

粒状体のひずみについて

On the Micro-Mechanical Strain in Granular Materials

佐武正雄*

Masao SATAKE

* 名誉会員 工博 東北大学名誉教授 (982-0801 仙台市太白区八木山本町 1-5-1-201)

This paper intends to propose a new micro-mechanical definition of strain tensor for granular materials, using the Dirichlet (or modified Voronoi) tessellation defined for granular assemblies. Although another definition of strain tensor has been proposed up to the present, it is shown that the new definition has a lot of advantageous points, such as the good correspondence to the compatibility condition. Regarding the most general case, the micro-mechanical definition is also given for couple stress and rotational strain. For the inner work in granular materials, it is shown that the proposed strain satisfies the Hill's condition in a modified and radical form. To clarify the necessity of the micro-mechanical strain, three kinds of simple shear deformation, which are same macroscopically but different micro-mechanically, are analyzed using the proposed strain definition.

Key Words : granular materials, micro-mechanics, strain, Dirichlet tessellation, Hill's condition

1. まえがき

粒状体の研究においては応力やひずみをマイクロメカニックスの立場から定義する必要がある。応力については多くの研究があり、定義が定着しているが、ひずみについてはまだ十分に研究が進んでいないように思われる。本文では、空間のデリクレ分割に基いた粒状体のひずみの定義を提案し、内部仕事に関するヒルの条件などについて考察する。この定義が、接触変位の適合条件ともよく対応し、従来の(重心による)ひずみの定義に比べ、いくつかの長所をもつことを示す。また単純せん断変形の例題によってミクロな立場からのひずみの必要性を示す。本文の議論は微小変形の範囲で、粒状体の力学量は、主として離散力学¹⁾²⁾³⁾で定義されるものを用い、ベクトルやテンソルの記述はシンボリック表現を用いる。またグラフ理論のマトリックスや用語を用いているが、これらについては付録に説明をつけている。

2. ひずみの定義の準備

2.1 デリクレ分割

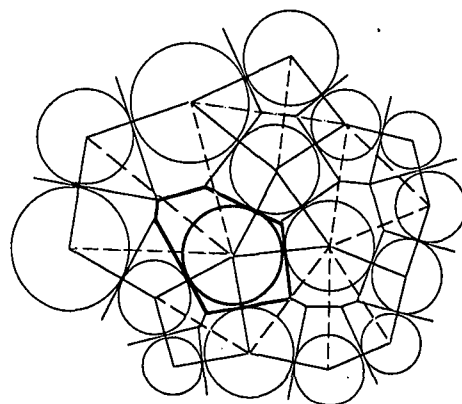


図-1 デリクレ分割 (2D)

まず、粒状体の応力やひずみのミクロな立場からの定義において基本となる空間分割について説明する。ここでは、粒状体として円形(2D)、または球形(3D)の粒子の集合体を取り扱う。

図-1は2Dにおけるデリクレ(Dirichlet)分割(修正ボロノイ分割³⁾)を示す。この分割においては、一つの粒子 i (中心 i , 半径 r_i) について、この粒子と他の一つの粒子 j (中心 j , 半径 r_j) に引いた接線の長さが等しい点 x の軌跡(点の位置は位置ベクトルで示している)

$$(x-i) \cdot (x-i) - r_i^2 = (x-j) \cdot (x-j) - r_j^2 \quad (1)$$

は直線

$$l^{ij} \cdot x = c^i - c^j \quad (2)$$

$$c^i = \frac{1}{2}(r_i^2 - i \cdot i), \quad c^j = \frac{1}{2}(r_j^2 - j \cdot j) \quad (3)$$

となり、これらの直線の中、粒子に最も近い部分だけを残してできる多角形によって、平面の分割が行われている ($l^{ij} = j - i$ は i から j へ向かう枝ベクトル)。一つの粒子を取り囲む多角形はデリクレ多角形と呼ばれ、またデリクレ多角形で辺を共有する粒子は隣接粒子と呼ばれる。3D では、式(2)は平面を示し、粒子を取り囲むデリクレ多面体によって空間が分割される。粒子の径がすべて等しい場合、デリクレ分割は通常のボロノイ分割に帰着する。したがって、デリクレ分割は粒子の大きさの違いを考慮した分割になっていることが分かる。

