

応力主軸回転を受ける粒状体の塑性ひずみ増分応答の考察

Plastic Flow of Granular Media under the Principal Stress Axes Rotation

金子賢治*・石井建樹**・鳴海 渉***・岸野佑次****

Kenji KANEKO, Tateki ISHII, Wataru NARUMI and Yuji KISHINO

*正会員 工博 八戸工業大学 工学部 環境建設工学科 (〒 031-8501 八戸市大字妙字大開 88-1)

**学生会員 工修 東北大学大学院 工学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

***学生会員 工学 東北大学大学院 工学研究科 (同 上)

****フェロー 工博 東北大学大学院 工学研究科 (同 上)

We discuss the plastic flow of granular media performed under the principal stress axes rotation with the aid of numerical experiments. A series of numerical tests consists of the shear tests and the stress probe tests using a 3-dimensional Granular Element Method. We examine incremental plastic strain response under the principal stress axes rotation in detail after determining parameters for simulations by comparing shear test simulations with experimental results in literature. In particular, on the incremental non-linearity of the plastic strain increment, we discuss the similarity between real experiments and simulations, as well as the mechanism of the nonlinearity.

Key Words : *incremental non-linearity, multiple deformation mechanism, plastic flow, principal stress axis rotation*

1. はじめに

古典的な金属塑性論に基づく構成モデルは、土などの粒状体に対しても広く適用されている最も一般的なモデルである。しかし、近年、実験技術の飛躍的な進歩により古典的塑性論では表現できない変形特性が指摘されている。特に、古典塑性論における流動則の仮定が成立せず、塑性ひずみ増分の生じる方向は応力増分方向に依存して変化することが実験的に示されている^{1), 2)}。安定性などの材料の性質を議論する場合や変形の局所化解析などのように載荷経路が急変するような解析を行う場合には、古典塑性論では表現できない性質を取り込んだ、より厳密な構成モデルが必要となる。

塑性ひずみ増分の応力増分方向依存性を表現することのできる連続体モデルが幾つか提案されているが、これらは増分非線形モデル^{3), 4)}と古典的塑性論を拡張した増分線形モデル^{5), 6)}とに大別される。一般に、増分非線形性とは、塑性ひずみ増分 $d\epsilon^p$ が応力増分方向に依存して変化するために、応力増分 $d\sigma$ の線形式で表現できない性質を意味する。つまり、増分非線形モデルは塑性ひずみ増分と応力増分の関係が非線形式で表される連続体モデルである。これに対して、古典的塑性論を拡張した流動則は古典的流動則に降伏曲面接線方向の応力増分による塑性ひずみ増分の成分を付加したものであり、増分線形で表される。増分線形モデルの方がより簡便なモデルではあるが、塑性ひずみ増分の応力増分方向依存性が線形で表せる程度のものであるのか、また、増分非線形モデルでしか表せない程度であるのかは未だ明らかではない。したがって、厳密

な構成モデルの定式化においては、塑性ひずみ増分の増分非線形性の程度やその発生メカニズムについて詳細に検討・把握することが重要である。

Pradel ら¹⁾は、豊浦砂を用いた中空ねじり試験により応力プローブ試験を行い、応力主軸回転時には塑性ひずみ増分の応力増分依存性が現れることを示した。さらに、応力増分方向依存性の主たる要因が応力主軸回転であると述べている。ただし、実際に応力主軸非回転時のプローブ試験は行っておらず、確固たる結論には至ってはいない。一方、数値シミュレーションは実験に伴う再現性の問題や任意の応力制御に対して非常に有効であり、この種の詳細な検討・考察に対して非常に有利な手段である。粒状要素法⁷⁾を用いた数値シミュレーションによれば、応力主軸回転を伴わない場合でも塑性ひずみ増分の応力増分方向依存性が現れることが示されている⁸⁾⁻¹¹⁾。しかしながら、応力主軸回転を受ける粒状体の塑性ひずみ増分応答の検討は行われていない。

本研究では、粒状体の塑性ひずみ増分の応力増分方向依存性の程度や発生メカニズムを把握することを目的として、3次元粒状要素法⁹⁾によるせん断載荷および主軸回転を伴う応力プローブ試験シミュレーションを行う。まず、Pradel らの実験結果との比較を通して、実材料の変形挙動評価に対する粒状要素法の適用性について検討し、実験結果と整合する解析パラメータを設定する。次に、定めたパラメータを用いて種々の応力プローブ試験を行い、粒状体の塑性ひずみ増分の応力増分方向依存性について、特に、応力主軸回転の影響について考察する。

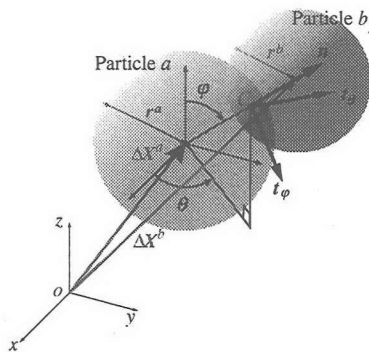


図-1 座標系の設定

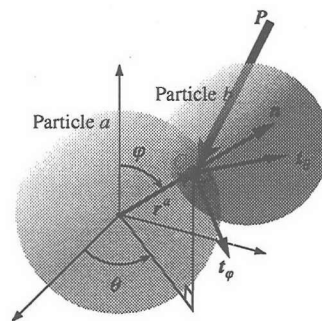


図-2 粒子間接触力

2. 3次元粒状要素法の概要

本論文では、3次元粒状要素法^{9), 11)}を用いた数値シミュレーションを行うが、実際の砂の実験結果との比較を行うため、ここでは、想定したモデル化と境界制御法についてのみ示しておく。なお、定式化の詳細は文献¹²⁾を参照されたい。

2.1 粒子間構成式と制約条件

実際の砂は様々な複雑な形状の粒子の集合体であるが、粒状要素法においてはこれを球形に理想化する。また、粒子自身は剛体要素とし粒子の弾性的な変形は粒子間に設定した構成式で表現する。ここでは、粒子間に設定する構成式と制約条件について述べる。

図-1のような接触状態にある球形粒子 a , b の半径をそれぞれ r^a , r^b とする。同図の粒子 a に着目して粒子 b との接触点における外向き単位法線ベクトル n を定義する。粒子 a , b の重心の位置ベクトルをそれぞれ X^a , X^b とすれば単位法線ベクトルは、

$$n = \frac{(X^b - X^a)}{|X^b - X^a|} \quad (1)$$

である。 n に直交する単位接線ベクトル t_φ , t_θ をそれぞれ図-1 に示す方向に定めると、 (n, t_φ, t_θ) は粒子 a と粒子 b との接触点 C における右手系直交座標の基底ベクトルとなる。粒子間接触点における接触力や2粒子間の相対変位は接触点毎に (n, t_φ, t_θ) を基底ベクトルとする局所的な直交座標系で表される。

