

となる。すなわち、被積分関数の $1/k$ 特異性は見掛けだけのものであり、 $k \rightarrow 0$ で被積分関数は 0 となる。換言すれば horizontal wavefunction の特異性は Green 関数に影響を与えない。この議論は $m \geq 1$ のケースについてであった。 $m=0$ のケースでは被積分関数の $1/k$ 特異性は問題にならないことはほとんど自明であろう。また、 $m \leq -1$ では Hankel 関数の次の性質

$$H_{-m}^{(\tau)}(\cdot) = (-1)^m H_m^{(\tau)}(\cdot)$$

を用いれば、 $m \geq 1$ の議論がそのまま流用できる。以上の議論をつぎのように定理としてまとめることができる。

Theorem 1 Horizontal wavefunction の $k=0$ の特異性による Green 関数への寄与はゼロである。すなわち、

$$\begin{aligned} \Gamma(r, r') &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{C_2+C_3} k H_k^m(r, \theta) g_k(z, z') H_k^m(r', -\theta') dk \\ &= 0 \end{aligned}$$

この定理によって、Green 関数はごく自然な形として、離散的な固有値 (複素 Rayleigh 波も含む) の固有関数の和と連続スペクトルの固有関数による積分で表現されることになった。もうひとつ、ここで明らかにしなければならないことは、連続スペクトルの積分で $k=0$ の horizontal wavefunction の特異性をどのように考えなければならないかである。しかしながら、この問題はすでに、この定理の導出過程で明らかにされた。すなわち、前述の式 (21) の左辺は horizontal wavefunction との積で $k \rightarrow 0$ のとき、それぞれがゼロに近づくことは明らかだから、左辺も horizontal wavefunction との積によってゼロに近づくからである。したがって、

Corollary 1 Horizontal wavefunction の $k=0$ の特異性は連続スペクトルの積分に影響しない。言い換えれば、連続スペクトルの $k=0$ を含む積分は、通常の意味で実行できる。これは、

$$\left\langle W_k^{m(2)}(r) | E(k) | W_k^m(r') \right\rangle \xrightarrow{k \rightarrow 0} 0$$

の事実に基づく。

3.2 複素 Rayleigh 波モードの性質について

前論文¹²⁾では、震源の水平座標を原点にとった場合の複素 Rayleigh 波が非伝播性の波動であることの証明を記述した。しかしながら、証明のプロセスは煩雑であり、見通しの良いものとは言えない。ここでは、震源とソース点の座標系が分離されると、物理的にも見通しの良い証明が可能となるので、それを記述する。

この議論のためには、二つの Lemma が必要である。

Lemma 1 複素変数の第 1 種 Hankel 関数と第 2 種 Hankel 関数の間には次の関係がある。

$$H_m^{(1)}(z^*) = [H_m^{(2)}(z)]^*$$

ここに z^* は複素変数 z の複素共役を示す。

この Lemma は前論文¹²⁾で与えたものであるから証明は省略する。

Lemma 2 整数次の複素変数の第 1 種 Bessel 関数には次の性質がある。

$$J_m(z^*) = [J_m(z)]^*$$

証明はたとえば、Hansen の積分表示¹⁵⁾を用いて議論を積み重ねれば良い。

$$\begin{aligned} J_m(z^*) &= \frac{1}{\pi i^m} \int_0^\pi \exp(iz^* \cos \varphi) \cos m\varphi d\varphi \\ &= (-1)^m \left[\frac{1}{\pi i^m} \int_0^\pi \exp(-iz \cos \varphi) \cos m\varphi d\varphi \right]^* \\ &= (-1)^m [J_{-m}(z)]^* \\ &= [J_m(z)]^* \end{aligned}$$

この二つの Lemma によって horizontal wavefunction は次の性質を持つことが導ける。

$$H_{k^*}^{-m(1)}(r, \theta) = (-1)^m [H_k^{m(2)}(r, \theta)]^* \\ H_k^{-m}(r, \theta) = (-1)^m [H_{k^*}^m(r, \theta)]^* \quad (28)$$

