

# 確率的フラクタルモデルを用いた1次元不均質浸透場における透水係数分布の統計的性質について

Study on statistical properties of 1-D random permeability fields generated by stochastic fractal model

齋藤雅彦\*, 川谷 健\*\*  
Masahiko SAITO, Takeshi KAWATANI

\*正会員 博士(工) 神戸大学助手 都市安全研究センター(〒657-8501 神戸市灘区六甲台町1-1)

\*\*フェロー会員 Ph.D. 神戸大学教授 都市安全研究センター(〒657-8501 神戸市灘区六甲台町1-1)

This paper presents the simple method of generating 1-D fractal permeability field based on theoretical consideration of spatial variations of hydraulic conductivity. Then, we examine the statistical properties (e.g., probability density function, spectral density, variogram) of this random fractal field. Moreover, the propriety of this model is inspected by permeability distribution collected from several boreholes. The results show that the spectral density of the field data resulted in  $f^{-\zeta}$  type same as this model.

**Key Words:** groundwater, fractal, heterogeneity, variogram, permeability

## 1. 序論

近年、重金属類あるいは有機塩素化合物等による地下水汚染が各地で報告されている。このような汚染による健康被害を回避するため、あるいは水資源保護の観点からも、地下水の流れ場および地盤内の物質移動について的確に把握する手段が必要となる。その一つとして、数値シミュレーションは、現場観測とともに現在では不可欠なツールとなっており、また計算機の高速化および大容量化に伴って、3次元解析や多相流解析などの数理的により高度なシミュレーションを容易に実行することができる環境が整いつつある。

一方、地盤内の流れや物質移動をシミュレーションの対象とする場合、そこで用いられる各種の地盤物性値は空間的にはばらついているのに対し、原位置試験や室内試験から事前に得られる情報は、多くの場合平均値あるいは点情報に限られる。つまり充分な精度で地盤物性値の空間分布を把握することは、少なくとも現時点では不可能であり、このことがシミュレーションの信頼性向上させる上で大きな壁となっている。

このような問題に対して、地盤の統計的性質や空間的な相関関係を用いて不均質地盤の空間分布モデルを構築し、これを用いて解析結果の信頼性を確率的に評価、あるいは物性値の空間分布を推定しようとする試みがなされている。ここで用いられる空間分布モデルは、実測値から得られた共分散関数やパリオグラムを近似関数で表現したものであり、指数型モデル、ガウス型モデル、球形モデル、べき乗モデル等種々のものが提案されている<sup>1)</sup>。しかしながら、これらの近似関数の適否については、

一般に実測値との適合性を基に判断されるのみで、その理論的背景は明確ではない。

これに対し、著者ら<sup>2),3)</sup>は理論的考察に基づき、確率的フラクタルモデルを用いて、透水係数分布の1次元パワースペクトル密度関数が  $f^{-\zeta}$ 型となる空間分布モデルを提案した。しかし、現時点での統計的諸性質に関する検討は十分ではなく、また実測値による検証も必要である。

本研究では、この1次元不均質浸透場モデルについて、その統計的性質(頻度分布、分散、パワースペクトル、自己相関関数等)について明らかにするとともに、詳細なサンプリング調査から得られた1次元透過性分布の推定結果を用いて本モデルの妥当性を検証する。

## 2. 確率的フラクタルモデルによる1次元浸透場

本節では、著者らが提案している1次元の不均質浸透場における透水係数の空間分布モデルを示す<sup>2)</sup>。

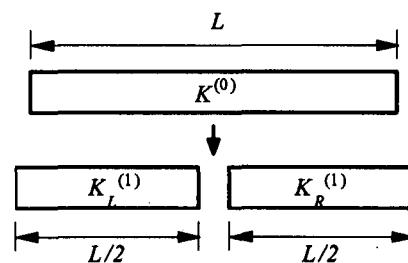


図-1 浸透場の分割

まず、図-1 に示すように長さ  $L$ 、透水係数の平均値が  $K^{(0)}$  である 1 次元浸透場を中央で 2 分割し、長さ  $L/2$  の 2 つの部分領域について考える。ここで、これらの分割された部分領域の透水係数の平均値をそれぞれ  $K_L^{(1)}$ 、 $K_R^{(1)}$  とする。この場合、供試体が完全に均質であれば、次式が成り立つ。

$$K^{(0)} = K_L^{(1)} = K_R^{(1)} \quad (1)$$

一方、浸透場が不均質ならば式(1)は成り立たず、 $K^{(0)}$ 、 $K_L^{(1)}$  および  $K_R^{(1)}$  の関係は、次の不等式となる。

$$K_L^{(1)} < K^{(0)} < K_R^{(1)} \quad \text{or} \quad K_R^{(1)} < K^{(0)} < K_L^{(1)} \quad (2)$$