次に隣接粒子の中心を直線で結ぶことによってデリクレ分割の双対グラフであるデローニー(Delaunay)・ネットワークが得られる (図-1)。デローニー・ネットワークは、2D では三角形、3D では4面体の集合体になっている。これらの三角形、4面体を総称して、デローニー単体(Delaunay simplex)ともいう。ネットワークの線——枝という——には実際の接触に対応するものばかりでなく、仮想接触(virtual contact, 接触していないが隣接している)に対応する仮枝も含まれていることに注意する。デリクレ多角形の辺、またはデリクレ多面体の面は一つの接触に対応し、対応する枝ベクトルと直交している。

2.2 応力の定義

ひずみに入る前に、関連する応力の定義について述べておく。以下の式表示は3Dにおけるものを示す。

一つの粒子 p の応力テンソルは

$$\sigma_p = \frac{1}{V_p} D_{pc} (r_{pc} f_c) \quad (4)$$

と定義される。ここに V_p , r_{pc} , f_c は、それぞれ粒子 p のうけつ体積(デリクレ多面体の体積)、粒子 p の接触点 c における半径ベクトル、接触点 c に作用する接触力であり、 D_{pc} は接続マトリックスである。接触力 f_c は正に接続された粒子(付録参照)に対して定義されるから、 $D_{pc} f_c$ は結局粒子 p に作用する接触力となる。 r_{pc} f_c の間には、ダイアド積(テンソル積)が行われる。式(4)は連続体における応力の式

$$\sigma = \lim \frac{1}{V} \oint r f dS = \frac{3}{4\pi} \oint n f d\omega \quad (5)$$

に対応している。ここに、 V , r , n , f はそれぞれ微小球体積、半径ベクトル、法線ベクトル、応力ベクトルで、 ω は立体角を表す。

式(4)から粒状体全体の応力は

$$\sigma = \frac{1}{V} \sum V_p \sigma_p = \frac{1}{V} \sum l_c f_c \quad (6)$$

と定義される。ここに $V = \sum V_p$ は粒状体の全体積、また

$$l_c = D_{cp} r_{pc} \quad (7)$$

は接触 c に対応する枝ベクトルである。仮枝に対応する仮想接触には接触力が存在しないから、式(6)の右辺の枝に仮枝は含まれない。また正確には、境界において枝にならない r_{pc} を含む項が残るが、簡単のため、省略している(粒子数が大きければ、省略してよい)。式(6)の表現は仮想仕事の原理からも導かれている⁴⁾。また、一つの粒子 p について、粒子モーメント m_p 、接触モーメント m_c を考えない場合のモーメントの釣り合い条件は

$$D_{pc} (r_{pc} \times f_c) = 0 \quad (8)$$

となるから、式(4)の粒子応力テンソルは対称となり、したがって全体の応力 σ も対称となることが分かる。

また、接触 c に対応して、接触 c の応力

$$\sigma_c = \frac{1}{3V_c} l_c f_c \quad (9)$$

を定義することができる。ここに

$$V_c = \frac{1}{3} l_c \cdot n_c S_c \quad (10)$$

は接触 c に随伴する領域の体積、略して“接触 c の体積”ということにする。 S_c と n_c はそれぞれ接触 c に対応するデリクレ多面体の面(多角形)の面積と法線(l_c と同じ向き)である。接触の応力により全体の応力は

