

真三軸応力プローブに対する粒状体の増分非線形応答について

Incrementally Non-linear Response of Granular Media under True Tri-Axial Stress Probes

石井建樹*・金子賢治**・岸野佑次***

Tateki ISHII, Kenji KANEKO and Yuji KISHINO

*学生会員 工修 東北大学大学院 工学研究科 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

**正会員 工博 八戸工業大学 工学部 環境建設工学科 (〒031-8501 八戸市大字妙字大開 88-1)

***フェロー会員 工博 東北大学大学院 工学研究科 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

As a generalized constitutive relationship for granular media, incrementally non-linear models have been proposed by many researchers. However, it is hard to evaluate the validity of such constitutive models in terms of experiments on real materials. On the other hand, the discrete element simulations have the capability to solve this problem. In this paper, true tri-axial stress probe tests were simulated in terms of 3D numerical discrete element method. The results suggests that the exact behavior of granular media have to be described by a model with incremental non-linearity. The stress probe test result is compared with recent constitutive theories and the mechanism of the incremental non-linearity is discussed as well in terms of an eigenvalue analysis.

Key Words : plastic flow, incremental non-linearity, 3-dimensional Granular Element Method, stress probe test, eigenvalue analysis, stiffness matrix

1. はじめに

地盤材料における構成モデルの多くは、古典的な金属塑性論を援用している。しかし、地盤材料は微視的に捉えると土粒子などで構成される不連続体であり、古典的な金属塑性論流動則では表現し得ない変形特性が指摘されている^{1),2)}。特に、応力増分方向によって塑性流動方向が変化する増分非線形性は、地盤材料のような離散体の種々の力学問題において重要な性質と認識されつつある。一般に、増分非線形性とは、塑性コンプライアンスが応力増分の関数となり、塑性ひずみ増分が応力増分の線形式とならない性質を意味する。

Anandarajah ら³⁾はオタワ砂を用いて三軸圧縮試験装置による応力プローブ実験を行い、破壊線に近い応力状態においては従来型の金属塑性論が適用できると結論づけている。しかし、一方では、破壊線から離れた応力状態では従来型の金属塑性論が適用できない場合もあることを指摘している。また、Pradel ら¹⁾は、豊浦砂を用いた中空ねじり試験により応力プローブ試験を行い、応力主軸回転時には塑性ひずみ増分の増分非線形性が現れるという結論を導いた。さらに、増分非線形性発生の主たる要因が応力主軸回転であると述べている。ただし、以上のような実験による応力プローブ試験には正確な制御が困難であり、各応力増分方向でそれぞれ異なる供試体を用いることによるばらつきもあるため、十分に精密な議論ができない状態にある。

一方、数値シミュレーションによる数値実験は再現性に優れ、任意の応力制御が可能であり、粒状体の変

形特性を子細に把握する手法として非常に有効である。武ら^{4),5)}、金子ら⁶⁾、赤井澤ら⁷⁾、Kishino ら⁸⁾は、2次元および3次元粒状供試体に対し粒状体の離散解析手法の一つである粒状要素法⁹⁾を用いて種々の応力プローブシミュレーション解析を行い、粒状体の流動則はほぼ非関連型に近いが厳密には応力増分方向に依存する増分非線形性を示すこと等の結論を導いている。しかし、これら解析は二軸的なものであり、3次元的な構造を有する粒状体の変形機構に関して議論するにはこれらの解析結果のみでは不十分である。

ところで、地盤材料の塑性変形は内部粒子間のすべりの組み合わせの集積に起因する不安定で局所的な変形であると考えられる。この点に関しては、全体剛性マトリクスの固有値解析により得られる固有変形モードに基づき考察を行うことが有効である。ここで、粒状要素法⁹⁾は構成要素の位置データおよび要素間接触力データに基づく剛性行列を用いる解析手法であり、シミュレーション試験における各ステップの粒子データから容易に粒状体の増分型の全体剛性マトリクスを組むことができる。岸野は2次元粒状要素法に基づき、粒状体の増分型全体剛性マトリクスに対し固有値解析を施す固有変形解析¹⁰⁾を行い、2次元粒状体モデルの変形挙動に関与する変形モードに関して議論している。

本研究では、より一般的な粒状体の3次元変形挙動を検討するために、3次元粒状要素法^{7),8),11)}に基づく2種類の応力プローブシミュレーション試験を行い、真三軸¹²⁾応力状態下の塑性ひずみ増分応答における増分非線形性について検討する。また、固有変形解析¹⁰⁾

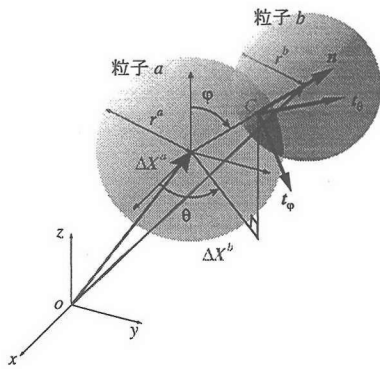


図-1 座標系の設定

を行うことにより、微視的内部構造の見地から粒状体の増分非線形性が発現するメカニズムについて考察する。

2. 3次元粒状要素法

本論文では、最近、開発された3次元粒状要素法^{7),8)}を用いた数値シミュレーションを行う。ここでは、3次元粒状要素法の定式化について簡潔に示しておく。

2.1 粒子間構成式と制約条件

砂のような地盤材料は様々な複雑な形状を有する粒子の集合体であるが、3次元粒状要素法においてはこれを球形に理想化する。球形粒子自身は剛体要素とし粒子の弾性的な変形は粒子間に設定した構成式で表現する。ここでは、粒子間に設定する構成式と制約条件について述べる。

図-1のような接触状態にある粒子a, bの半径をそれぞれ r^a , r^b とする。同図の粒子aに着目して粒子bとの接触点における外向き単位法線ベクトル n を定義する。粒子a, bの重心の位置ベクトルをそれぞれ X^a , X^b とすれば単位法線ベクトルは、

$$n = \frac{(X^b - X^a)}{|X^b - X^a|} \quad (1)$$

である。 n に直交する単位接線ベクトル t_ϕ , t_θ をそれぞれ図-1に示す方向に定めると、 (n, t_ϕ, t_θ) は右手系直交座標の基底ベクトルを形成する。粒子間接触点における接触力や2粒子間の相対変位は接触点毎に (n, t_ϕ, t_θ) を基底ベクトルとする局所的な直交座標系で表される一方で、各粒子に作用する力の合力や粒子の変位ベクトル等は全体座標系で定義されることに注意する。