図-2 に示す粒子 a に着目して粒子間接触力を定義する。 a , b の接触点 C において、粒子 b から粒子 a に作用する接触力ベクトルを次式のように定める。

$$P_C = \{P_n \ P_\varphi \ P_\theta\}_C^t \quad (2)$$

ここで、接触力ベクトルの各成分は局所座標系の基底ベクトルを用いて表される。

$$P_n = -P \cdot n, \ P_\varphi = -P \cdot t_\varphi, \ P_\theta = -P \cdot t_\theta \quad (3)$$

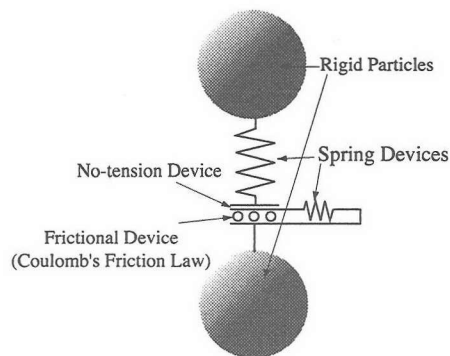


図-3 粒子間構成モデル

一方、接触力ベクトル P に対応する運動学的変数は相対変位ベクトル

$$U_C = \{u_n, u_\varphi, u_\theta\}_C^t \quad (4)$$

であり、接触力ベクトル同様に接触点における局所座標系で定義される。

図-3 に粒子間接触点の構成モデルを示す。粒子間の接触力と相対変位の関係は、厳密には Hertz 理論¹³⁾ のような非線形性を考慮して定めるべきものであるが、粒子がすべりを生じるまでの相対変位は微小と考え、接触点における増分形の構成式はすべりが生じない限り以下の線形関係を仮定する。

$$\Delta P_C = S_C \Delta U_C \quad (5)$$

ここに、

$$S_C = \begin{bmatrix} k_n & 0 & 0 \\ 0 & k_t & 0 \\ 0 & 0 & k_t \end{bmatrix} \quad (6)$$

は、接触点 C における仮想バネ剛性マトリクスである。

離散的な粒子の集合体である粒状体においては、接触・摩擦条件により変形が拘束される。これらの拘束条件を表すために接触点には仮想バネ要素に加えてノーテンション要素、摩擦性要素を仮定する。なお、本論文では非粘着性材料を対象とし粒子間粘着力は考慮しないものとする。

摩擦性要素は粒子間のすべりを想定したもので、接触力の接線方向成分が Mohr-Coulomb の摩擦則で表される条件

$$|P_t| \geq P_n \tan \phi_\mu \quad (7)$$

を満たす場合、粒子間にすべりが生じることとし、次式のように強制的にこの限界値に戻す修正を行う。

$$P'_t = \frac{P_t}{|P_t|} P_n \tan \phi_\mu \quad (8)$$

ここに、 ϕ_μ は粒子間摩擦角であり、 P_t は次式で定義される接触点における接線方向接触力ベクトルである。

$$P_t = P_\varphi t_\varphi + P_\theta t_\theta \quad (9)$$

また、粒子同士の接触条件は

$$u_n > 0 \quad (10)$$

で与えられる。接触条件を満たさない場合には接触力は強制的に 0 とおく。

前述のように粒子自身は弾性体を想定しているが、粒子間接触点における接触・摩擦条件によって粒子の移動が制約され、粒状集合体として非線形な材料応答を示す。粒状体の非線形挙動の本質は接触・摩擦の問題であり、粒子自身の弾性的な変形の影響はそれほど大きくはないと考えられる。したがって、式 (5) における仮想バネ剛性は十分に大きい値を選ぶことが必要である。粒状要素法は、ここで示した粒子間構成式と制約条件を用いて粒状体の静的な釣り合い式を任意の境界条件に基づいて解く解析手法である。

2.2 応力、ひずみの定義と境界制御法

粒状体に限らずあらゆる材料に関して要素試験を行う際には、供試体の境界条件が問題となる。これは現実の試験においても共通したことであるが、本来材料試験として望ましくない要因をなるべく避けることが重要である。本研究では、境界制御に伴う異方性をできうる限り生じさせないために、領域を概ね球と見なすことができるように境界粒子を設ける (図-4)。より実現に近い境界条件を与えるために、境界粒子は領域内部の粒子と同様に球形とする。境界粒子はあくまでも境界条件を与えるための便宜的な粒子であり、境界粒子と内部粒子との間には粒子間構成式に従う力のやりとりはあるが、境界粒子同士の間には接触力は生じない。また、境界粒子の回転を拘束することとする。

境界粒子の位置座標 X^B は次式のように、常に変形勾配 F による対称一次変換で定められる位置に移動するものとする。

$$X^B = F X_0^B \quad (11)$$

ここに、 X_0^B は基準状態における境界粒子重心の座標であり、添字 B は、境界粒子を表す。また、粒状供試

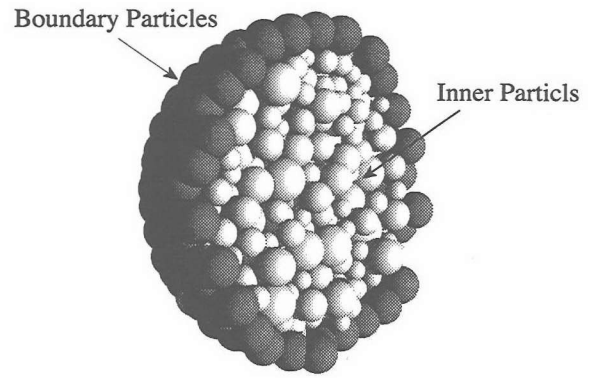


図-4 境界粒子と内部粒子

体の変形勾配テンソル F は、平均ひずみテンソル ϵ と次式で関係づけられる。

$$F = I - \epsilon \quad (12)$$

ここに、 I は 2 階の単位テンソルである。垂直ひずみは圧縮を正とし、せん断ひずみに関しては座標軸正方向間のなす角の増大を正とする。

境界粒子に内部粒子から作用する接触力の合力 f^B は、供試体に対する外力の反力に相当する。外力が境界粒子の移動に対してする仕事を応力がひずみに対してする仕事に等しく置き換えることにより、粒状供試体の平均応力を次式のように定義することができる⁷⁾。

$$\sigma = \frac{1}{V_0} \sum_{B=1}^{B_{\max}} f^B \otimes X_0^B \quad (13)$$

ここに、 σ は第 1 Piola-Kirchhoff 応力テンソル、 V_0 は基準状態の領域体積であり、 $\sum_B$ は全境界粒子における総和を意味する。また、 $B_{\max}$ は境界粒子数である。