また、複素 Rayleigh 波モードに関するエネルギー積分には、互いに複素共役な固有値 k と k^* に関して $E(k^*) = E(k)^*$, ($k \in \sigma_{pl}$) の性質がある。以上の準備で次の定理が提示できる。

Theorem 2 複素 Rayleigh 波モードの Green 関数への寄与は全体としては虚数部がゼロとなり、非伝播性の波動としての性質を持つ。

$k \in \sigma_{pl}$ とすれば、 k^* も複素 Rayleigh 波モードの波数であることに注意する。互いに複素共役なモードを重ね合わせる時に、 k の波数に対し互いに m の符号が異なるモードの波動を重ね合わせることを考える。式 (20) の Green 関数の表現より、

$$\begin{aligned} & \langle V_k^{m(2)}(r) | E(k) | V_{k^*}^m(r'^*) \rangle \\ & - \langle V_{k^*}^{-m(1)}(r) | E(k^*) | V_k^{-m}(r'^*) \rangle \\ & = \langle V_k^{m(2)}(r) | E(k) | V_{k^*}^m(r'^*) \rangle \\ & - [\langle V_k^{m(2)}(r) | E(k) | V_{k^*}^m(r'^*) \rangle]^* \quad (29) \end{aligned}$$

となり、複素共役な波動関数の差として実部はゼロである。これに $(-i/4)$ がかかるから、再び全体として虚数部はゼロになり、複素 Rayleigh 波モード全体として虚数部はゼロになる。■

すなわち、3次元空間では単純に互いに複素共役なモードを重ね合わせればそのまま非伝播性の波動が得られるというイメージを持つことは誤りであった。互いに複素共役なモードに m の符号の異なる horizontal wavefunction を乗じて、その和によって非伝播性の波動が得られていたことになる。

3.3 表面力の Green 関数の固有関数展開表示について

境界積分積分方程式を用いた波動場の解析では変位の Green 関数のみならず表面力の Green 関数も必要である。表面力の Green 関数は、ここで示した変位の Green 関数のソース点側の座標系で微分演算を施して誘導すれば良い。この意味でソース点と観測点を分離した形式の Green 関数は表面力の Green 関数の誘導に際しても都合が良い。形式的な表現ではあるが、この結果表面力の Green 関数は、次のような固有関数展開表現を持つことになる。

$$\begin{aligned} T(r, r') = & -\frac{i}{4} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\\ & \sum_{k_n \in \sigma_{p+}} \langle V_{k_n}^{m(2)}(r) | E(k_n) | W_{k_n}^m(r'^*) \rangle \\ & + \sum_{k_j \in \sigma_{pl}} \langle V_{k_j}^{m(2)}(r) | E(k_j^*) | W_{k_j}^m(r'^*) \rangle \\ & - \sum_{k_j \in \sigma_{pl}} \langle V_{k_j}^{m(1)}(r) | E(k_j^*) | W_{k_j}^m(r'^*) \rangle \\ & + \int_{\sigma_{c+}} \langle V_k^{m(2)}(r) | E(k) | W_k^m(r'^*) \rangle |dk| \\ &] \quad (30) \end{aligned}$$

ここに、

$$W_k^m(r'^*) = n' \cdot P V_k^m(r'^*) \quad (31)$$

と形式的な表記が可能である。ただし、 n' は法線ベクトル、 P は変位場を応力場へ変換する演算子である。ここで、 m に関する無限和は、ソース点の水平座標を原点に移行することで、 $-2 \leq m \leq +2$ の有限和に置き換えることができる。これについては、

$$\partial_{r'} V_k^m(r'^*) \rightarrow f_{k,r'}^m \Psi_k(z'), \quad (r' \rightarrow 0) \quad (32)$$