図-2に示す粒子aに着目して粒子間接触力を定義する。a, bの接触点Cにおいて、粒子bから粒子aに作用する接触力ベクトルを次式のように定義する。

$$P_C = \{P_n \ P_\phi \ P_\theta\}_C^t \quad (2)$$

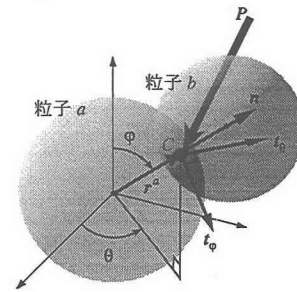


図-2 粒子間接触力

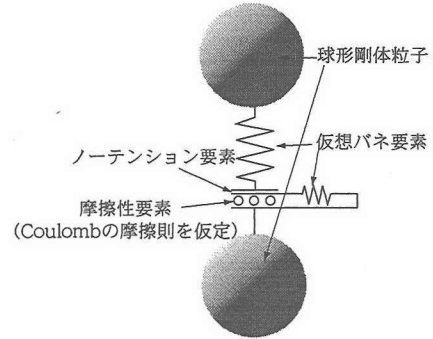


図-3 粒子間構成式

ここで、接触力ベクトルの各成分は局所座標系の基底ベクトルを用いて表される。

$$P_n = -P \cdot n, \ P_\phi = -P \cdot t_\phi, \ P_\theta = -P \cdot t_\theta \quad (3)$$

一方、接触力ベクトル P_C に対応する運動学的変数は相対変位ベクトル

$$U_C = \{u_n, u_\phi, u_\theta\}_C^t \quad (4)$$

であり、接触力ベクトル同様に接触点における局所座標系で定義される。

図-3に粒子間接触点の構成モデルを示す。粒子間の接触力と相対変位の関係は、厳密にはHertz理論¹³⁾のような非線形性を考慮して定めるべきものであるが、粒子がすべりを生じるまでの相対変位は微小と考え、ここでは接触点における増分型の構成式はすべりが生じない限り以下の線形関係で表す。

$$\Delta P_C = S_C \Delta U_C \quad (5)$$

ここに、

$$S_C = \begin{bmatrix} k_n & 0 & 0 \\ 0 & k_t & 0 \\ 0 & 0 & k_t \end{bmatrix} \quad (6)$$

は、接触点Cにおける仮想バネ剛性マトリクスである。

離散的な粒子の集合体である粒状体においては、接触・摩擦条件により変形が拘束される。これらの拘束条

件を表すために接触点には仮想バネ要素に加えてノーション要素、摩擦性要素を仮定する。また、本論文では非粘着性材料を対象とし粒子間粘着力は考慮しないものとする。

摩擦性要素は粒子間のすべりを想定したもので、接触力の接線方向成分が Mohr-Coulomb の摩擦則で表される条件

$$|P_t| \geq P_n \tan \phi_\mu \quad (7)$$

を満たす場合、粒子間にすべりが生じることとし、次式のように強制的にこの限界値に戻す修正を行う。

$$P'_t = \frac{P_t}{|P_t|} P_n \tan \phi_\mu \quad (8)$$

ここに、 ϕ_μ は粒子間摩擦角であり、 P_t は次式で定義される接触点における接線方向接触力ベクトルである。

$$P_t = P_\varphi t_\varphi + P_\theta t_\theta \quad (9)$$

また、粒子同士の接触条件は

$$u_n > 0 \quad (10)$$

で与えられる。接触条件を満たさないとき接触力は強制的に 0 とおく。

前述のように粒子自身は弾性体を想定しているが、粒子間接触点における接触・摩擦条件によって粒子の移動が制約され、粒状集合体として非線形な材料応答を示す。このように粒状体の非線形挙動の本質は接触・摩擦の問題であり、粒子自身の弾性的変形挙動の影響はそれほど大きくはないと考えられる。したがって、式 (5) における仮想バネ剛性は十分に大きい値を選ぶことが必要である。

2.2 粒状体の静的つり合い式

粒状要素法は、粒子間構成式と制約条件を用いて粒状体全体の静的なつり合い式を任意の境界条件に基づいて解く解析手法である。しかし、先に示した構成式はあくまで接触点における局所的な直交座標系で表されたものであり、粒状体全体の静的なつり合い式を解くためには、各粒子に作用する力の合力や粒子の移動ベクトル等を全体座標系で定義する必要がある。

粒子 a に作用する物体力 B を考慮すると、粒子 a の静的つり合い式は

$$f^a = - \left(\sum_{C=1}^{C_{\max}} T_C^t P_C + B \right) = 0 \quad (11)$$

で表される。ここに、 $\sum_{C=1}^{C_{\max}}$ は 1 粒子の全接触点の総和を意味し、 f^a は粒子 a に作用する接触力とモーメントを並べた合力ベクトルである。また、 T_C は、各接触点における局所座標系と全体座標系との座標変換マト

リクスであり、主座標変換マトリクスと呼ぶことにする。粒状体全体の静的つり合い式は、式 (11) を供試体中の全粒子について重ね合わせた式で与えられる。

主座標変換マトリクス T_C は粒子の移動に伴い時々刻々と変化するので、以下、増分型で定式化を進めることとし、式 (11) を次式のように書き直しておく。

$$\Delta f^a = - \left(\sum_{C=1}^{C_{\max}} T_C^t \Delta P_C \right) = 0 \quad (12)$$

Δf^a に対応する運動学的変数は、全体座標系で定義される粒子重心変位と粒子回転を並べた変位増分ベクトル Δx^a で定義する。相対変位増分ベクトル Δf_C と粒子 a, b の変位増分ベクトルとの関係は、次式により与えられる。

$$\Delta U_C = T'_C \Delta x^b - T_C \Delta x^a \quad (13)$$

ここに、 T'_C は、 T_C と対になる座標変換マトリクスであり、従座標変換マトリクスと呼ぶことにする。

つり合い式 (12) を変位増分-相対変位増分関係式 (13) と接触点における線形構成式 (5) を用いて次式のように書き直すことができる。

$$\sum_{C=1}^{C_{\max}} \left(K^{ab} \Delta x^b \right) - K^{aa} \Delta x^a = 0 \quad (14)$$

ここに、主座標変換マトリクス T_C のみを用いた

$$K^{aa} = \sum_{C=1}^{C_{\max}} T_C^t S_C T_C \quad (15)$$

を主要素剛性マトリクス、主座標変換マトリクス T_C および従座標変換マトリクス T'_C を用いた

$$K^{ab} = \sum_{C=1}^{C_{\max}} T_C^t S_C T'_C \quad (16)$$

を従要素剛性マトリクスと呼ぶ。主要素剛性マトリクスは荷重増分 f^a と着目している粒子自身の変位増分 Δx^a に対応する剛性マトリクスであり、従要素剛性マトリクスは隣接粒子の変位増分 Δx^b に対応する剛性マトリクスである。