前述のように境界粒子は境界条件を与えるためだけの要素であり、最終的に増分形つり合い式に組み込むことを考えれば、平均応力増分テンソルおよび平均ひずみ増分テンソルをベクトル的に表記しておく方が便利である。応力増分ベクトル

$$\Delta\sigma = \{ \Delta\sigma_{xx} \quad \Delta\sigma_{yy} \quad \Delta\sigma_{zz} \quad \Delta\sigma_{yz} + \Delta\sigma_{zy} \quad \Delta\sigma_{zx} + \Delta\sigma_{xz} \quad \Delta\sigma_{xy} + \Delta\sigma_{yx} \}^t \quad (14)$$

とひずみ増分ベクトル

$$\Delta\epsilon = \{ \Delta\epsilon_{xx} \quad \Delta\epsilon_{yy} \quad \Delta\epsilon_{zz} \quad \Delta\epsilon_{yz} \quad \Delta\epsilon_{zx} \quad \Delta\epsilon_{xy} \}^t \quad (15)$$

を用いることで、境界粒子についての構成式は次式のように書き換えることが可能である。

$$\Delta\sigma = D \Delta\epsilon \quad (16)$$

領域の剛体回転を零とすることに対応させて、第 1 Piola-Kirchhoff 応力については対称化した成分のみを応力制御に用いる。また、 D は応力ひずみ関係を与える剛性行列であり、式 (13) に境界粒子に関する増分形つり合い式と式 (11), (12) を代入して整理することにより、

$$D = \frac{1}{V_0} \sum_{B=1}^{B_{\max}} \bar{X}_0^B K^B \bar{X}_0^{B^t} \quad (17)$$

と表される。ここに、 $\bar{X}_0^B$ はベクトル表現に伴う座標マトリックスである。また、 K^B は境界要素の要素剛性マトリックスであり、

$$K^B = \sum_{C=1}^{C_{\max}} T_C^{B^t} S_C^B T_C^B \quad (18)$$

と表される。ここに、 T_C^B は接触点 C における局所座標系と全体座標系の変換マトリックスであり、 $C_{\max}$ は境界粒子 B の接触粒子数である。

粒状要素法においては、式 (16) に基づいて境界を制御するため、ひずみ制御のみではなく応力制御による要素試験シミュレーションも容易に行うことができる。

3. Pradel らの実験との比較

ここでは、3次元粒状要素法を用いて Pradel ら¹⁾の実験と同等のせん断載荷シミュレーションおよび応力プローブ試験シミュレーションを行い、実験結果と比較する。また、実在の材料の変形挙動予測に対する粒状要素法の適用性について検討する。

3.1 解析モデル

シミュレーションに用いた粒状体解析モデルの断面図を図-5に示す。本解析モデルの総粒子数は1698個で内部粒子、境界粒子がそれぞれ1340個、358個である。また、解析モデルは3次元空間内に粒径0.2-0.6mmの異なる内部粒子をランダムに発生させ、それを取り囲むように境界粒子を配置した。なお、Pradel らの実験における空隙率は0.7程度であるが、解析モデルの初期空隙率は0.375であり異なっている。これは、初期状態作成が空隙率を制御して行うことができないこと、粒子を球形に理想化しているため密詰めになりやすいことが原因で、完全に一致させることが困難であったためである。このように、ここで行うシミュレーションは実験となるべく同条件にするように設定したが、数値計算上の制約から多少異なる条件を有することを明記しておく。また、ここでのシミュレーションには法線方向バネ定数280 kN/m、接線方向バネ定数196 kN/m、粒子間摩擦角 13° を用いた。

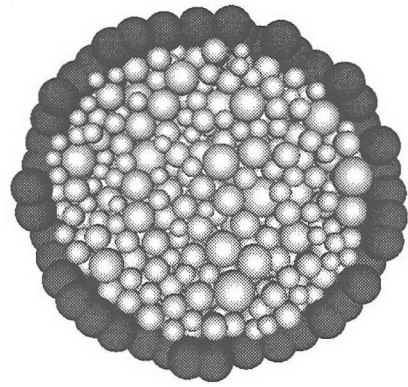


図-5 粒状体解析モデル

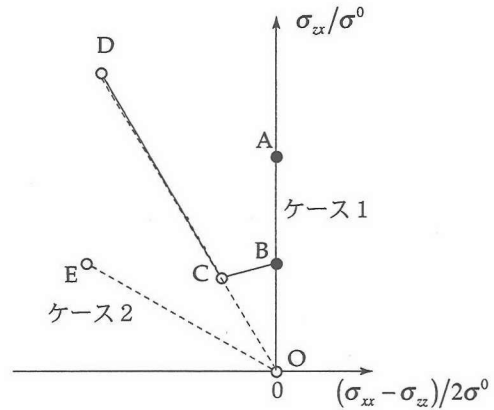


図-6 応力経路

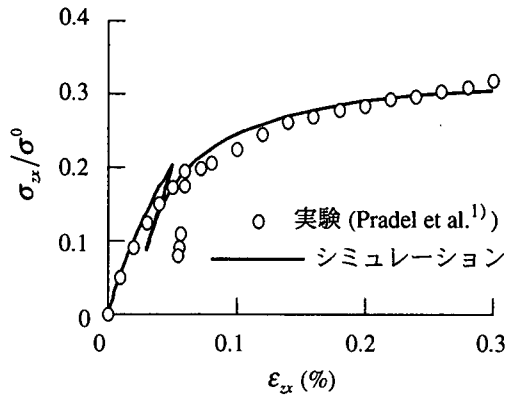
3.2 せん断載荷シミュレーション

(1) 解析条件

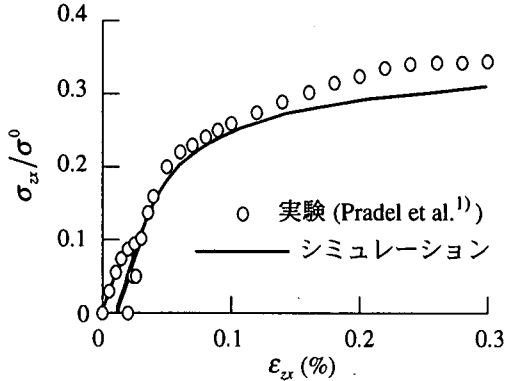
Pradel ら¹⁾にならって初期等方応力 $\sigma^0 = 98$ kPaの初期状態作成後、載荷・除荷・再載荷シミュレーションを行い、実験結果と比較・検討する。載荷経路を図-6のせん断応力空間上に示す。ここでは、ケース1として経路O-A-B-C-D、ケース2として経路O-E-O-C-Dの2つの経路でシミュレーションを行う。また、実際の中空ねじり試験においては理想的な値を算出するための補正を加えて応力、ひずみを算出しているが、応力の制御は想定したものと必ずしも一致していない¹⁾。ここではPradel らの想定した応力経路ではなく、実験により実際に得られた応力経路を想定して球形にパッキングされた粒状供試体にせん断載荷することでシミュレーションを行う。ただし、数値シミュレーションにおいては図-6の経路で応力が制御されているが、実験の応力制御のばらつきはシミュレーションと比べて非常に大きいものである。