また、 $K^{(0)}$  と  $K_L^{(1)}$  および  $K_R^{(1)}$  との関係は以下のとおりである。

$$K^{(0)} = \frac{2K_L^{(1)}K_R^{(1)}}{K_L^{(1)} + K_R^{(1)}} \quad (3)$$

つぎに、透水係数の空間的な変動量を表す無次元確率変数  $\alpha$  を導入し、次式のように定義する。

$$\alpha = \frac{K_L^{(1)}}{K^{(0)}} \quad (4)$$

式(4)を式(3)に代入すると、 $K_R^{(1)}$  は  $\alpha$  を用いて以下のように与えられる。

$$K_R^{(1)} = \frac{\alpha}{2\alpha - 1} K^{(0)} \quad (5)$$

式(5)、および、 $K_L^{(1)} > 0$ 、 $K_R^{(1)} > 0$  より、 $\alpha$  のとりうる範囲は、

$$\frac{1}{2} < \alpha \quad (6)$$

であることがわかる。

さらに、

$$K_m^{(1)} = \max(K_L^{(1)}, K_R^{(1)}), \quad K_n^{(1)} = \min(K_L^{(1)}, K_R^{(1)}) \quad (7)$$

および

$$\alpha_m = \frac{K_m^{(1)}}{K^{(0)}}, \quad \alpha_n = \frac{K_n^{(1)}}{K^{(0)}} \quad (8)$$

とすると、 $\alpha_m$  および  $\alpha_n$  の制約条件はそれぞれ

$$1 < \alpha_m, \quad \frac{1}{2} < \alpha_n = \frac{\alpha_m}{2\alpha_m - 1} < 1 \quad (9)$$

となり、 $\alpha_m$  を与えることにより  $\alpha_n$  も同時に定まる。

ここで、 $\alpha_m$  の確率密度関数は、明らかではないが、本研究では、次式に示す指數分布を仮定し、その妥当性については後に実測値に基づいて検証する。

$$p(\alpha_m) = \theta \exp\{-\theta(\alpha_m - 1)\} \quad (1 < \alpha_m) \quad (10)$$

ここに、 $p(\alpha_m)$  は確率密度、 $\theta$  は  $\alpha_m$  のばらつきを支配するパラメータである。また、図-2 は式(10)を仮定し、 $\theta=2.0$  および  $\theta=4.0$  とした場合の  $\alpha$  の確率密度関数を示す。

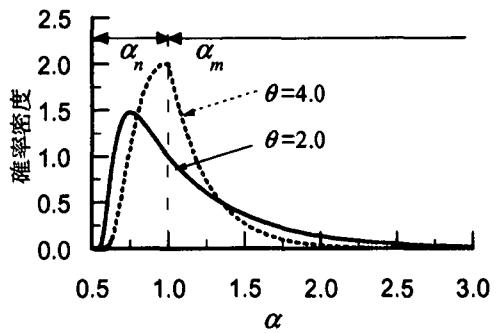


図-2  $\alpha$  の確率密度関数

以上の操作を  $N$  回繰り返せば、全体領域は  $2^N$  個の小領域に分割され、透水係数の空間分布が決定される。

本モデルにおける相関性の制御は、確率変数  $\alpha_m$  のばらつきを定めるパラメータ  $\theta$  を各分割段階で変化させることによって可能である。指數分布の性質は、 $\theta$  が大きくなるほどばらつきが小さくなる。すなわち、分割を進めていくにつれて  $\theta$  を大きくしていくれば、最終段階での透水係数のばらつきは小さくなり、相関性を高めることができる。具体的には、 $i$  回目の分割時のパラメータ  $\theta^{(i)}$  に対して  $i+1$  回目のパラメータ  $\theta^{(i+1)}$  を次式で定める。

$$\theta^{(i+1)} = \varepsilon \theta^{(i)} \quad (1 \leq i < N, 0 < \varepsilon) \quad (11)$$

ここに、 $\varepsilon$  は定数であり、 $0 < \varepsilon < 1$  とすると、相関性は小さくなり、 $1 < \varepsilon$  とすると相関性は大きくなる。

### 3. 頻度分布と分散

本節では、前節にて示した方法によって生成された 1 次元擬似浸透場における透水係数の頻度分布および分散について考察する。

図-3は、 $L=1.0$ 、 $K^{(0)}=1.0$ 、 $\theta^{(1)}=2.0$ として、繰り返し回数 $N=8$ および $N=10$ 、また相関性を規定するパラメータ $\varepsilon$ をそれぞれ1.0、1.25、1.5とした場合の透水係数分布（対数変換値： $Y=\log(K)$ ）を示す。図-4は、それぞれの頻度分布およびそれらと等しい平均値、分散を持つ対数正規分布曲線である。ここで頻度分布は確率密度に換算している。

$\varepsilon=1.0$ とした場合は、ほぼ頻度分布は対数正規分布にしたがっている。これは以下のように説明することができる<sup>2)</sup>。

領域を $N$ 回分割した場合、分割後のある小領域 $x$ の透水係数 $K^{(N)}$ は、確率変数 $\alpha$ を用いて次式で表される。

$$K^{(N)} = K^{(0)} \cdot \alpha^{(1)} \cdot \alpha^{(2)} \cdot \dots \cdot \alpha^{(N)} \quad (12)$$