式 (14) を全粒子に対して重ね合わせると粒状体全体の増分型つり合い式は次式のように与えられる。

$$K \Delta x = 0 \quad (17)$$

ここで、 Δx はそれぞれ全粒子の変位増分ベクトルを並べた変位増分ベクトルである。また、 K は供試体モデル内のすべての粒子間接触点に関する要素剛性マトリクスを重ね合わせた全体剛性マトリクスである。式 (15),(16) で与えられる要素剛性マトリクスは全体剛性

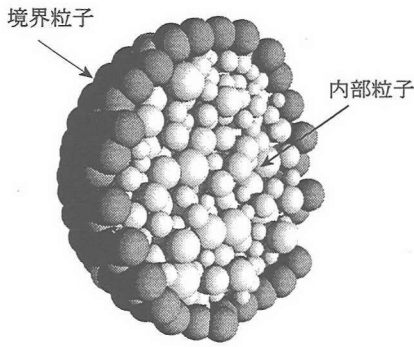


図-4 粒状供試体モデル

マトリクス K の中で次のような位置に入る。

$$K = \begin{bmatrix} K^{aa} & \dots & K^{ab} & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ K^{ba} & & K^{bb} & \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (18)$$

全体剛性マトリクスの各成分のうち、隣接粒子との関係は相対的な位置関係から定まり、非接触粒子との関係においては各成分に0が入ることになる。

2.3 応力、ひずみの定義と境界制御法

粒状体に限らずあらゆる材料に関して要素試験を行う際には、供試体の境界条件が問題となる。これは現実の試験においても共通したことであるが、本来材料試験として望ましくない要因をなるべく避けることが重要である。本研究では、境界制御に伴う異方性をできる限り生じさせないために、領域を概ね球と見なすことができるように境界粒子を設ける(図-4)。境界粒子は、より実現に近い境界条件を与えるために、領域内部の粒子と同様に球形とする。境界粒子はあくまでも境界条件を与えるための便宜的な粒子であり、境界粒子と内部粒子との間には粒子間構成式に従う力のやりとりはあるが、境界粒子同士の間には接触力は生じない。また、境界粒子の回転を拘束することとする。

境界粒子の位置座標 X^B は次式のように、常に変形勾配 F による対称一次変換で定められる位置に移動するものとする。

$$X^B = F X_0^B \quad (19)$$

ここに、 X_0^B は基準状態における境界粒子重心の座標であり、添字 B は、境界粒子を表す。また、粒状供試体の変形勾配テンソル F は、ひずみテンソル ε と次式で関係づけられる。

$$F = I - \varepsilon \quad (20)$$

ここに、 I は2階の単位テンソルである。垂直ひずみは圧縮を正とし、せん断ひずみに関しては座標軸正方向間のなす角の増大を正とする。

境界粒子における内部粒子との間に作用する接触力の合力 f^B は、供試体に対する外力の反力に相当する。外力が境界粒子の移動に対してする仕事を応力がひずみに対してする仕事に等しく置き換えることにより、粒状供試体の平均応力を次式のように定義することができる。

$$\sigma = \frac{1}{V_0} \sum_{B=1}^{B_{\max}} f^B \otimes X_0^B \quad (21)$$

ここに、 σ は第1 Piola-Kirchhoff 応力テンソル、 V_0 は基準状態の領域体積であり、 $\sum_B$ は全境界粒子における総和を意味する。また、 $B_{\max}$ は境界粒子数である。なお、変形が微小な場合、第1 Piola-Kirchhoff 応力テンソルは Cauchy 応力テンソルにほぼ等しい。

前述のように境界粒子は境界条件を与えるためだけの要素であり、最終的に増分型つり合い式に組み込むことを考えれば、平均応力増分テンソルおよびひずみ増分テンソルをベクトルの的に表記しておく方が便利である。応力増分ベクトル

$$\Delta \sigma = \{ \Delta \sigma_{xx} \quad \Delta \sigma_{yy} \quad \Delta \sigma_{zz} \quad \Delta \sigma_{yz} + \Delta \sigma_{zy} \quad \Delta \sigma_{zx} + \Delta \sigma_{xz} \quad \Delta \sigma_{xy} + \Delta \sigma_{yx} \}^t \quad (22)$$

とひずみ増分ベクトル

$$\Delta \varepsilon = \{ \Delta \varepsilon_{xx} \quad \Delta \varepsilon_{yy} \quad \Delta \varepsilon_{zz} \quad \Delta \varepsilon_{yz} \quad \Delta \varepsilon_{zx} \quad \Delta \varepsilon_{xy} \}^t \quad (23)$$

を用いることで、境界粒子についての構成式は次式のように書き換えることが可能である。

$$\Delta \sigma = D \Delta \varepsilon \quad (24)$$

領域の剛体回転を零とすることに対応させて、第1 Piola-Kirchhoff 応力については対称化した成分のみを応力制御に用いる。また、 D は応力-ひずみ関係を与える剛性マトリクスであり、式(21)に境界粒子に関する増分型つり合い式と式(19)、(20)を代入して整理することにより、

$$D = \frac{1}{V_0} \sum_{B=1}^{B_{\max}} \bar{X}_0^B K^B \bar{X}_0^{B^t} \quad (25)$$

と表される。ここに、 $\bar{X}_0^B$ はベクトル表現に伴う座標マトリクスである。また、 K^B は境界要素の要素剛性マトリクスであり、

$$K^B = \sum_{C=1}^{C_{\max}} T_C^{B^t} S_C^B T_C^B \quad (26)$$

と表される。ここに、 T_C^B は接触点 C における局所座標系と全体座標系の変換マトリクスであり、 $C_{\max}$ は各境界粒子 B に接する内部粒子の数である。

粒状要素法においては、式(24)に基づき境界を制御するため、ひずみ制御のみではなく応力制御による要素試験シミュレーションも容易に行うことができる。

2.4 収束条件

これまで示してきたように、3次元粒状要素法は供試体を構成する粒子の3次元的な接触状態から求まる全体剛性マトリクスに基づき、静的つり合い式を任意の境界条件について解く解析手法である。粒状体の全体剛性マトリクスは粒状供試体の変形に伴う接触状態の変化に対応して時々刻々と変化する。静的つり合い式を解く際には、各増分ステップごとに繰り返し計算を行い、逐次解析における収束解を求める。

本研究のシミュレーション試験における逐次解析の収束判定は、次のように応力および各粒子に作用する接触力の合力の残差を調べることにより行う。

$$\frac{|\Delta\sigma - \Delta\sigma^*|}{p_0} \leq 10^{-6}, \quad \frac{|\Delta f - \Delta f^*|}{r_{min}^2 p_0} \leq 10^{-6} \quad (27)$$