(2) 解析結果と考察

図-7にシミュレーションの結果得られた応力ひずみ曲線をPradel らの実験結果と併せて示す。ここで用いたパラメータはケース1になるべく合うように試行錯誤



(a) ケース 1



(b) ケース 2

図-7 応力ひずみ曲線

誤の上定めたものであるが、複雑な荷経路に対しても実験結果を良くシミュレートできている。ケース1、ケース2ともに2種のせん断応力の組み合わせによる複雑な荷・除荷・再荷経路であるが、どちらのケースにおいても同一のパラメータを用いたシミュレーションで実験結果と非常に良い整合性が見られ、特に、2つのケースの再荷時の挙動の違いが良く表現されている。ただし、除荷時の挙動において、シミュレーション結果はより大きな回復変形を示している。これは、前章で示したように、本来複雑な3次元形状の粒子で構成されている砂を理想的な球要素としてモデル化していることの影響であると考えられる。つまり、球が多面体に比べて元の位置への移動が容易であるためであると推測される。

3.3 応力プローブ試験シミュレーション

(1) 解析条件

応力プローブ試験は、応力空間上のある点から出発して様々な方向に絶対値が同じ大きさの応力増分の荷・除荷を行い、ひずみ増分応答等を詳細に調べる一連の試験である。荷・除荷の過程において回復したひずみを弾性ひずみ増分、非回復ひずみを塑性ひずみ増分と定義する。

ここでは、Pradel らの実験¹⁾と等価な条件で応力主

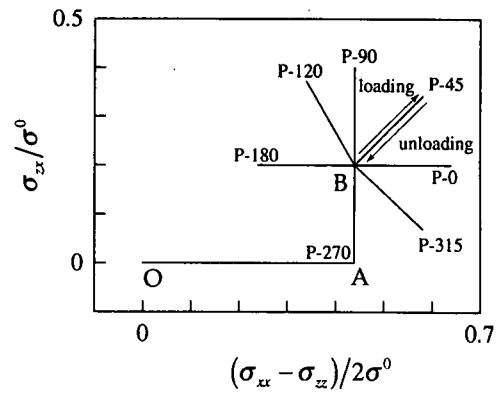


図-8 荷経路と応力プローブ方向

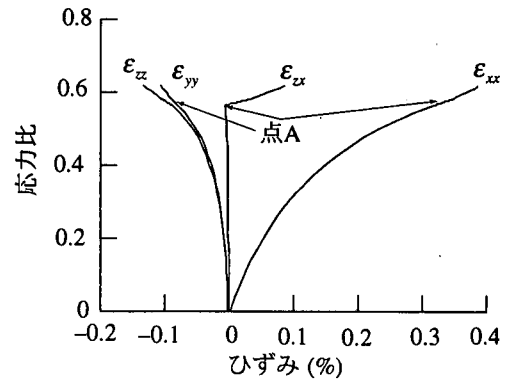


図-9 応力比ひずみ関係

軸回転が生じる面内でのプローブ試験を行い、粒状要素法によるシミュレーションにおいても Pradel らの実験結果と同様の結果が得られることを確認するためのものである。解析モデル、解析パラメータ、初期等方応力は 3.2 と同様である。

まず、プローブ試験の準備として図-8 に示した荷経路 O-A-B においてせん断荷を行う。経路 O-A は、軸差応力 $\sigma_{xx} - \sigma_{zz}$ によりせん断が作用する経路であり、A-B はせん断応力 σ_{zx} が増加し応力主軸が回転する荷経路である。プローブ試験点 B において図中に示した P-0~P-315 まで7方向のプローブ試験を実施する。なお、応力増分の大きさは実験と同様に 20kPa とした。

(2) 解析結果と考察

応力プローブ試験を行うためのせん断荷シミュレーションにより得られた点 B までの応力ひずみ曲線を図-9 に示す。文献中にはこの経路の応力ひずみ関係が示されていないためシミュレーション結果のみを示す。シミュレーション結果によればプローブ試験点 B は応力のピークに至る以前の荷点である。図中の応力比 σ_r は、次式で定義されるパラメータである。

$$\sigma_r = \sqrt{s_{ij}s_{ij}}/p \quad (19)$$

$$p = \frac{1}{3}\sigma_{ii}, s_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij} \quad (20)$$

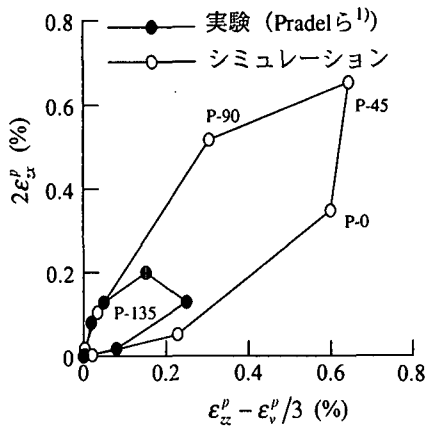


図-10 塑性ひずみ増分応答

応力プローブ試験シミュレーションにより得られた塑性ひずみ増分応答を、Pradel らの中空ねじり試験の結果と併せて図-10 のせん断塑性ひずみ増分空間上に示す。シミュレーションの結果得られた塑性ひずみ増分は、塑性ひずみ増分の方法が塑性論で予測される一定方向とはならず、応力増分方向に依存して変化する、実験値と類似の塑性ひずみ増分応答を示している。ただし、ほぼすべての方向において塑性ひずみ増分が大きく現れている。ここで用いた応力増分の大きさおよびプローブ試験点の応力状態は文献中の模式図から判断して求めたものであり、実際の実験とは若干異なる可能性がある。また、ここでのプローブ試験では、初期等方応力 98.1kPa に対して 20kPa といった相対的に非常に大きい応力増分を与えていることから、文献およびここでの目的である増分形の構成則の考察には適応し得ない可能性もある。そこで、次章以降、プローブ試験における適切な応力増分の大きさなども含めて、実際の実験では実施することの困難な種々のプローブ試験を行い、さらに詳細に粒状体の流動則における応力増分方向依存性について考察する。