$$\sigma = \frac{1}{V} \sum 3V_c \sigma_c \quad (11)$$

とかくことができる。

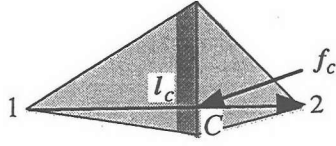
偶応力についても、同様の定義を与えることができる。すなわち

$$\mu_c = \frac{1}{3V_c} l_c m_c \quad (12)$$

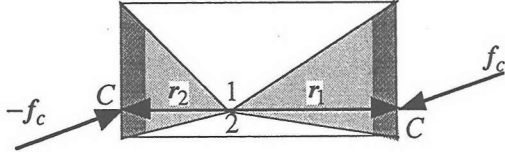
$$\mu = \frac{1}{V} \sum 3V_c \mu_c = \frac{1}{V} \sum l_c m_c \quad (13)$$

ここに m_c は接触点 c の接触モーメントである。

2D の場合、以上の式の V は面積を表す A に、式(5)右辺の係数は $1/\pi$ に、 ω は θ に、また式(9)~(13)の3は2に、などの置き換えが必要である。式(9), (12)において $3V_c$ となっているのは、これらは退化した不完全なテンソル



(a) 接触cの領域と接触力



(b) σ_c を考える微小要素

図-2 σ_c の説明 (2D)

であり、応力テンソルは閉曲面で定義されなければならないためである。図-2はこのことを2Dで説明したものである。

3. ひずみの定義

3.1 ひずみの定義の提案

ひずみの定義においては、一般化連続体におけるひずみ ε 、回転ひずみ α の式

$$dx \cdot \alpha = dw \quad (14)$$

$$dx \cdot \varepsilon = du + dx \times w \quad (15)$$

を参照し、粒状体において接触cにおける関係式

$$l_c \cdot \alpha_c = w_c \quad (16)$$

$$l_c \cdot \varepsilon_c = u_c \quad (17)$$

を与えることができる⁵⁾ (文献5のいくつかの式は本論文に従い、若干の修正が必要である)。ここに u_c , w_c は接触点cにおける相対変位、相対回転を表す接触変位、接触回転で

$$u_c = D_{cp}(u_p + r_{pc} \times w_p) \quad (18)$$

と表される。 u_p , w_p は粒子pの粒子変位、粒子回転である。回転(およびモーメント)は3Dではベクトル、2Dではスカラーであるが、2Dの場合も3Dのベクトルと考えることができるから、ここでは、いずれの場合もベクトルとして扱っている。実際は2Dの場合、回転 w (モーメント m)はスカラーで、回転ひずみ α (偶応力 μ)

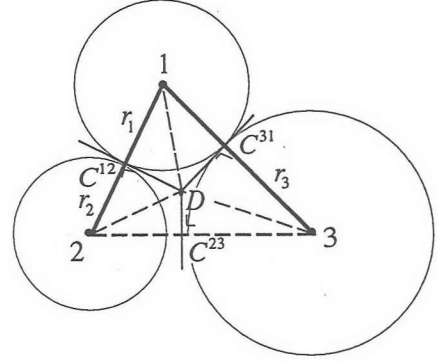


図-3 三角形のデリクレ中心
(この場合、23は仮枝)

はベクトルとなる(4.3参照)。 ε_c , α_c を接触cのひずみ、回転ひずみと呼ぶことにする。式(17)は

$$\varepsilon_c = \frac{1}{3V_c} h_c u_c \quad (19)$$

$$h_c = S_c n_c \quad (20)$$

とすれば、式(10)により満足される。 h_c を双対枝ベクトル(dual branch vector)という。式(11)にならい、全体のひずみを

$$\varepsilon = \frac{1}{V} \sum 3V_c \varepsilon_c = \frac{1}{V} \sum h_c u_c \quad (21)$$

と定義する。また、回転ひずみについても同様に

$$\alpha_c = \frac{1}{3V_c} h_c w_c \quad (22)$$

$$\alpha = \frac{1}{V} \sum 3V_c \alpha_c = \frac{1}{V} \sum h_c w_c \quad (23)$$