ここに、 p_0 は初期等方応力状態の平均応力、 $\Delta\sigma^*, \Delta f^*$ は収束計算過程での応力および接触力の合力である。

3. 応力プローブ試験

ここでは、3次元粒状要素法を用いた2種類の応力プローブ試験を行うことにより、粒状体の3次元的な増分弾塑性挙動、とくに、塑性ひずみ増分応答について考察する。まず、2種類の応力プローブ試験を中心に応力プローブ試験の一連の流れについて述べる。つぎに、応力プローブ試験の結果より得られる塑性ひずみ増分応答を示し、粒状体の塑性変形特性について考察する。

3.1 試験の概要

応力プローブ試験は、ある応力状態におかれた供試体の応力増分-ひずみ増分関係を調べるための試験である。着目している応力状態点を出発点として種々の方向に大きさ一定の応力増分による載荷・除荷を行う一連の試験である。載荷時に生じたひずみ増分のうち、除荷の過程において回復するひずみを弾性ひずみ、非回復ひずみを塑性ひずみと見なすことで、増分弾塑性挙動を検討する。

解析に用いた粒状体モデルは図-5のような断面をもつ粒子数の異なる3種類のモデルとした。モデルにおいて粒子数が少なすぎる場合、境界の拘束の影響や、対象とするモデルに過度に依存した挙動を生じ、粒状体としての材料特性を把握できない可能性が考えられる。そこで、3種類のモデルを用いることでモデルの粒子数に依存しない粒状体の平均的な変形挙動の検討を試みる。これらのモデルは粒径0.2mm~0.6mmの球形粒子をランダムに球状領域に配置して得たものである。各解析モデルを構成する粒子数と間隙比を表-1に示す。また、以下の解析では、接触点での法線および接線方向バネ定数をそれぞれ200kN/m、140kN/mとし、粒子間摩擦角を15°とした。今回用いたパラメータは

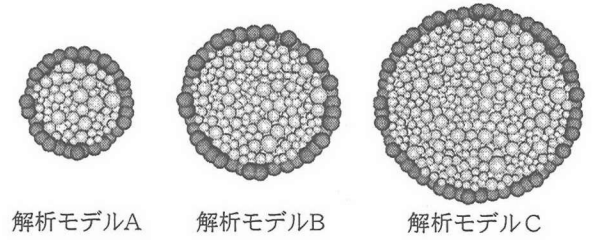


図-5 解析モデル

解析モデル	A	B	C
内部粒子数	338	1340	3276
境界粒子数	202	358	651
初期間隙比	0.332	0.375	0.454

表-1 解析モデルの粒子数と初期間隙比

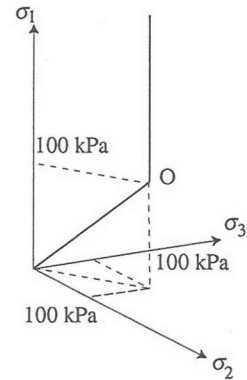
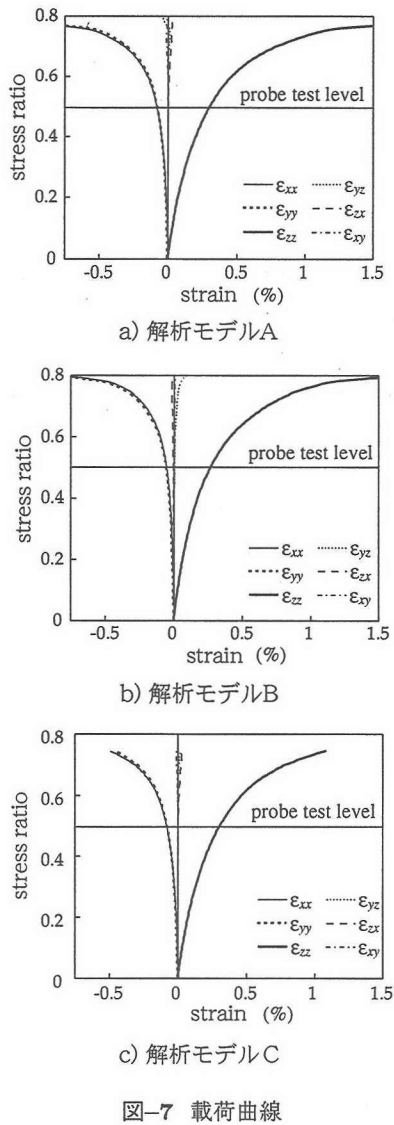


図-6 三軸圧縮載荷経路

豊浦砂の中空ねじり試験¹⁾にフィッティングした解析結果¹⁴⁾を参考に定めている。応力プローブ試験に先だて、各解析モデルを図-6に示すように、100kPaとなるように等方圧縮した後、応力制御による側圧一定三軸圧縮試験を行った。三軸圧縮試験より得られた載荷曲線を図-7に示す。縦軸の応力比は偏差応力のノルム/平均応力を表す。各解析モデルについて、応力プローブ試験は、モデル内部で大きな構造変化が生じていないと思われる応力比0.5の応力状態に対して行った。

図-8に応力プローブ試験の概念図を示す。本研究における応力プローブ試験は主応力空間内の2つの面内で行う。2つのプローブ面は、試験点A周りの局所座標空間を定める主応力空間内の基底ベクトル(l_A, m_A, n_A)によって特徴づけられる。これらの基底ベクトルは、試験点Aの応力 σ_A および試験点Aと等方応力状態の基準点Oの応力 σ_O で表現される。

$$l_A = \frac{\sigma_A}{|\sigma_A|}, n_A = \frac{\sigma_A - \sigma_O - (\sigma_A - \sigma_O) \cdot l_A l_A}{|\sigma_A - \sigma_O - (\sigma_A - \sigma_O) \cdot l_A l_A|},$$



$$m_A = n_A \times l_A$$

試験点 A 周りの局所座標系を定める基底ベクトル (l_A, m_A, n_A) は、図-9 のような降伏曲面を仮定すると、 l_A は現在の応力の方向、 n_A は降伏曲面の外向き法線方向、 m_A は降伏曲面の外向き接線方向を定める単位ベクトルと見なすことができる。