式(12)の両辺の対数をとると、

$$\log K^{(N)} = \log K^{(0)} + \log \alpha^{(1)} + \log \alpha^{(2)} + \dots + \log \alpha^{(N)} \quad (13)$$

ここで確率変数 $\alpha^{(i)}$ が独立で同一の分布に従うならば中心極限定理により $\log K^{(N)}$ は正規分布となる。したがって $K^{(N)}$ は対数正規分布となる。

一方、 $\varepsilon$ が大きくなるにつれて対数正規分布からのずれが大きくなることがわかる。これは、確率変数 $\alpha$ の分布が分割ステップごとに異なるためである。

透水係数の頻度分布が、ほぼ対数正規分布に従うこと

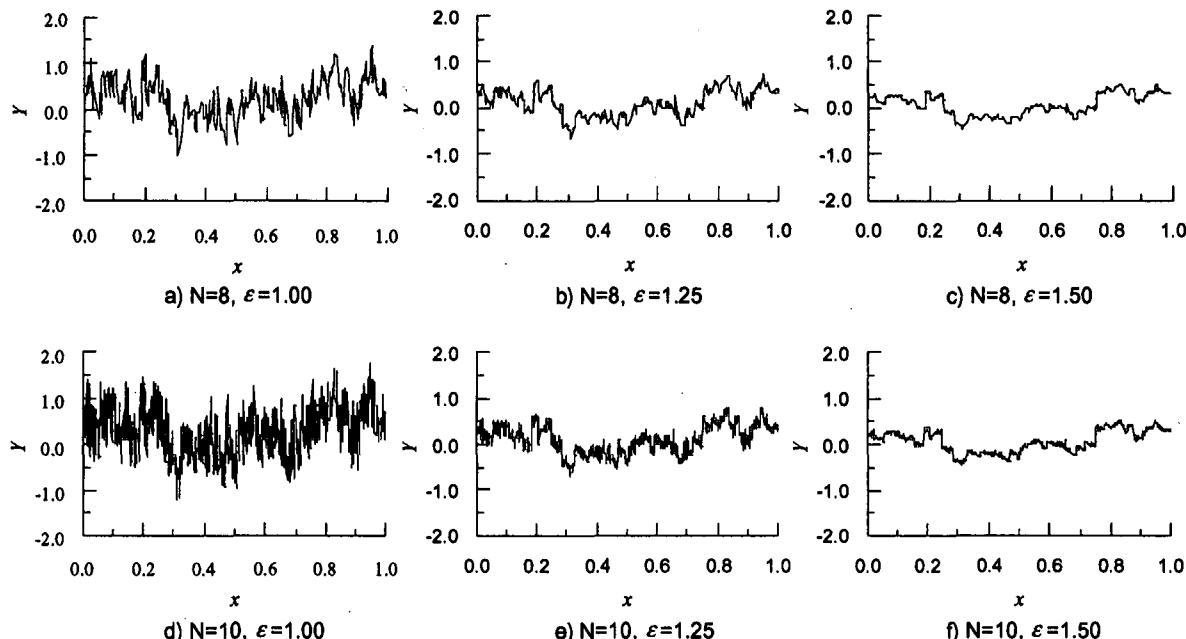


図-3 透水係数分布

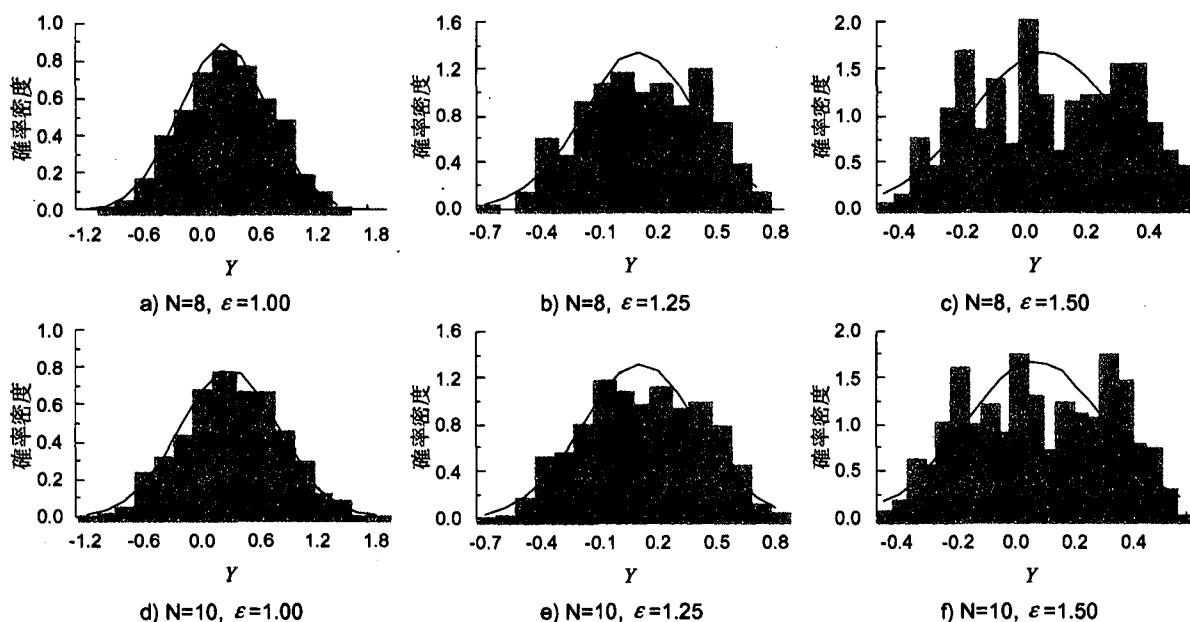


図-4 透水係数の頻度分布

は多くの既往の研究により明らかにされており<sup>4)</sup>、このことから判断すると、本モデルにおける $\varepsilon$ の上限は1.3程度と考えられる。

図-5は、分割回数 $N$ と分散の関係を表す。ここで分散は異なる乱数系列を用いて透水係数分布を100回生成し、そのアンサンブル平均を用いている。