と定義する。

デロウニー・ネットワークに現れる4面体および三角形は、その任意の二つの頂点について式(2)が成り立つ点Dをもっている。4面体 $ijkl$ 、三角形 ijk についてその位置ベクトルを示せば

$$D^{ijkl} = \frac{1}{3V} (c^i b^i + c^j b^j + c^k b^k + c^l b^l) \quad (24)$$

$$D^{ijk} = \frac{1}{2A} (c^i b^i + c^j b^j + c^k b^k) \quad (25)$$

である。ここに b^i は面ベクトル(辺ベクトル)と呼ばれるもので、4面体 $ijkl$ の面 jkl (三角形 ijk の辺 jk)について、大きさはその面積(長さ)、方向向きはその面(辺)の外向き法線となっているベクトルである。Dをデリクレ中心(略してD-心)と呼び、DまたはVと記す(図-3)。D-心はデリクレ多面体(多角形)の頂点となっていることに注意する。

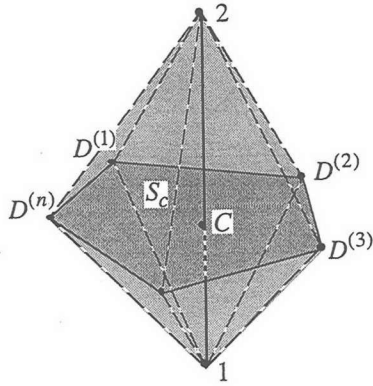


図-4 デリクレ多面体の一つの面と対応する領域

3D の一つの枝について、それを稜としてもつ4 面体の D -心を求めれば、式(20)の S_c はそれらの作る多角形の面積として求められる (図-4)。つまり、デロウニー・ネットワークに現れる三角形、4 面体の D -心を与えれば、ひずみの定義に必要な h_c や接触の領域を与えることができる (図-5)。

次に2D デロウニー・ネットワークの三角形 (間隙) v についても次のようなひずみを定義しておく。

$$\varepsilon_v = -\frac{1}{A_v} L_{vc} s_{vc}^{\wedge} u_c \quad (26)$$

ここに、 v は三角形の指標 (その D -心を V とする)、 A_v は v の面積、 s_{vc} は V から接触点に向かう径ベクトルで、 $\wedge$ は随伴ベクトルの記号で $v = (v_2, -v_1)$ に対し $v^{\wedge} = (v_2, -v_1)$ を示す。 L_{vc} はループマトリックスである。 s_{vc} と h_c との間には

$$h_c = -L_{cv} s_{vc}^{\wedge} \quad (27)$$

の関係があるから、式(21)により次式が得られる。

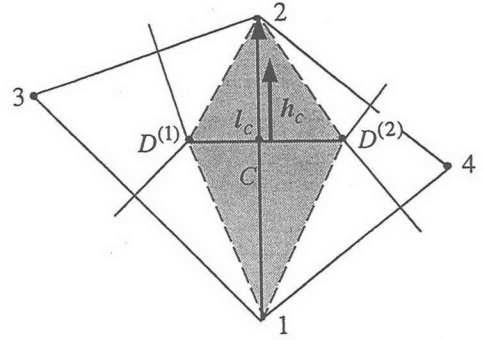
$$\varepsilon = \frac{1}{A} \sum A_v \varepsilon_v = \frac{1}{A} \sum h_c u_c \quad (28)$$

3.2 他のひずみの定義

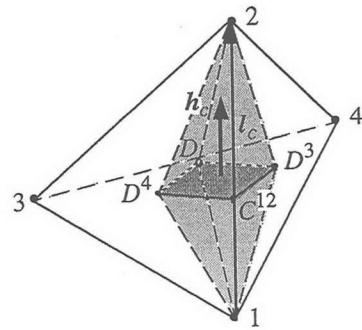
Rothenburg ら⁶⁾⁷⁾や Bagi⁸⁾は、上記と異なる粒状体のひずみを提案している。Rothenburg のものは、Bagi の2D の場合に帰着するので、Bagi の定義について考察する。