プローブ試験 1 は l_A, n_A を含む面内の応力プローブ試験である (図-8b)。 $-n_A$ 方向を 0° 、 l_A 方向を 90° とし、 5° 間隔 72 方向への荷重・除荷を行う。各応力増分に対して側圧は常に等方的である。一方、プローブ試験 2 は m_A, n_A を含む面内の応力プローブ試験である (図-8c)。 $-n_A$ 方向を 0° 、 m_A 方向を 90° とし、 5° 間隔 72 方向への荷重・除荷を行う。側圧に主応力差を生じ、三軸圧縮試験とは異なるせん断を生じさせる応力プローブ試験である。以上 2 種類の応力プローブ試験を通して、応力主軸非回転時の粒状体の真三軸の増分弾塑性挙動の考察を行う。

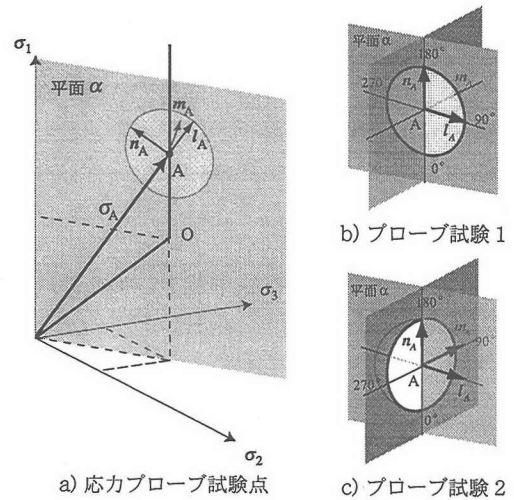


図-8 応力プローブ試験概念図

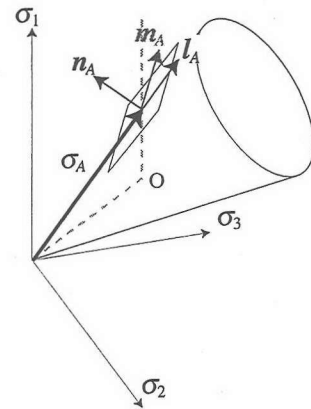
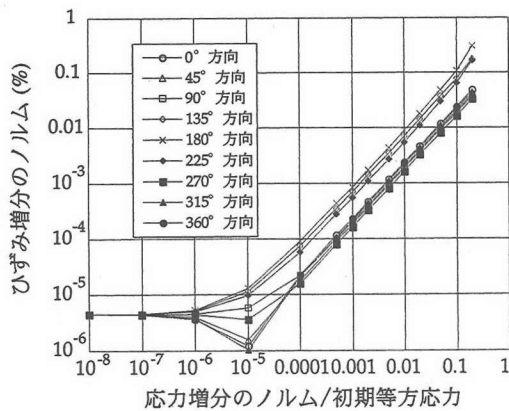


図-9 局所座標基底概念図

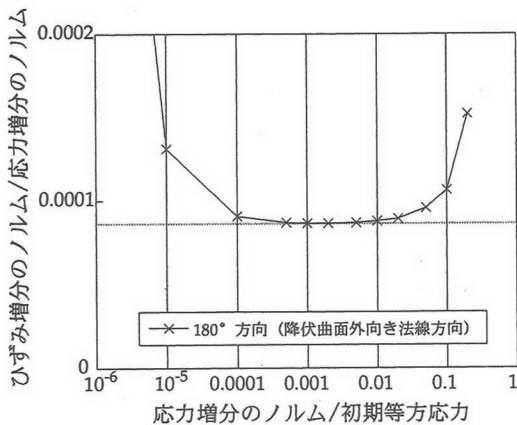
3.2 応力増分の大きさの検討

増分型の構成式の考察に適する応力増分を設定するために、大きさの異なる応力増分に対し応力プローブ試験を行い、応力プローブ試験に用いる応力増分について検討する。

プローブ試験 1 での解析モデル B に対する応力増分に関する検討結果を図-10 に示す。なお、他のモデルに関してもほぼ同様の結果を示す。図-10a は、初期等方応力で正規化した応力増分とひずみ増分のノルムの関係を対数グラフに示した図である。図中、応力増分と初期等方応力の比が 0.0001 より小さい時は、徐々にある値に収束し始める傾向が認められる。さらに、応力増分が初期等方応力の 10^{-6} 以下になると、ひずみ増分のノルムは荷重方向にも依らずほぼ一定値に収束している。この値は式 (27) から数値誤差と考えられ、初期等方応力に対しノルムの比が 0.0001 より小さいの応力増分は本解析における精度に対して不適切であるといえる。図-10b には、ひずみ増分のノルムを応力



a) ひずみ増分のノルム



b) ひずみ増分のノルム / 応力増分のノルム

図-10 応力増分の検討

増分のノルムで除した値を縦軸に図示する。同図より、応力増分が初期等方応力の比が0.02以上になると、ひずみ増分のノルムは応力増分のノルムに比例しなくなることが確認される。これは応力増分が大きすぎるために、対象とする応力状態に起因した変形挙動を得られていないことを示している。

以上の検討結果より、式(27)で定義される解析精度に対して、応力増分は初期等方応力の0.0001~0.02程度のノルムを有する応力増分を設定することがふさわしいと考える。そこで、全ての解析を通じて初期等方応力は100kPaと設定しているのを、応力増分のノルムを0.1kPaと設定し、応力プローブ試験を行うものとする。

3.3 塑性ひずみ増分応答について

図-11は、各解析モデルの塑性ひずみ増分の垂直ひずみ成分を3次元空間にプロットした図である。なお、せん断ひずみ成分に関しては垂直ひずみ成分と比べて非常に小さいため垂直ひずみ成分はほぼ主ひずみと見なすことができる。図ではプロット点1につき、1つの方向の載荷・除荷より得られた塑性ひずみ増分を