本研究で行った数値シミュレーションにおいては、粒子自身の弾性変形を表す仮想バネ定数と粒子間の摩擦係数といった 2 種類の定数のみを用いて粒子の集合体としての平均挙動をシミュレートしている。剛体球形粒子と粒子間の単純な構成式を用いた簡易なモデルであるにも関わらず、複雑な応力経路による砂の実験結果をかなりの精度で表現できる。以上のことから、3 次元粒状要素法は実際の粒状材料の変形挙動を再現可能な解析手法であり、2 つの粒子間に設定される各パラメータや粒子形状、間隙比と粒子集合体としての平均挙動との相関関係を適切に把握することで将来的に粒状材料の力学挙動を定量的に評価することを可能とすると考えることができる。また、以前の同様の手法による数値シミュレーション結果⁷⁾⁻¹²⁾や以下の粒状体の流動則に関する考察は、実際の砂などの粒状材料にも適用できると言えるであろう。

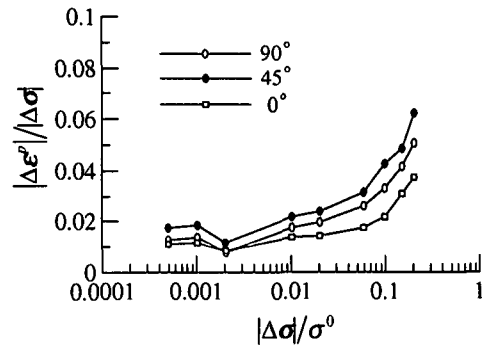


図-11 塑性ひずみ増分の大きさの比較

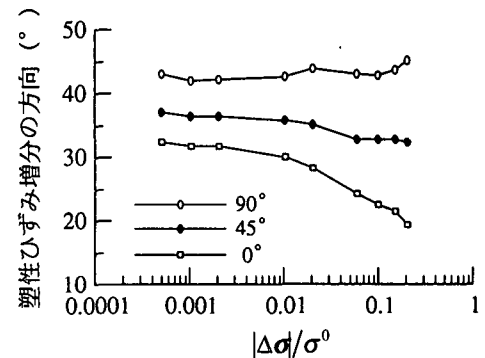


図-12 塑性ひずみ増分方向の比較

4. 増分非線形性に関する考察

4.1 応力増分の大きさについて

増分形構成式の考察に対する応力プローブ試験における適切な応力増分の大きさを検討する。初期等方応力 98.1kPa に対して応力増分の大きさを 15, 10, 5, 2, 1, 0.2, 0.1, 0.05kPa でそれぞれプローブ試験を行い、3.3 の解析（応力増分 20kPa）と併せて考察する。応力経路、プローブ試験を行う点は 3.3 と同様であり、プローブ方向は塑性ひずみ増分の比較的大きい 0°, 45°, 90° のみとする。

まず、図-11 に応力増分の大きさによる各プローブ方向の塑性ひずみ増分の大きさを比較する。図中の縦軸は塑性ひずみ増分の大きさを各応力増分の大きさで正規化した値を、横軸は応力増分の大きさを初期等方応力で正規化した値を対数で示した。増分形の構成式が成り立つ範囲内であれば、応力増分方向毎に示したこれらの値は応力増分の大きさに寄らず一定になるはずである。図-11 より、多少のばらつきはあるものの、これらの値がほぼ一定になるのは $|\Delta\sigma|/\sigma^0=0.02$ （応力増分の大きさ 2kPa）程度以下であることがわかる。3.3 で行った応力増分 20kPa は図中の $|\Delta\sigma|/\sigma^0=0.2$ 程度の部分であり、応力増分の値が少し変化だけで塑性ひずみ増分の大きさが大きく変化し、明らかに一定値になっていない。したがって、3.3 および Pradel

らの実験¹⁾で行ったプローブ試験の応力増分は大きくて増分形構成式の考察には馴染まないと言える。

次に、図-12に応力増分の大きさによる各プローブ方向の塑性ひずみ増分の方角を比較する。縦軸の角度は、図-10に示した塑性せん断ひずみ増分空間上の横軸から反時計回りの角度を表している。塑性ひずみ増分方向も応力増分の方角毎に示しているので、増分形構成式が成り立つ範囲内では一定値になるはずである。しかし、大きさと同様に $|\Delta\sigma|/\sigma^0=0.02$ より大きい場合には、特に応力プローブ方向 0° において極端に塑性ひずみ増分の方角がずれることがわかる。応力増分 20kPa の場合には、応力増分方向が小さい場合と比べて 10° 以上変化しており、増分形構成式の考察には適さないと言える。

以上より、粒状要素法による応力プローブ試験を行って増分形構成式の考察を行うためには、初期等方応力に対する応力増分の大きさを 0.2 程度以下に小さくするのが適切であると言える。ただし、数値シミュレーションの場合には数値誤差の影響も考えられるため、極端に小さい応力増分を与えた場合の誤差評価などの課題は残される。以上の結果はここで用いた解析手法特有のものであるとも考えられるが、実際の実験などでプローブ試験を行う場合においても応力制御の精度と共に応力増分の大きさについても良く検討して行うべきであり、得られた結果の考察にも十分注意が必要である。以下では、応力増分を 2kPa としてプローブ試験を行う。

4.2 応力主軸回転の影響について

Pradel ら¹⁾は応力主軸回転が塑性ひずみ増分の応力増分方向依存性の主たる原因であると述べている。また、3で行ったせん断応力面内におけるプローブ試験により、シミュレーションによっても同様に主軸回転に伴い増分非線形性が生じることが示された。ここでは、応力主軸回転のみが増分非線形性を発生させる要因なのかを検討するために、図-8に示した点 A において主軸回転の無い2種類の応力プローブ試験と主軸回転を伴うプローブ試験を行う。なお、点 A は軸差せん断応力のみを経験している点である。