と置くことで、

$$f_{k,r'}^m = \begin{cases} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k/2 & 0 \\ 0 & 0 & k/21 \end{bmatrix} & \text{when } m = 0 \\ \begin{bmatrix} \pm k/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{when } m = \pm 1 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k/4 & \mp(k/4)i \\ 0 & \mp(k/4)i & -k/4 \end{bmatrix} & \text{when } m = \pm 2 \\ 0 & \text{when } |m| \geq 3 \end{cases} \quad (33)$$

となることから明らかとなる。

ところで、表面力の Green 関数を誘導する方法は、もう一つある。この方法は変位の Green 関数の表現において、ソース点の水平座標をはじめから原点におき、その上で Green 関数に微分演算を施して行く方法である。この方法で行くと m に関する和は $-1 \leq m \leq 1$ の有限和で済ませることができる。また、例えば r' に関する微分演算は

$$\partial_{r'} G(r, r') = -\partial_r G(r, r'), \quad (\text{when } r' = 0) \quad (34)$$

と構成し、右辺の微分演算を horizontal wavefunction に対して実行することになる。

ここでの最後に二つの方法で求めた Green 関数の導関数について、数値的な違いを見ておこう。図-4に

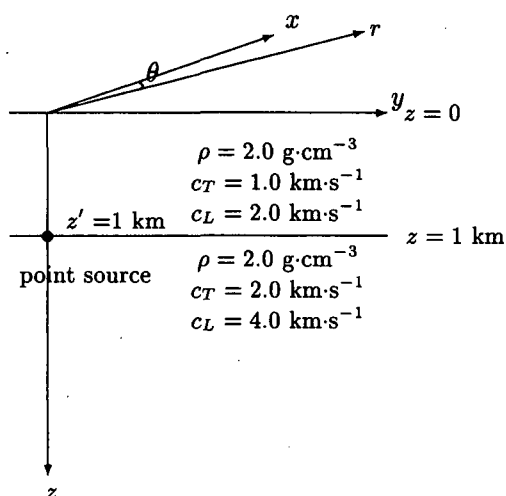


図-4 解析モデル

数値計算のための2層からなる成層弾性波動場の解析モデルを示す。解析モデルでは、表面層の質量密度を $2.0 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ 、P波の速度を $2.0 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ 、S波の速度を $1.0 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ 、表面層厚を 1.0 km とする。また、半無限層の質量密度を表面層と同じ $2.0 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ 、P波とS波の速度を表面層の波動伝播速度のそれぞれ2倍の $4.0 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ および $2.0 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ とする。点振源は、地表面から 1.0 km の深さすなわち、半無限層と表層の層境界にとる。

前述の二つの方法で求めた Green 関数の r' に関する導関数を比較したものを図-5および図-6に示す。図中の表記で method-1 とは式 (34) に基づく方法、method-2 とは、(33) に基づき導関数を計算する方法を示す。また、D.W.I は Green 関数のスペクトル表現でなく、直接波数積分によって、式 (34) に基づき導関数を求めたものである。図の横軸は震源からの水平距離を表すが、具体的には図-4に示した x 軸上の値を示す。また、縦軸は式 (12) に示した成分のうち、 $\partial_{r'} G_{rr'}$ を示す。また、図-5では観測点の z 座標を $z=0.5 \text{ km}$ 、図-6では、観測点の z 座標を $z=0.0 \text{ km}$ 、すなわち地表面としている。

これらの結果の比較からも明らかなように三種類の方法で計算した結果は震源からの水平距離が非常に小さくなければ一致する。しかし、震源からの水平距離がここでは 0.04 km より小さくければ method-1 は他の結果と一致しない。実は、この程度の小さな水平距離が問題となるのは Green 関数を境界積分方程式に適用する場合の境界要素マトリックスの対角成分の算定においてである。詳細に見れば、 $r = 0.02 \text{ km}$ 以下では値は2倍から3倍も異なっており、境界積分方程式に Green 関数を適用する場合この差異は看過できない。震源からの水平距離が小さい場合、Green 関数の値に大きく寄与するのは複素 Rayleigh 波モードと連続スペクトルの積分である。ここでの method-1 での値の差異につ