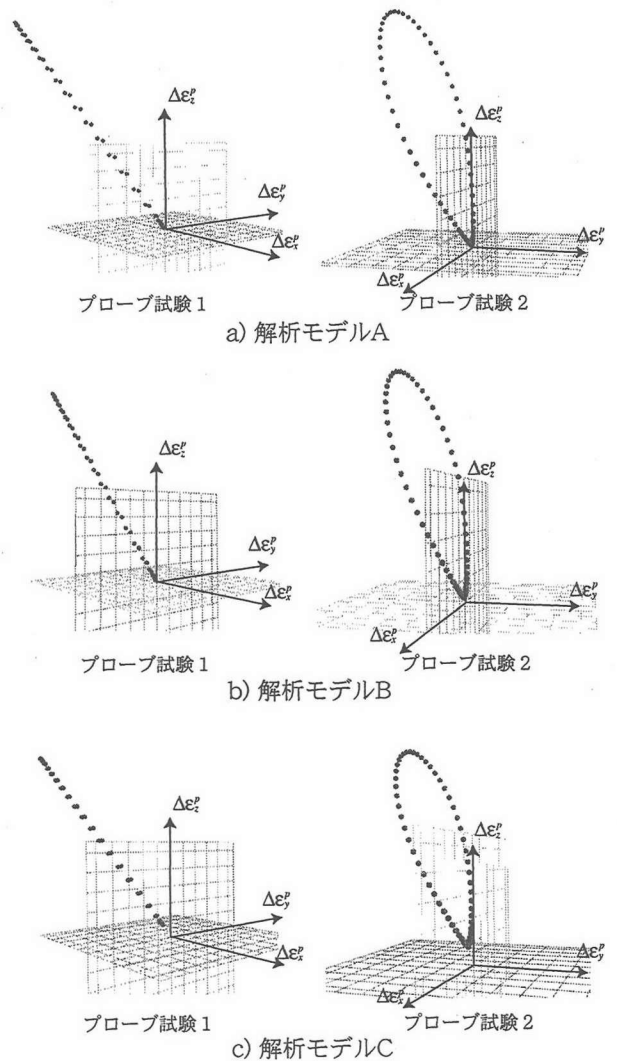


図-11 塑性ひずみ増分 (3次元空間)

表している。図中、プローブ試験1では各モデルともに応力増分方向によらず、塑性ひずみ増分はほぼ同一方向に発生している。一方で、側圧に主応力差を生じさせ三軸圧縮試験と異なるせん断を生じさせるようなプローブ試験2では、塑性ひずみ増分は同一直線上には並ばず、増分非線形性を示すことがわかる。このように、応力主軸非回転時においても、粒状体の塑性ひずみ増分応答はへら状に拡がり増分非線形性を示す。

応力プローブ試験面の違いにより現れた相違点をより詳細に考察するために、塑性ひずみ増分を (l_A, m_A, n_A) 方向成分に分解する。いま、応力主軸は全体座標系の座標軸と常に等しいので、全体座標系においても (l_A, m_A, n_A) 方向を定義することができる。図-12は、縦軸に塑性ひずみ増分の各成分、横軸に応力増分方向を示した図である。横軸の応力増分方向は各試験において図-8b, 8cに示した方向に一致している。つまり、各試験における180°方向を降伏曲面の外向き法線方向と見なすことができ、古典的塑性論の降伏基準に

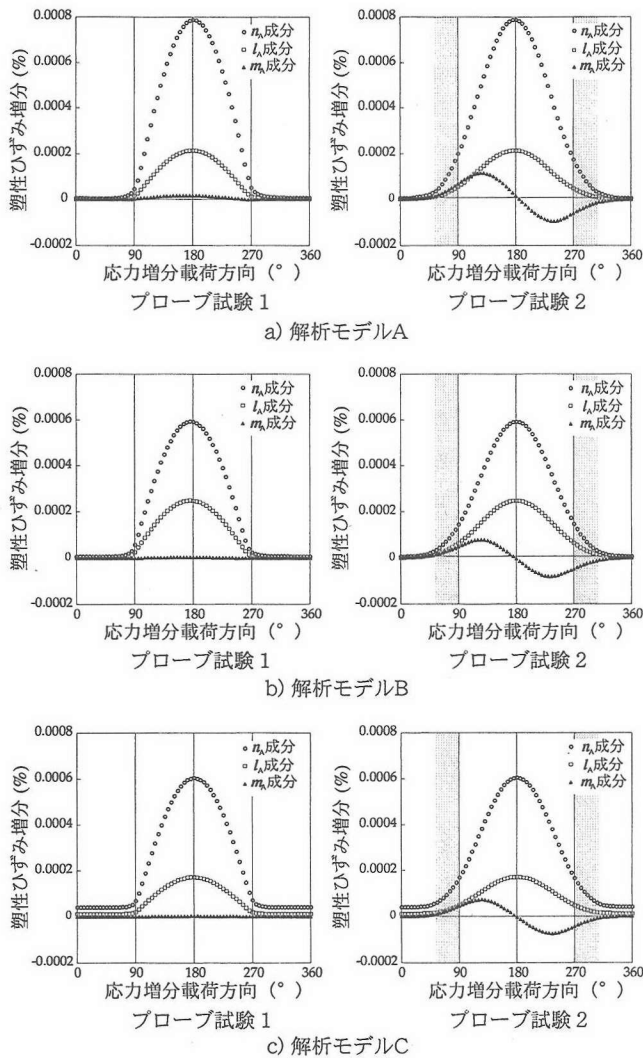


図-12 塑性ひずみ増分

よれば $90^\circ \sim 270^\circ$ を境として塑性と弾性とが分けられるはずである。図-12において、プローブ試験1ではほぼ $90^\circ \sim 270^\circ$ の間に塑性ひずみ増分が生じている。また、 l_A 方向成分の塑性ひずみ増分も非零であることから、非関連流動則に類似した応答を示すことが窺える。しかしながら、プローブ試験2では、 m_A 方向成分の塑性ひずみ増分において降伏曲面接線方向の応力増分依存性が認められ、塑性ひずみ増分応答が増分非線形性を示すことが確認される。これは側圧に主応力差が発生し、未経験のせん断が生じたことに起因する現象であると考えられる。

また、同図において、塑性ひずみ増分が生じる応力増分方向は、プローブ試験1ではほぼ $90^\circ \sim 270^\circ$ の間であるのに対して、プローブ試験2ではほぼ $60^\circ \sim 300^\circ$ の間で塑性ひずみ増分が生じている。つまり、粒状体においては古典的塑性論の降伏基準が適用できないことを示しており、粒状体の増分弾塑性挙動を考える上で重要な知見が得られた。

4. 構成モデル^{15),16),17)}との比較

地盤材料における増分非線形性は応力増分方向依存性と等価に扱われることが多い。そのため、応力増分方向依存性を考慮した構成モデルが提案されている。また、前節においても、プローブ試験1, 2の違いによって生じる塑性ひずみ増分の非線形性は m_A 方向（降伏曲面接線方向）の応力増分に大きく依存することが確かめられた。つまり、粒状体の3次元的な増分弾塑性挙動は、荷重方向によっては応力増分方向に依存し増分非線形性を示した。そこで、現在、提案されている応力増分接線方向成分依存性を考慮するモデルと解析結果との比較を行う。

J_2 -変形理論¹⁵⁾では、流動則は以下の式で表される。

$$\Delta \varepsilon_{ij}^p = a m_{ij} n_{kl} \Delta \sigma_{kl} + b (\delta_{ik} \delta_{jl} - n_{ij} n_{kl}) \Delta \sigma'_{kl} \quad (28)$$