$\varepsilon=1.0$ とした場合、分散は分割回数 $N$ に比例することがわかる。一方、その他の場合は、分散は一定値に漸近している。すなわち、分散は分割長さに無関係となる。たとえば、実際にサンプリングによって透水係数を求める場合、サンプルサイズが小さくなるほど標本分散が大きくなる現象が見られる<sup>5)</sup>。本モデルにおいては、 $\varepsilon \approx 1.0$ の場合に、このような性質が表現されていることがわかる。

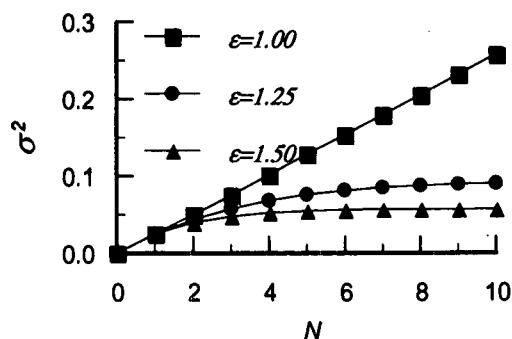


図-5 分割回数と分散の関係

#### 4. パワースペクトルとバリオグラム

本節では、確率的フラクタルモデルによって生成された擬似浸透場における透水係数の変動特性について考察する。図-6は、前節と同様に $L=1.0$ 、 $K^{(0)}=1.0$ 、 $\theta^{(1)}=2.0$ として、 $\varepsilon$ をそれぞれ1.00, 1.25, 1.50とした場合のパワースペクトル $S(f)$ のアンサンブル平均およびそれらの回帰直線である。ここに、 $f$ は空間周波数である。これらの結果より、本モデルによって生成される擬似浸透場のパワースペクトルは $f^{-\zeta}$ に比例し、また、 $\zeta$ は $\varepsilon$ によって規定されることがわかる。

また、図-7は、 $\varepsilon$ と $\zeta$ の関係を示している。 $1.0 < \varepsilon < 1.3$ においては、 $\zeta$ は次式で近似することができる。