図-13に主軸非回転時の応力プローブ試験の概念図を示す。点 A を主応力空間に表示すると図-13に示した点 A となる。応力主軸非回転プローブ試験は主応力空間内の2つの面内で行うものとする。2つのプローブ面は、点 A における局所座標系を定める主応力空間内の直交基底 (l_A, m_A, n_A) によって特徴づけられる。これらの基底ベクトルは、点 A の応力 σ_A および等方応力状態の基準点 O の応力 σ_O で表現される。

$$l_A = \frac{\sigma_A}{|\sigma_A|}, n_A = \frac{\sigma_A - \sigma_O - (\sigma_A - \sigma_O) \cdot l_A l_A}{|\sigma_A - \sigma_O - (\sigma_A - \sigma_O) \cdot l_A l_A|},$$

$$m_A = n_A \times l_A$$

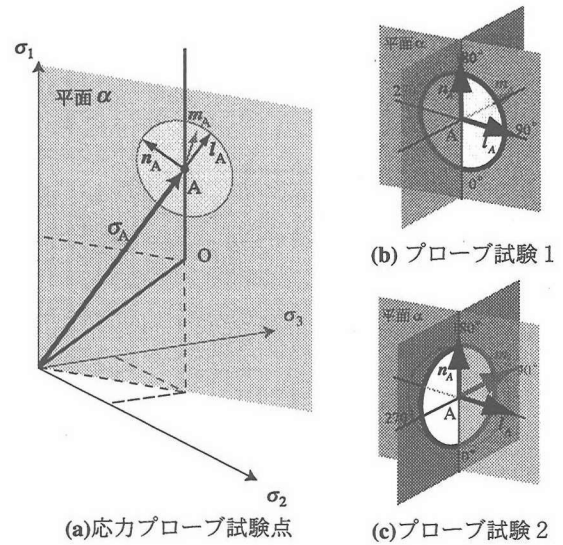


図-13 応力主軸非回転プローブ試験の概念

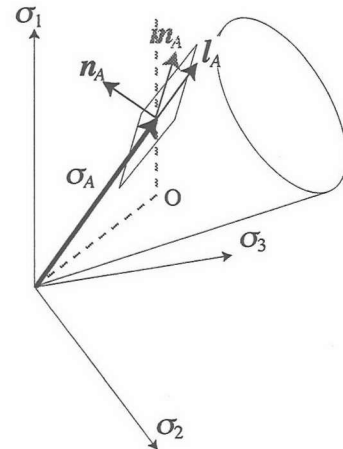


図-14 主応力空間上の局所規定ベクトルの概念

l_A は現在の応力の方向であり、仮に図-14のような降伏曲面の存在を認めるとするならば、 n_A が降伏曲面の外向き法線方向、 m_A が降伏曲面の外向き接線方向を定める単位ベクトルと見なすことができる。

応力主軸非回転プローブ試験の一つは、 l_A, n_A を含む面内の応力プローブ試験であり (図-13(b)), $l-n$ 試験と呼ぶ。 $l-n$ 試験においては、各応力増分に対して側圧は常に等方的である ($\sigma_2 = \sigma_3$)。このプローブ試験は、実際の実験においては三軸圧縮試験装置で実現可能なものである。一方、図-13(c)に示したプローブ試験は m_A, n_A を含む面内の応力プローブ試験であり、これを $m-n$ 試験と呼ぶ。 $m-n$ 試験においては側圧に主応力差を生じ、実際の実験においてはいわゆる真三軸試験装置を必要とするせん断試験である。2つの応力主軸非回転プローブ試験においては、それぞれ 5° 毎 72 方向のプローブを行うものとする。なお、主軸回転を伴う場合はこれまでと同様にせん断応力面

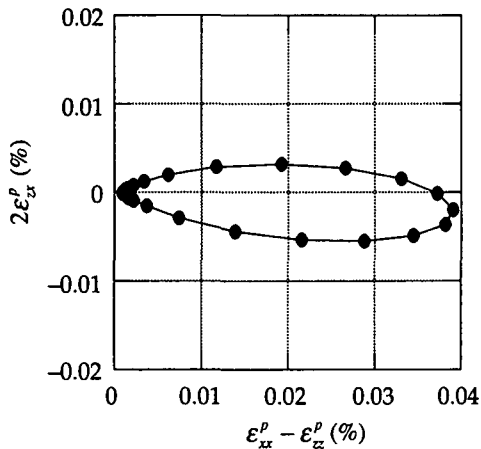


図-15 塑性ひずみ増分応答（応力主軸回転；点 A）

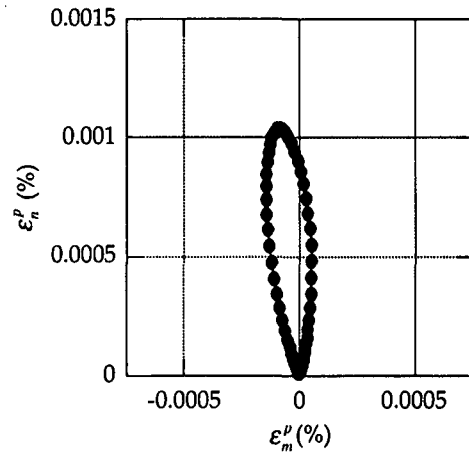


図-17 塑性ひずみ増分応答（ $m-n$ 試験）

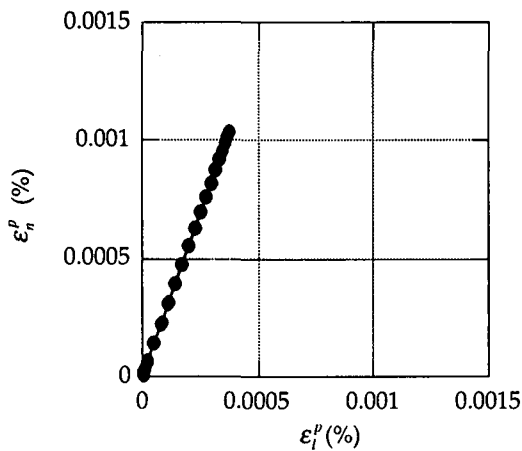


図-16 塑性ひずみ増分応答（ $l-n$ 試験）

内で行うが、プローブ方向を 15° 毎とし 24 方向のプローブを行う。以上の 3 種類の応力プローブ試験を通して、応力主軸非回転時および回転時の塑性ひずみ増分応答の違いについて検討する。