塑性ひずみ増分を生じる条件は、右辺第1項、第2項ともに通常の塑性論と同様に定められる。 a, b は比例定数である。右辺第2項が応力増分の接線方向成分である。図-13には J_2 -変形理論による算出値を図示する。右辺第2項により、塑性ひずみ増分の m_A 方向成分が非零となることが確認される。しかし、降伏条件より、荷重方向 $90^\circ \sim 270^\circ$ の応力増分に対する塑性ひずみ増分しか発生できず、プローブ試験2の塑性ひずみ増分応答を精度良く表現できているとは言い難い。

J_2 -変形理論のような塑性ひずみ増分応答におけるジャンプを防止するモデルとして、Hashiguchi らは下負荷面に接線塑性を付加したモデル（接線塑性モデル）を提案している^{16),17)}。接線塑性モデルの流動則は以下の式で表される。

$$\Delta \varepsilon_{ij}^p = a n_{ij} n_{kl} \Delta \sigma_{kl} + b (\delta_{ik} \delta_{jl} - n_{ij} n_{kl}) \Delta \sigma'_{kl} \quad (29)$$

流動則に関する J_2 -変形理論との相違点は、法線成分項（右辺第1項）が関連型になることと、接線成分は降伏基準に関係なく全ての応力増分において発生する点である。図-14に示すように、塑性ひずみ増分の m_A 方向成分が全方向の応力増分に対しても発生している。また、安定条件等への配慮により関連型となることから塑性ひずみ増分の l_A 方向成分が0になり、解析結果との相違点の確認される。

以上のように、増分非線形性を評価できるとされる応力増分接線方向成分依存性を考慮したモデルであっても、本解析で得られたような粒状体の増分非線形性を完全には表現できていない。このことから、粒状体の増分非線形性は線形モデルによる評価が極めて困難な変形特性であることが窺える。

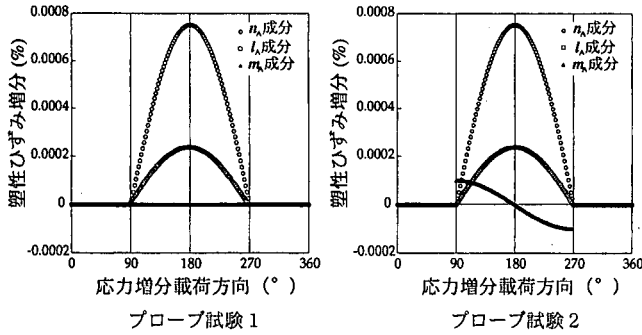


図-13 J_2 -変形理論

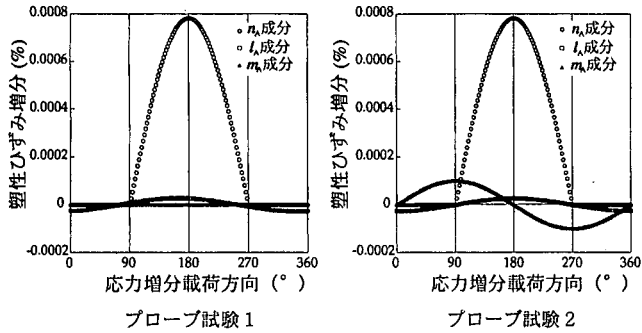


図-14 接線塑性モデル

5. 固有変形解析¹⁰⁾に基づく塑性変形メカニズムの考察

これまでに示したような粒状体の変形特性は粒子配置・接触等の微視的な内部構造に依存すると考えられる。そこで、粒状体の微視的内部構造を反映した剛性マトリクスを用いて、文献 10) で提案された固有変形解析¹⁰⁾を行う。固有変形解析は、3次元粒状要素法定式化の過程で導出される増分型の剛性マトリクスに対し固有値解析を行う数値試験である。

5.1 固有変形解析

粒状要素法は構成要素の位置データおよび要素間接触力データに基づく剛性行列を用いる解析手法であり、シミュレーション試験における各ステップの粒子データから容易に増分型の全体剛性関係式を得る。

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}^* \mathbf{U} \quad (30)$$

ここに、 $\mathbf{K}^*$ は式 (18) の全体剛性マトリクス $\mathbf{K}$ に境界条件を考慮した全体剛性マトリクスであり、その際の変位増分 $\Delta \mathbf{x}$ を $\mathbf{U}$ と記述しておく。内部粒子数が M_G であるモデルにおいて、全体剛性マトリクス $\mathbf{K}^*$ の次数 $N = 6M_G + 6$ となる。

このような全体剛性マトリクス $\mathbf{K}^*$ に対して固有値

解析を行う。

$$\mathbf{K}^* \mathbf{U}_n = \lambda_n \mathbf{U}_n \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (31)$$

ここに、 λ_n は固有値、 $\mathbf{U}_n$ は固有ベクトルである。各固有ベクトルを $|\mathbf{U}_n| = 1$ となるように正規化しておけば、固有ベクトルの直交性より、任意の変形増分ベクトル $\mathbf{U}$ は固有変形モードの線形結合として表される。

$$\mathbf{U} = \sum_{n=1}^N a_n \mathbf{U}_n \quad (32)$$

次に、式 (32) の右辺 m 項 ($m \leq N$) までの線形結合 $\mathbf{U}^m$ による変形増分ベクトル $\mathbf{U}$ の近似度 A_m を次式で定義する。

$$A_m = |\mathbf{U}^m|/|\mathbf{U}| \quad (33)$$

ここに、

$$\mathbf{U}^m = \sum_{n=1}^m a_n \mathbf{U}_n \quad (34)$$

である。1つの試験点から得られる固有ベクトルの組み合わせは1組のみであり、応力プローブ試験結果と組み合わせることで、試験点での増分弾塑性挙動の変形モードを知ることができる。

5.2 固有変形解析結果と考察

図-15 は、2種類の応力プローブ試験より得られた解析モデル A, B の変形増分 $\mathbf{U}$ に対する近似度 A_m を示した図である。図中、横軸の固有値番号は固有値の小さい順に並べた番号である。これらの図より、解析モデル A, B とほぼ同様の解析結果が得られることがわかる。解析モデル A, B では剛性マトリクスの次数や固有ベクトルの組み合わせが異なるため、両モデル間での変形モードの等価性については議論することはできないが、両解析モデルともにプローブ試験1と2とでは非常に似通った明らかな差異が観察される。

まず、プローブ試験1では変形モードが塑性ひずみを生じる载荷と生じない载荷とで2つのモードに大別できることがわかる。つまり、弾性変形と塑性変形とでは変形モードが異なることを示している。