$$\zeta = 1.8 \times (\varepsilon - 1.0) + 0.96 \quad (14)$$

図-8は、式(15)で定義されるセミバリオグラムを示している。

$$\gamma(r) = \frac{1}{2} E[(Y(x+r) - Y(x))^2] \quad (15)$$

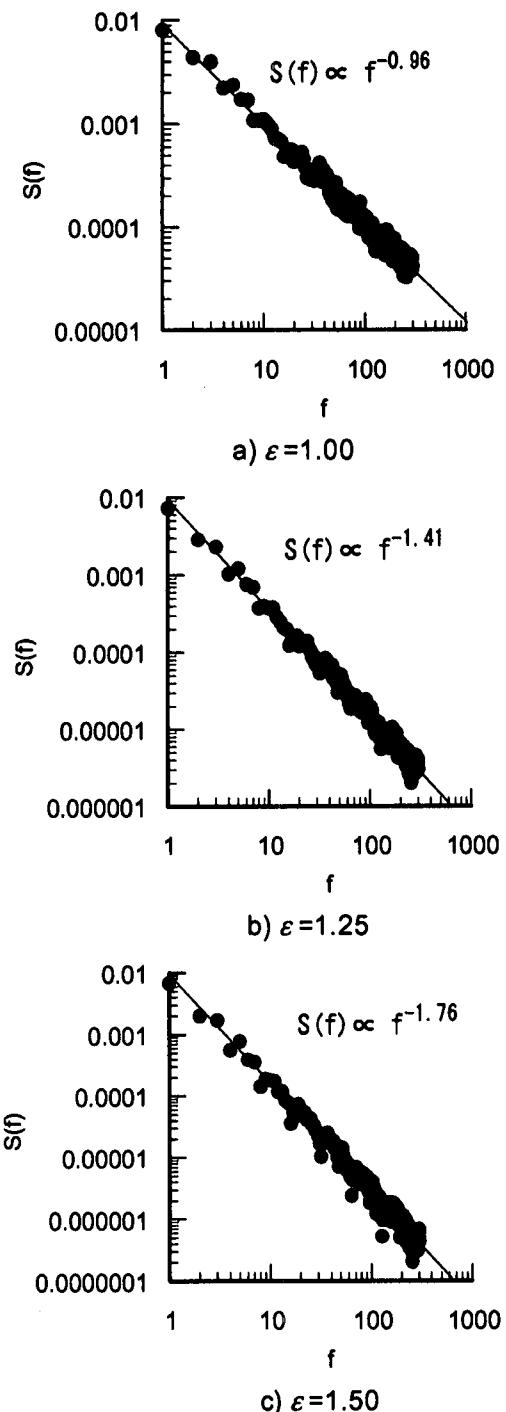


図-6 パワースペクトル

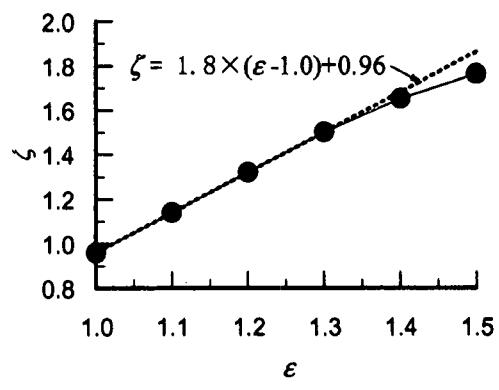


図-7  $\varepsilon$ と $\zeta$ の関係

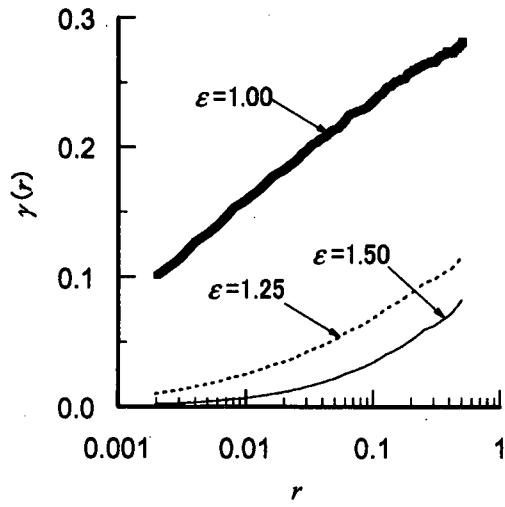


図-8 セミバリオグラム（片対数）

ここに、 $\gamma(r)$ はセミバリオグラム、 $Y(x)$ は位置 $x$ における透水係数の対数変換値 ( $Y(x)=\log K(x)$ )、 $r$ は2点間の距離、Eは[ ]内のアンサンブル平均を表す記号である。 $\varepsilon=1.00$  の場合は片対数紙上で直線的に増加しており、以下の関係が認められる。

$$\gamma(r) = A \cdot \log(r) + B \quad (16)$$

ここに、 $A, B$ は定数である。

ところで、透水係数分布のフラクタル性を表現するモデルとして、式(17)に示すような、バリオグラムを $r$ のべき乗に比例する関数で近似したモデルが知られている。

$$\gamma(r) = C \cdot r^{-D} \quad (17)$$

ここに、 $C, D$ は定数である。1次元空間においてバリオグラムが式(17)で表現される場合、 $0 < D$ ならばパワースペクトルは次式で近似されることが報告されている<sup>6), 7)</sup>。

$$S(f) \propto f^{-(D+1)} \quad (18)$$

すなわち、以下の関係が成り立つ。

$$D = \zeta - 1 \quad (19)$$

ここで、式(19)に $\zeta=1.41$  および $\zeta=1.76$  を代入すると、 $D=0.41$  および $D=0.76$  となる。図-9は、 $\varepsilon=1.25$  および $\varepsilon=1.50$  のバリオグラムを両対数紙上に表示したものであるが、式(17)および式(19)より求めたバリオグラムで近似し得ることがわかる。

つまり、べき乗型バリオグラムにおける指数 $D$ は、本モデルにおける $\varepsilon$ によって説明することができ、このことによって、指数 $D$ の物理的意味がより明確になるとと思われる。

一方、図-10は $\varepsilon=1.15$  の場合である。式(14)および

式(19)から $D=0.23$  が得られるが、フラクタルモデルから計算されたバリオグラムと比較すると直線の傾きがやや異なることがわかる。これより、式(19)が有効な範囲は $\varepsilon>1.2$ あるいは $D>0.3$ 程度と考えられる。