まず、応力主軸回転を伴うプローブ試験の結果得られた塑性ひずみ増分を図-15 に示す。点 A においても点 B と同様に塑性ひずみ増分の増分非線形性が観察される。次に、2 種類の応力主軸非回転時のプローブ試験結果を図-16, 17 に示す。図-16 より応力主軸が回転しない場合の $l-n$ 試験においては、塑性ひずみ増分がほぼ一直線上に並び、増分線形と見なせる。しかしながら、図-17 より $m-n$ 試験においては明らかに応力増分方向依存性を示しており、応力主軸が回転しない場合でも塑性ひずみ増分の応力増分方向依存性が生じることがわかる。応力増分方向依存性は、主軸回転時と $m-n$ 試験で類似の傾向が見られる。さらに、その程度は主軸回転プローブ試験と同程度と見なすことができる程大きく、応力主軸回転のみが増分非線形性の原因ではないと言える。また、応力主軸回転時および $m-n$ 試験における塑性ひずみ増分の応力増分方向

依存性は非常に大きく、一般的にこれらの応力増分が複合して作用することを考慮すれば、古典的流動則はもちろん拡張した増分線形式^{5), 6)}では表せないと思われる。

$l-n$ 試験はこれまでに経験したせん断応力を含む面内のプローブ試験であり、 $m-n$ はこれまで経験したことのないせん断 ($\sigma_2 \neq \sigma_3$) の作用する面内での試験である。主軸回転を伴うプローブ試験も $m-n$ 試験と同様のことが言えて、塑性ひずみ増分非線形性は未経験のせん断応力により生じるものと推測される。

4.3 応力履歴の影響について

ここでは、応力履歴が塑性ひずみ増分応答に与える影響について考察する。図-18 に比較する応力経路を示す。点 B に至る応力経路としてを O-A-B, O-B, O-C-B の 3 種類を考え、せん断载荷した後に点 B において応力増分 2kPa で主軸回転を伴うせん断応力面内におけるプローブ試験シミュレーションを行う。また、等方応力状態である点 O と純粋せん断状態である点 C でもプローブ試験シミュレーションを行い、中途点での供試体の応答を図-15 に示した点 A での結果と合わせて考察する。

まず、図-19 に点 O における応力プローブ試験により得られた塑性ひずみ増分応答を示す。点 O は初期等方応力状態であり、粒状供試体はせん断履歴を経験していない。このような点においては、ほぼ応力増分の方に塑性ひずみが生じ、塑性ひずみ増分応答をプロットした図-19 は円形を示す。初期等方応力状態においても、せん断応力増分に対しては塑性ひずみ増分が生じ、初期等方応力状態にある粒状体はあらゆるせん断载荷に対して塑性的であるといえる。また、この場合、応力増分方向に塑性ひずみ増分が生じるので増分応答は完全に非線形であり、古典的な金属塑性論流動則では表現し得ない性質であると言える。図-19 においては、円の中心が原点とはならないが、これは粒状供試

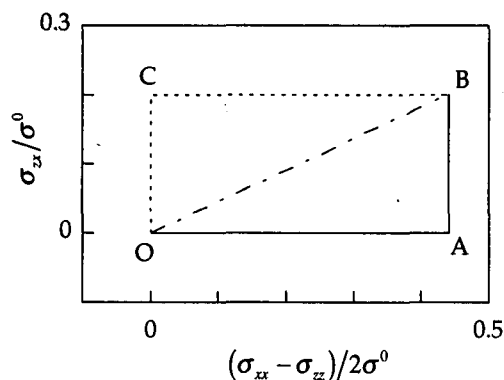


図-18 応力経路

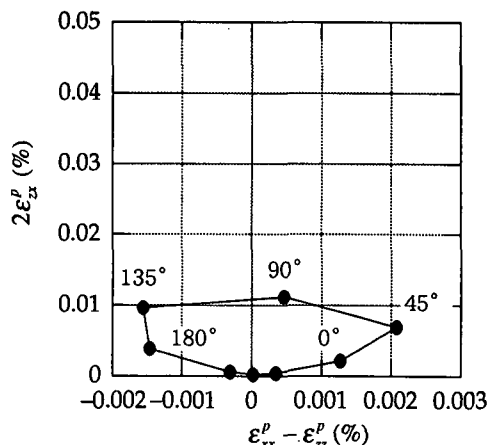


図-20 塑性ひずみ増分応答 (点 C)

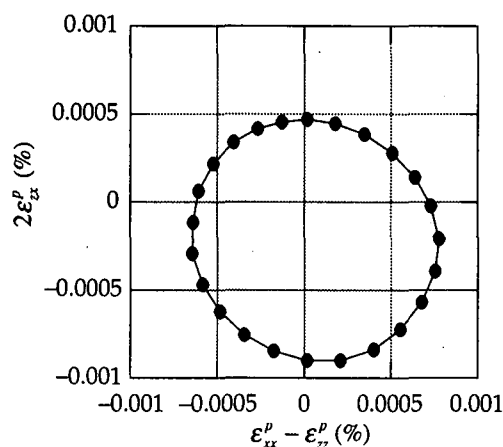


図-19 塑性ひずみ増分応答 (点 O)

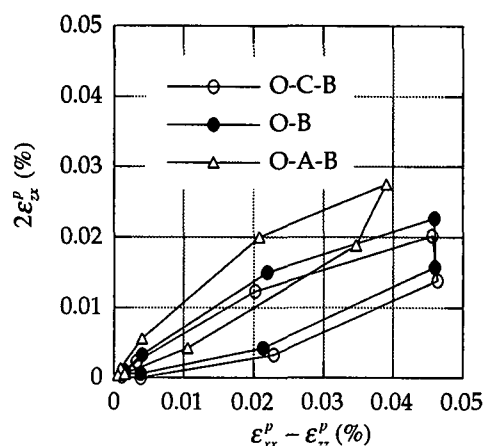


図-21 塑性ひずみ増分応答 (点 B)

体の初期構造異方性の影響によるものであり、完全に等方的なパッキングであれば原点を中心とする円形となるものと推測される。

図-15 および図-20 は、それぞれ点 A および点 C における応力プローブ試験により得られた塑性ひずみ増分応答を示している。点 A は 3 軸圧縮により軸差せん断応力のみが作用している点であり、点 C は純粋せん断状態の点である。軸差せん断応力のみが作用している点 A においては、前述のように完全に一定の方向に塑性ひずみ増分が生じるわけではなく増分非線形性を示す。また、純粋せん断状態である点 C での応答は点 A に比べてより強い増分非線形性を示している。せん断応力面内でのプローブ試験においては、応力状態によりその程度に差はあるが、塑性ひずみ増分は増分非線形性を示すと言える。

図-21 は、3つの载荷経路により至った点 B における応力プローブ試験により得られた塑性ひずみ増分応答を示している。塑性ひずみ増分はどの経路においても似た形状の応答を示しているが、その方向は若干異なる。これは、現在の応力に至る応力履歴に影響され