一方、プローブ試験2では、塑性ひずみ増分を生じた载荷においても载荷方向の違いによって変形モードが2種のモードに分割され、塑性ひずみ増分を生じない载荷を含めて3つの変形モードが確認される。120°, 180°, 240° 方向 (古典的塑性論における降伏曲面外) への载荷では、プローブ試験1, 2の両試験を通じてほぼ同傾向の A_m が得られる。しかし、プローブ試験2では、90°, 270° 方向への試験結果において明らかに他の载荷方向の結果と異なる塑性変形のモードが確認される。つまり、プローブ試験2では、プローブ試験1で観察される塑性変形モードとそれとは異なる塑性変形モードが混在している。

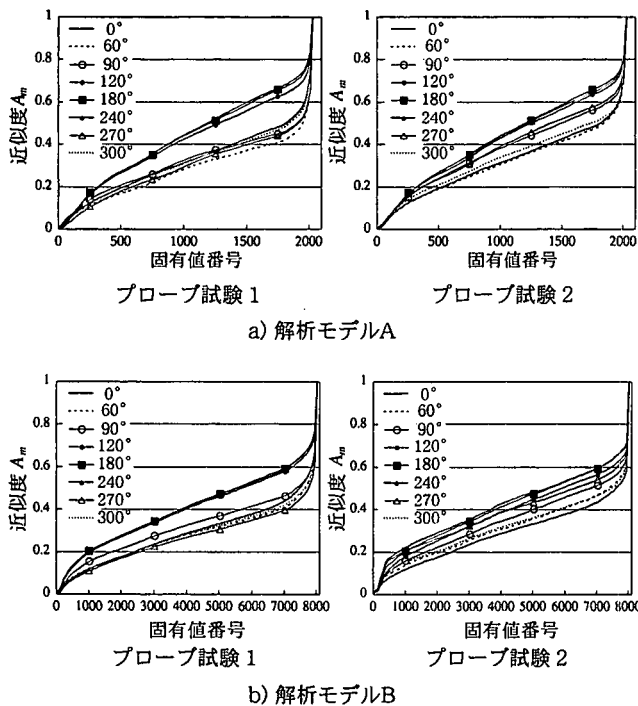


図-15 変形モード

以上のような応力増分方向の違いに伴う粒状体の変形モードの差異は、解析モデルの違いによらず確認される。すなわち、粒状体の塑性変形においては、古典的塑性論で表現可能な塑性変形と表現不可能な塑性変形の複数の変形メカニズムが複合的に生じることで、塑性ひずみ増分が増分非線形性を示すと考えられる。

6. おわりに

3次元粒状要素法に基づく2種類の応力プローブ試験を行い、より一般的な粒状体の3次元変形挙動の把握を試みた。今回の解析では、応力プローブ試験の結果より、粒状体は未経験のせん断を受けることで、応力主軸非回転時においても増分非線形性を示すことが確認された。また、その際には、古典的塑性論の降伏曲面内向き方向の応力増分に対しても塑性ひずみが生じ、古典的塑性論の降伏基準を適応できないことも確認された。

このような応力プローブ試験結果は、増分非線形性を評価できるとされる応力増分接線方向成分依存性を考慮した線形モデルであっても完全に表現することができなかった。このことから、粒状体の増分非線形性は線形モデルによる評価が困難であり、極めて非線形性の強い変形特性であることが窺える。

さらに、固有変形解析結果により、塑性変形のメカニズムは微視的内部構造に起因した複数のメカニズムに大別されることが確かめられた。これら複数の塑性変形メカニズムが複合的に生じるため、粒状体の変形特

性には増分非線形性が潜在的に内包すると考えられる。

謝辞：本稿をまとめるにあたり、東北大学大学院助手の堤成一郎氏から構成モデルに関する様々な意見を頂いた。記して感謝の意を表します。

参考文献

- 1) Pradel, D., Ishihara, K. and Gutierrez, M.: Yielding and flow of sand under principal stress axes rotation, *Soils and Foundations*, Vol.30, pp.87-99, 1990.
- 2) Kolymbas, D. ed.: *Constitutive Modelling of Granular Materials*, Springer-Verlag, New York, 2000.
- 3) Anandarajah, A., Sobhan, K. and Kuganethira, N.: Incremental Stress-Strain Behavior of Granular Soil, *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, Vol. 121, pp. 57-67, 1995.
- 4) 武 建勲, 岸野佑次, 京谷孝史: 2次元モデルプローブ試験による弾塑性挙動の考察, 構造工学論文集, JSCE, Vol.44A, pp. 399-408, 1998
- 5) 武 建勲, 岸野佑次, 浅沼秀雄: マイクロメカニズムによる粒状体の流動則の考察, 応用力学論文集, JSCE, Vol.1, pp. 497-506, 1998.
- 6) 金子賢治, 岸野佑次: 粒状体の流動則における応力増分依存性に関する微視力学的研究, 応用力学論文集, Vol.4, pp.385-396, 2001.
- 7) 赤井澤裕幸, 岸野佑次, 金子賢治: 3次元プローブシミュレーション試験による粒状体の増分弾塑性挙動の研究, 土木学会東北支部研究発表会講演概要集, pp.274-275, 2001.
- 8) Kishino, Y., Akaizawa, H. and Kaneko, K.: On the plastic flow of materials, *Powders and Grains 2001*, pp.199-202, 2001.
- 9) 岸野佑次: 新しいシミュレーション法を用いた粒状体の準静的挙動の解析, 土木学会論文集, No.406/III-11, pp.97-116, 1989.
- 10) 岸野佑次: 粒状体の固有変形解析, 土木学会論文集, No. 481/III-25, pp. 87-95, 1993.
- 11) Kishino, Y.: The incremental nonlinearity observed in numerical tests of granular media, *CD-ROM Proceedings of 15th ASCE Engineering Mechanics Conference*, 2002.
- 12) 土質試験の方法と解説 (第一回改訂版), 地盤工学会, 2000.
- 13) Johnson, K. L.: *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- 14) 金子賢治, 石井建樹, 鳴海 渉, 岸野佑次: 応力主軸回転を受ける粒状体の塑性ひずみ増分応答の考察, 応用力学論文集, Vol.5, 2002, 投稿中
- 15) Rudnicki, J. W. and Rice, J. R.: Conditions for localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 23, pp. 371-394, 1975.
- 16) Hashiguchi, K., Tsutsumi, S.: Elastoplastic constitutive equation with tangential stress rate effect, *Int. J. Plasticity*, Vol. 17, pp. 117-145, 2001.
- 17) 堤 成一郎, 橋口公一, 岡安崇史, 齋藤公志郎, 杉本昌也: 接線ストレッチングを考慮した下負荷面モデルの力学的応答特性, 応用力学論文集, JSCE, Vol. 4, Vol. 4, pp. 375-382, 2001

(2002 年 4 月 19 日 受付)