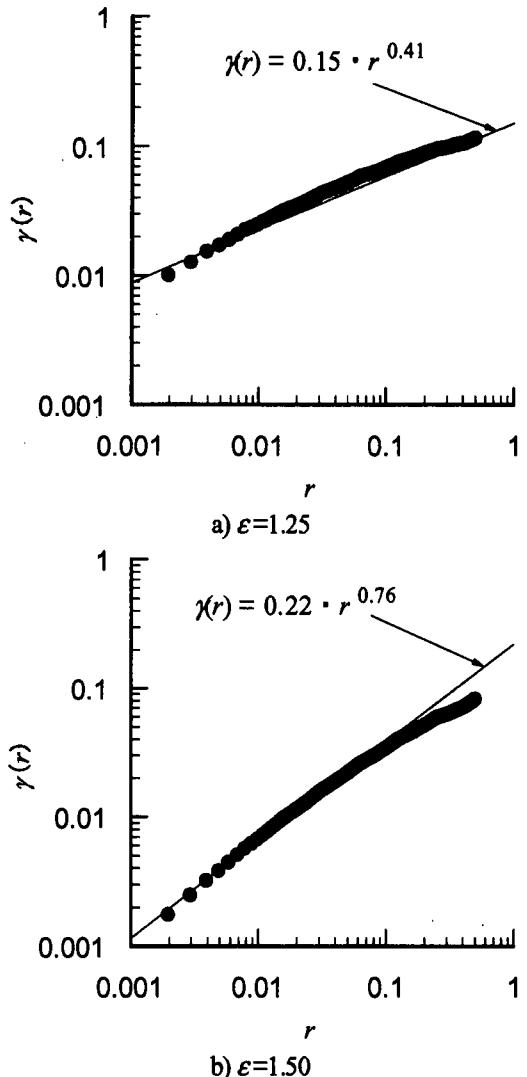


図-9 セミバリオグラム（両対数）

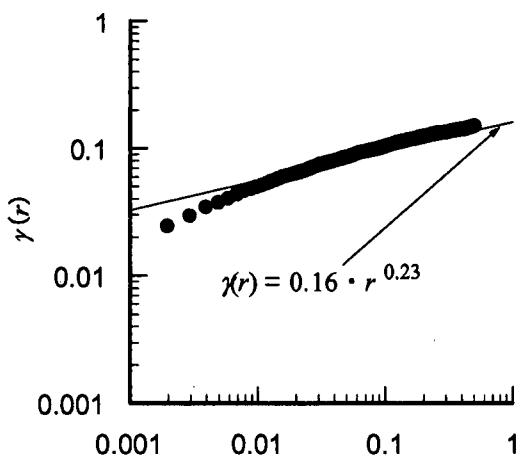


図-10 セミバリオグラム ( $\varepsilon=1.15$ : 両対数)

## 5. 実測値との比較

本節では、サンプリング調査から得られた1次元固有透過度分布のデータを用いて本モデルの妥当性について検証する。

ここで用いたデータは、米国・ミネソタ州 Bemidji 近郊にて調査されたものである<sup>8), 9)</sup>。当該地区では、1979年にパイプライン破損による原油流出事故が発生し、この事故に伴って、対策のために現場付近の詳細な地盤調査が実施された。図-11および図-12にそれぞれ調査地点および調査断面の一例を示すが、図-12のように複数の観測井が設置され、各観測井において0.8m～1.8m程度のサンプリング領域が設定されている。本研究においては、13箇所の観測井および22箇所のサンプリング領域から得られたデータを用いた。サンプルのサイズは、長さ約7.8cm、直径約4.7cmである。その他の詳細については、参考文献を参照されたい。



図-11 調査地点<sup>9)</sup>

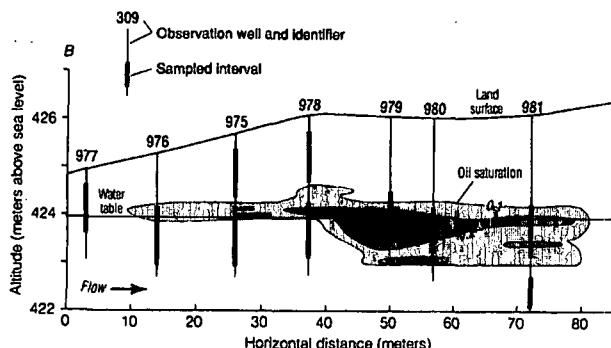


図-12 調査断面の一例<sup>9)</sup>

また、ここでは調査の目的上、透水係数ではなく固有透過度が求められている。固有透過度と透水係数の関係は次式で示される。

$$K = \frac{k}{\mu} \quad (20)$$

ここに、 $K$  は透水係数、 $k$  は固有透過度、 $\mu$  は水の動粘性係数である。固有透過度は、サンプルから得られた粒度分布の分析結果を用いて、式(21)に示す Krumbein and Monk 式<sup>10)</sup>によって推定されている。

$$k = 7.5 \times 10^{-10} \cdot G^2 \cdot \exp(-1.31\sigma) \quad (21)$$

ここに、 $k$  は固有透過度 ( $m^2$ )、 $G$  は粒径の幾何平均値 (mm) である。次式で求められる。

$$G = \frac{\phi_{16} + \phi_{50} + \phi_{84}}{3}, \quad \phi_n = -\log_2(d_n) \quad (22)$$