るものと考えることができる。また、これらの形状は点 A および点 C の応答を重ね合わせたような形状になっており、2つのすべりモードの複合した応答となる。

4.4 塑性変形メカニズムについて

ここでは、上述の解析結果を踏まえて粒状体の塑性変形メカニズムについて考察する(図-22)。まず、初期等方応力状態においては、各応力増分に対応した変形メカニズムを伴う塑性ひずみが生じると考えられることから、せん断履歴を受けていない粒状体は応力増分の方向毎に異なる変形メカニズムが生じると言える。粒状体を構成する個々の粒子同士の接触面は常に粒子間にすべりを生じさせる可能性を有し、他の接触面と共に変形メカニズムに適合した潜在すべり面を形成することになるが、せん断に対するいかなる変形メカニズムも形成されておらず、与えたせん断応力増分に対応した新たな変形メカニズムが形成されることになる。

せん断を経験した場合には、ある種のすべりモードが形成されるが、その及ぼす影響は応力状態から定まるある一定面内に限定されたものである。例えば、単

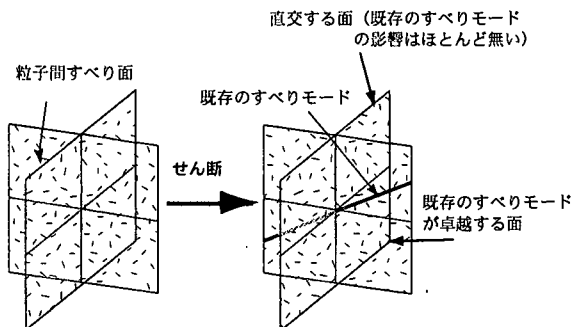


図-22 塑性変形メカニズムの概念

調载荷のようにこれまでの応力履歴と同一面内の载荷であれば、形成されたすべりモードの影響が大きく、それに従ってほぼ一定方向に塑性ひずみが生じる。つまり、このような方向の载荷に対しては古典的塑性論流動則で仮定されているような単一の変形メカニズムに支配されていると考えられる。一方、その面に直交するような面には卓越したすべりモードは形成されていないので、初期状態と同様に塑性ひずみ増分が応力増分の方向に依存して変化する。そのような面に载荷した場合においても、応力増分の n 方向成分に対しては、せん断载荷の過程において形成された変形モードに支配された塑性ひずみが生じる。主軸回転を伴う場合においても未経験のせん断応力が作用するため応力増分の方向に依存した塑性ひずみ増分が生じる。これらの応力増分に対しては、古典的な塑性論では考慮されていない複数の変形メカニズムが生じる。

一般的に、以上のような複数の変形メカニズムを前提とすると、応力増分の与え方により異なる変形メカニズムが複合して生じることになり、増分応答は非線形となる。本研究の解析結果は、粒状体の精密な構成モデルの定式化には増分非線形性を考慮することが不可避であることを強く示唆するものとなっている。

5. おわりに

本研究は、粒状要素法を用いた3次元数値シミュレーションにより応力プローブ試験を行い、実験結果との比較を行うと共に、粒状体における応力主軸回転時の増分非線形性の考察を行った。本研究により得られた結論を以下に挙げる。

1. 3次元粒状要素法による数値シミュレーションは、2種類のパラメータを用いる簡易な解析手法であるが砂の実験結果と良く整合した結果を得ることが可能である。
2. 応力主軸回転時に塑性ひずみ増分の方向は応力増分の方向に依存し、増分非線形性を示す。
3. 応力主軸非回転時にも主軸回転時と同程度の増分非線形性を示す場合もあり、増分非線形性の原因は応力主軸回転というわけではない。

4. 粒状体の塑性変形メカニズムは塑性論で仮定されているような単一のものではなく、与える応力増分の方向によって異なるメカニズムの複合したものである。

5. プローブ試験における応力増分の大きさは等方圧縮時の応力の大きさの2%以下程度でないと粒状体の塑性ひずみ増分応答における増分としての取り扱いの意味が失われる。実際の実験においてもこのことに十分留意すべきである。

以上、シミュレーション解析に基づき、粒状体の増分非線形性に関して考察を行った。ここで行ったシミュレーションは応力プローブ方向を始めとして、限定されたものであるが、今後はより一般的な場合について検討を進める必要がある。実際の地盤材料試験機の制御の自由度は非常に限定されたものであることから、本研究に示したようなアプローチは精緻な構成則を定式化の上で重要な意味を持つものではないかと思われる。

参考文献

- 1) Pradel, D., Ishihara, K. and Gutierrez, M.: Yielding and flow of sand under principal stress axes rotation, *Soils and Foundations*, Vol.30, No. 1, pp.87-99, 1990.
- 2) Kolymbas, D. ed.: *Constitutive Modelling of Granular Materials*, Springer-Verlag, New York, 2000.
- 3) Darve, F., Flavigny, E. and Meghachou, M.: Yield Surfaces and Principle of Superposition: Revisit Through Incrementally Non-Linear Constitutive Relations, *Int. J. Plasticity*, Vol.11, pp.927-948, 1995.
- 4) Wu, W. and Niemunis, A.: Beyond Failure in Granular Materials, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol.21, pp.153-174, 1997.
- 5) Rudnicki, J. W. and Rice, J. R.: Conditions for localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.23, pp.371-394, 1975.
- 6) Hashiguchi, K.: Elastoplastic constitutive equation with tangential stress rate effect, *Int. J. Plasticity*, Vol.17, pp.117-145, 2001.
- 7) 岸野佑次: 新しいシミュレーション法を用いた粒状体の準静的挙動の解析, 土木学会論文集, No.406/III-11, pp.97-116, 1989.
- 8) 岸野佑次, 武 建勳: Hill の安定条件の粒状体への適用性について, 土木学会論文集, No.631/III-48, pp.83-95, 1999.
- 9) Kishino, Y., Akaizawa, H. and Kaneko, K.: On the plastic flow of materials, *Powders and Grains 2001*, pp.199-202, 2001.
- 10) 金子賢治, 岸野佑次: 粒状体の流動則における応力増分依存性に関する微視力学的研究, 応用力学論文集, Vol.4., pp.385-396, 2001.
- 11) Kishino, Y.: The Incremental Nonlinearity Observed in Numerical Tests of Granular Media, *CD-ROM Proceedings of 15th ASCE Engineering Mechanics Conference*, 2002.
- 12) 石井建樹, 金子賢治, 岸野佑次: 真三軸応力プローブに対する粒状体の増分非線形応答について, 応用力学論文集, Vol.5., 印刷中.
- 13) Johnson, K. L.: *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

(2002 年 4 月 19 日 受付)