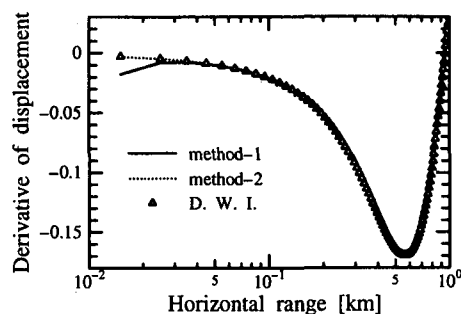


図-5 Green 関数の導関数の比較 $z=0.5 \text{ km}$

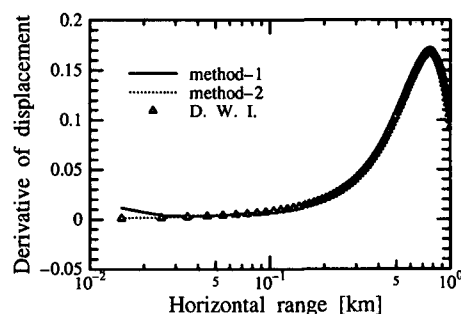


図-6 Green 関数の導関数の比較 $z=0.0 \text{ km}$

いて調べてみたところ、原因は複素 Rayleigh 波モードよりも、連続スペクトルの積分にあった。Horizontal wavefunction に直接微分演算を施した後の連続スペクトルの積分の結果は、震源からの水平距離が小さい場合、思わしい結果が得られなかった。一方で、ここでの直接波数積分の結果は、連続スペクトルの積分の値や複素 Rayleigh 波モードの和の値の評価といった微妙な問題がないことから、直接波数積分の結果と一致している method-2 によるスペクトル表現は信頼できるものと考えられる。すなわち、Green 関数の導関数は $-2 \leq m \leq 2$ の和によって求める方法が良いと言える。

ここでの最後に、実用上の観点から直接波数積分の Green 関数とスペクトル表現の Green 関数で、成層弾性波動場ではどちらが有利かという問題についてのコメントが必要である。前述のように、直接波数積分による Green 関数は、複素 Rayleigh 波の評価や、 r が小さいときの収束の遅い連続スペクトルの積分の評価といった数値計算に対する微妙な問題はなく、一般には解を得るのは容易である。この意味で r の値が小さいときの演算時間は直接波数積分が圧倒的に有利である。しかしながら、直接波数積分にも問題がある。たとえば、観測点 $z > 0$ が地中内部にあるときは、伝達マトリックスを用いて地表面上での状態ベクトルから地中

内部の状態ベクトルを計算する必要が生じる。このとき、伝達マトリックスを構成する因子、

$$\exp(z\sqrt{k^2 - k_\beta^2})$$

が実軸上の k によっては非常に大きな値をとり、波数積分演算の途中で overflow する場合がある。著者の作成した直接波数積分のプログラムでここでの解析モデルを扱った場合、観測点の深さを $z=4$ km とした場合に、すでにこの問題が表れていた。一方で、Green 関数のスペクトル表現は、こうした問題は起らず、震源や観測点の深さに関わらず答えを出すことができる。これは扱うスペクトルの範囲から、上述の発散する因子の影響がないことによる。したがって、地中深部で観測点を取る必要がある場合、たとえば、境界積分方程式を地中の散乱体に対して構成する場合、上述の overflow の問題を避ける手段が見当たらなければ、演算時間を犠牲にしても Green 関数のスペクトル表現を用いることを考えねばならないことになる。