Bagi の定義は、式(21)の右辺と同一の式(ただし粒子回転の影響は考慮されていない)で、 h_c の代わりに、前出の面ベクトル b によって定義される complementary area vector と称する次のベクトルを用いている。

$$d_c \text{ または } d^{ij} = k \sum_s (b^{i(s)} - b^{j(s)}) \quad (29)$$



(a) 2D



(b) 3D (稜12をもつ一つの4 面体について)

図-5 デリクレ中心と接触の領域

$k = 1/12$ (3D), $1/6$ (2D)、 c は粒子 i, j の接触点、 s は枝 l_c を稜としてもつ4 面体の指標である。このベクトルは、三角形や4 面体の重心と関連していることを容易に示すことができる。図-6において、重心を G とすれば

$$\begin{aligned} 2D : d_c = d^{12} &= (\overrightarrow{M^{12}G^{(1)}} - \overrightarrow{M^{12}G^{(2)}})^{\wedge} \\ &= \overrightarrow{G^{(2)}G^{(1)}}^{\wedge} = \frac{1}{3} (3-4) \end{aligned} \quad (30)$$

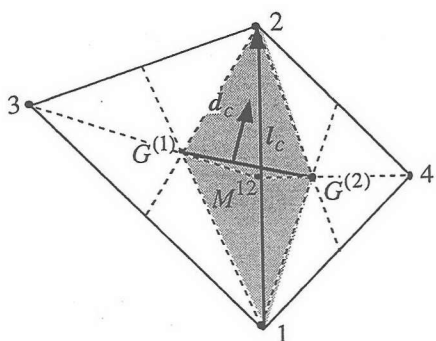
3D (一つの4 面体について) :

$$\begin{aligned} d_c = d^{12} &= \frac{1}{2} \overrightarrow{M^{12}G} \times \overrightarrow{G^3G^4} \\ &= \frac{1}{24} \{ (I+2) \times (4-3) + 24 \times 3 \} \end{aligned} \quad (31)$$

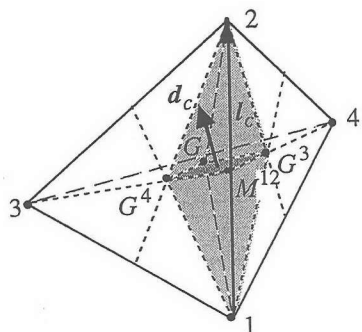
となっている。ここに、 $I, 2, \dots$ は頂点 $1, 2, \dots$ の位置ベクトルである。この場合、接触点 c と中点 M^{12} は一般に異なるが、やはり接触に随伴する領域を重心を用いて定めることができ

$$A_c = \frac{1}{3} A \quad (2D), \quad V_c = \frac{1}{6} V \quad (3D) \quad (32)$$

となっていて極めて簡明である。この定義では、 h_c を



(a) 2D



(b) 3D (稜12をもつ一つの4面体について)

図-6 重心と接触の領域

定めるのに、 D -心の代わりに重心を用いていると見ることができる。Bagi のひずみの誘導は連続体の積分変換から出発しており、点が均一に分布していると考えた連続体の離散化からこのように重心が導かれるのことは、自然な結果と考えられる。

3.3 ヒルの条件

粒状体の内部仕事について考える。仕事は接触点に作用する接触力および接触モーメントによってのみ行われ

$$W = \sum (f_c \cdot u_c + m_c \cdot w_c) \quad (33)$$

となる。したがって、接触 c の応力、ひずみを用いれば

$$W = \sum 3V_c (\sigma_c \cdot \varepsilon_c + \mu_c \cdot \alpha_c) \quad (\neq V(\sigma \cdot \varepsilon + \mu \cdot \alpha)) \quad (34)$$

とすることができ、仕事 W について、そのままの形ではヒルの条件は一般に成り立っていない。しかし、粒状体に対する特殊な複内積

$$\sigma \circ \varepsilon = \frac{1}{V} \sum 3V_c \sigma_c \cdot \varepsilon_c \quad (35)$$