ここに、 $d_n$  は通過質量百分率  $n\%$  に対応する粒径 (mm) である。また  $\sigma$  は標準偏差で、次式で求める。

$$\sigma = \frac{\phi_{16} - \phi_{84}}{4} + \frac{\phi_5 - \phi_{95}}{6.6} \quad (23)$$

このようにして推定された固有透過度分布の一例を図-13に示す。

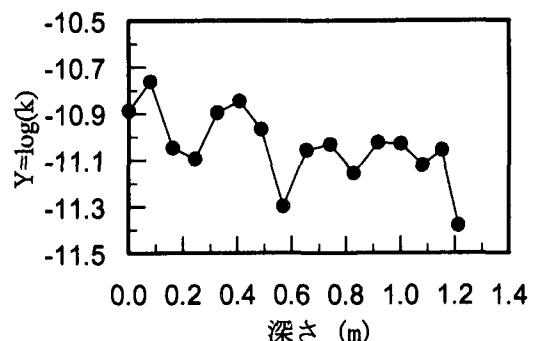


図-13 固有透過度分布の一例

以上のように推定された固有透過度分布について、パワースペクトルを求めた。その際、固有透過度の対数変換値を用い、また各サンプリング領域について、平均値 = 0、分散 = 1 となるように次式を用いて値を変換した。

$$y' = (y - y_a) / \sigma_y \quad (24)$$

ここに、 $y$  は  $k$  の対数変換値、 $y_a$  は  $y$  の平均値、 $\sigma_y$  は  $y$  の標準偏差である。

図-14は、すべてのデータについてパワースペクトルを計算した結果およびその回帰直線である。また、図-15は、図-14における各点の幾何平均値を示している。これらの図より、回帰直線の傾きは約1.26、また幾何平均値もほぼ直線状に分布しており、確率的フラクタルモデルによる擬似透水場の性質と一致している。また、式(14)に  $\zeta = 1.26$  を代入すると、 $\varepsilon = 1.17$  が得られる。

つぎに、式(10)の仮定について検証するために、隣接する2点の固有透過度から、式(8)で定義した  $\alpha_m$  を計算し、その頻度分布について調べた。図-16は頻度分布（確率密度に換算）、およびこれを指數分布で近似した場合の近似曲線 ( $\theta = 4.87$ ) を示している。図より、 $\alpha_m$  の確率密度関数を指數分布で近似することは概ね妥当と考えられる。

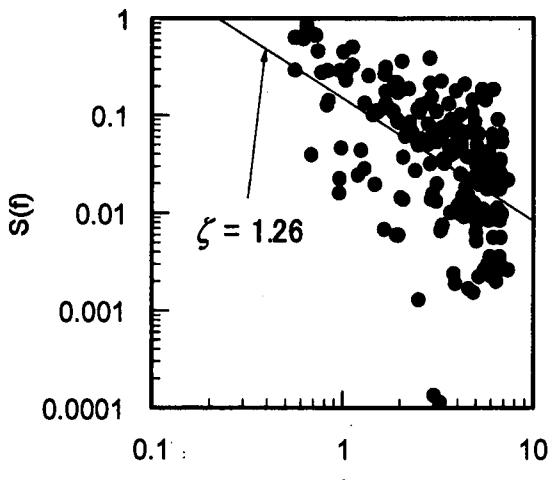


図-14 固有透過度のパワースペクトル

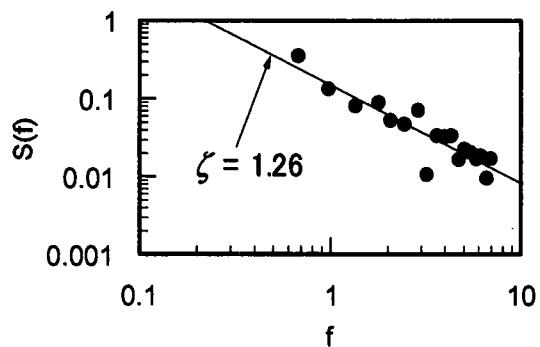


図-15 パワースペクトルの幾何平均値

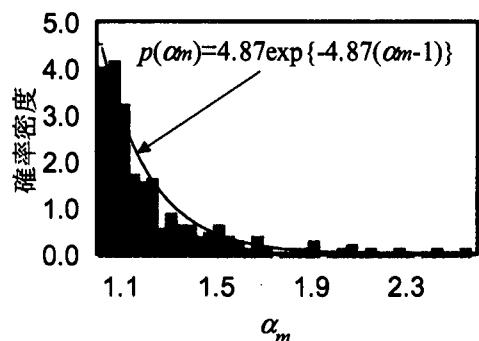


図-16  $\alpha_m$  の頻度分布と指數分布による近似

このようにして得られた  $\varepsilon$  および  $\theta$  を用いて、図-13 のような固有透過度分布の再現を試みる。まず  $L=2.5(\text{m})$  とすると、 $N=5$  の場合に最終分割長さは  $7.81(\text{cm})$  となりサンプルサイズとほぼ一致する。また、 $\theta^{(N)}=4.87$  とする  $\varepsilon=1.17$  より  $\theta^{(1)}=2.22$  であり、全体の平均値は  $\mu^{(0)}=1.0 \times 10^{-11}$  とする。