4. 結論

本論文では、成層弾性波動場の Green 関数のスペクトル表現についていくつかの考察をおこなった。ここでの考察の出発点は Green 関数のソース点と観測点の座標を完全に分離した形式でのスペクトル表現に置いた。Green 関数のスペクトル表現においては horizontal wavefunction は $k=0$ で強い特異性を示すことになるが、この特異性は Green 関数の表現に影響を与えないことが示された。この結果、Green 関数は複素 Rayleigh 波モードを含めた離散的なスペクトルの固有関数と分岐線積分に関連した連続スペクトルの固有関数の積分の和で表され、きわめて自然な形でスペクトル表現を有することになった。また、ソース点と観測点を分離した形式の Green 関数から、複素 Rayleigh 波モードが非伝播性の波動となることも簡潔に示した。3-D の波動場では互いに複素共役の Rayleigh 波モードを符号の異なる m の次数の horizontal wavefunction を掛け合わせ、重ね合わせることで、非伝播性の波動が得られることになった。最後に、表面力の Green 関数を計算する目的から、変位の Green 関数の導関数を計算する二つの異なる方法について論じた。これによれば、ソース点と観測点を分離した形式でまず導関数を計算し、次にソース点の水平座標を原点に移行する方法が、震源近傍で精度の良いことが分かった。

参考文献

- 1) Fuchs, K and Müller, G.: Computation of synthetic seismograms with the reflectivity method and comparison with observations, *Geophys. J.*, Vol. 23, pp. 417-433, 1971.
- 2) Bouchon, M. and Aki, K.: Discrete wavenumber representation of seismic wave fields. *Bull. Seis. Soc. Am.*, Vol. 67, 259-277, 1977.
- 3) Bouchon, M.: Discrete wavenumber representation of elastic wavefields in three space dimensions, *J. Geophys. Res.*, Vol. 84, pp. 3609-3614, 1979.
- 4) Bouchon, M.: Calculation of complete seismograms for an explosive source in layered medium, *Geophysic-s*, Vol. 45, pp. 197-203, 1980.
- 5) Bouchon, M.: A simple method to calculate Green's functions for elastic layered media, *Bull. seis. Soc. Am.*, Vol. 71, pp. 959-979, 1981.
- 6) Bouchon, M.: The complete synthesis of seismic crustal phases at regional distances, *J. Geophys. Res.*, Vol. 87, pp. 1735-1741, 1982.
- 7) Harvey, D. J.: Seismogram synthesis using normal mode superposition: the locked mode approximation. *Geophys. J. R. astr. Soc.* Vol. 66, pp. 37-69, 1981.
- 8) Haddon, R. A. W.: Computation of synthetic seismograms in layered earth models using leaky modes, *Bull. Seis. Soc. Am.*, Vol. 74, 1225-1248, 1984.
- 9) Haddon, R. A. W.: Exact evaluation of the response of a layered elastic medium to an explosive point source using leaky modes, *Bull. Seis. Soc. Am.*, Vol. 76, 1755-1775, 1986.
- 10) Haddon, R. A. W.: Response of an oceanic wave guide to an explosive point source using leaky modes, *Bull. Seis. Soc. Am.*, Vol. 77, 1804-1822, 1987.
- 11) Touhei, T. A scattering problem by means of the spectral representation of Green's function for a layered acoustic half space, *Computational Mechanics*, 25, 477-488, 2000.
- 12) Touhei, T. Complete eigenfunction expansion form of the Green's function for elastic layered half space, *Archive of Applied Mechanics*, 72, 13-38, 2002.
- 13) Touhei, T. Spectral structures and radiation patterns of scattering waves in a layered acoustic half space, *Archive of Applied Mechanics*, 72, 2002. (in press)
- 14) Aki, K. and Richards, P. G., *Quantitative Seismology*, Freeman and Company, 1980.
- 15) 森口繁一, 宇田川銑久, 一松信: 岩波数学公式III, 岩波書店, 1993.

(2002 年 4 月 19 日 受付)