図-17 はこのような条件で生成された浸透場の一例である。また、図-18 は図-13 および図-17 のバリオグラムを比較したものであるが、両者の統計的性質に大きな差は認められない。これより、図-17 は実測値に基づく固有透過度分布の変動の性質を適切に再現しているものと思われる。

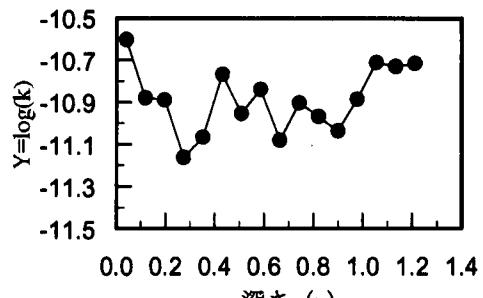


図-17 生成された浸透場の一例

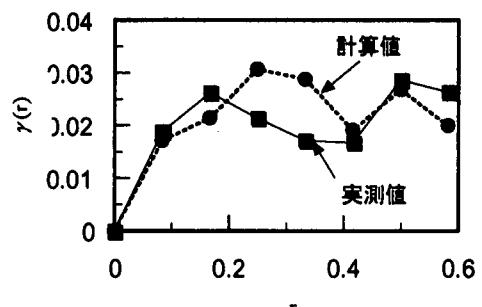


図-18 バリオグラムの比較

## 6. 結論

本研究では、確率的フラクタルを用いた1次元不均質浸透場モデルについて、その統計的性質について検討するとともに、現場観測から得られた固有透過度分布を用いてその妥当性について検証した。これにより得られた結果を以下にまとめる。

- 1) 本モデルによって生成される透水係数分布の頻度分布は、相関性を制御するパラメータ ( $\varepsilon$ ) によって異なり、対数正規分布に近い分布を生成するためには、 $\varepsilon < 1.3$  とする必要があると考えられる。
- 2)  $\varepsilon \approx 1.0$  とした場合、分散は分割回数  $N$  に比例する。
- 3) 本モデルによって生成される透水係数分布のパワースペクトルは  $f^{-\zeta}$  に比例し、また、 $\zeta$  は  $\varepsilon$  によって規定される。
- 4)  $\varepsilon \approx 1.0$  の場合、バリオグラムは対数関数で近似され、 $\varepsilon > 1.2$  ならば、べき乗型バリオグラムで近似できる。
- 5) 現場観測によって得られた固有透過度分布のパワースペクトルは  $f^{-1.26}$  に比例し、これは本モデルにおいて  $\varepsilon=1.17$  とした場合に相当する。
- 6) 隣接する2点の固有透過度から計算された本モデルにおけるパラメータ ( $\alpha_m$ ) の頻度分布は、ほぼ指数分布に従う。

## 謝辞

本研究で用いた現場観測データは、米国地質調査所・William N. Herkelrath 博士よりご提供頂きました。ここに深甚なる謝意を表します。

## 参考文献

- 1) de Marsily, G. : *Quantitative Hydrogeology*, Academic Press Inc., 1986.
- 2) 斎藤雅彦, 川谷 健 : 透水係数の空間分布に関する理論的考察, 土木学会論文集, No.645 / III-50, pp.103-114, 2000.
- 3) 斎藤雅彦, 川谷 健 : 透水係数の空間分布モデルの適用性に関する一考察, 土木学会論文集, No.694 / III-57, pp.245-258, 2001.
- 4) Freeze, R. A.: A stochastic-conceptual analysis of onedimensional groundwater flow in nonuniform homogeneous media, *Water Resour. Res.*, Vol.11, No.5, pp.725-741, 1975.
- 5) 太田猛彦, 片桐真 : 大型透水試験機による森林土壤の透水係数の測定(Ⅰ), 日本林学会誌, Vol.74, pp.373-382, 1992.
- 6) Chang, Ching-Min and Kemblowski, M. W. : Infiltration in soils with fractal permeability distribution, *GROUND WATER*, Vol.31, No.2, pp.187-192, 1993.
- 7) Mandelbrot, B. B. and Van Ness, J. W. : Fractional brownian motions, *SIAM Review*, Vol.10, pp.422-437, 1968.
- 8) Essaid, H. I. and Herkelrath, W. N. : Simulation of fluid distributions observed at a crude oil spill site incorporating hysteresis, oil entrapment, and spatial variability of hydraulic properties, *Water Resour. Res.*, Vol.29, No.6, pp.1753-1770, 1993.
- 9) Dillard, A. L., Essaid, H. I. and Herkelrath, W. N. : Multiphase flow modeling of a crude-oil spill site with a bimodal permeability distribution, *Water Resour. Res.*, Vol.33, No.7, pp.1617-1632, 1997.
- 10) Krumbein, W. C. and Monk, G. D. : Permeability as a function of the size parameters of unconsolidated sand, *Trans. Am. Inst. Min. Metall. Eng.*, No.151, pp.153-160, 1942.

(2002年4月19日 受付)