を導入すれば

$$W = V(\sigma \circ \varepsilon + \mu \circ \alpha) \quad (36)$$

とすることができ、これを粒状体における修正されたヒルの条件とみることができる。演算 $\circ$ は通常の内積と同様の線形性をもっている。

4. 考察

4.1 ひずみと適合条件の関連

前節で述べたように、ひずみの定義において必要な双対枝ベクトル h_c は、デロウニー・ネットワークに現れるデロウニー単体（三角形、4面体）の中心を定めることによって決定される。この中心は離散力学の双対粒子の中心と見することもできる。

接触変位に関する適合条件(2D)は、双対粒子（間隙）の中心 V から接触点 c への径ベクトル s_{vc} を用い

$$u_v + L_{vc} (u_c + s_{vc} \times w_c) = 0 \quad (37)$$

と記すことができる。 u_v は間隙変位である。接触変位、接触回転が粒子変位、粒子回転から導かれる場合は、間隙変位（連続体力学の不適合度に相当する）は存在しない。式(37)は応力における式(8)に相当し、間隙変位が無い場合、式(18)を代入して検証することができる。

s_{vc} と h_c の関係は、2Dの場合、式(27)であり、3Dの場合、間隙はデロウニーの4面体 v に対応し、その面（三角形） d は双対接触（間隙の接触）に対応する。したがって、二つの径ベクトル s_{vd} 、 s_{dc} が考えられ、この4面体が受け持つ双対枝ベクトルは

$$h_c = -\frac{1}{2} L_{cd} s_{dc} \times C_{dv} s_{vd} \quad (38)$$

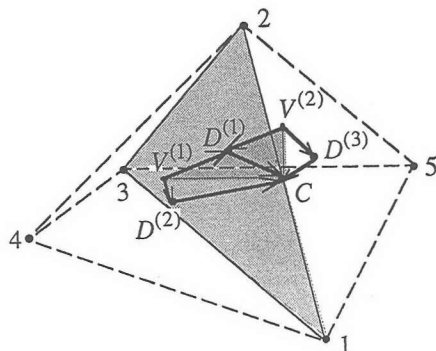


図-7 二つの4面体と双対接触

$(D^{(1)}, D^{(2)}, D^{(3)})$ は $\triangle 123$, $\triangle 124$, $\triangle 125$ の D -心、 $V^{(1)}, V^{(2)}$ は4面体 1234 , 1235 の D -心

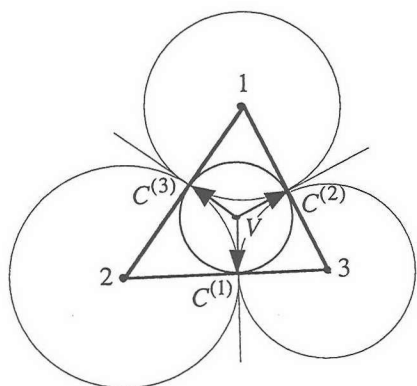


図-8 密な充填の双対粒子

とかくことができる (図-7)。 C_{dv} はセルマトリックスである。

s は径ベクトルであるから、粒子の径 r と同様にその大きさはデロウニー単体について一定値であることが望ましい。デロウニー単体の中心として D -心を用いれば、密な充填の場合、 D -心は内心 (内接球、内接円の中心) となり、この性質を満たす (図-8) が、重心を用いる場合は一般にこの性質は満たされない。

4.2 Bagi のひずみとの比較

ここで提案した粒状体のひずみを Bagi のひずみと比較すると、つぎのような長所をもっていることが分かる。

- (1) Bagi のひずみには粒子の径が考慮されていない。
提案のひずみでは、 D -心を用いているので、当然、粒子径が考慮されている。
- (2) 接触力について、式(9), (10)から、連続体と類似の表現

$$f_c = n_c \cdot \sigma_c S_c \quad (39)$$

が成り立つが、重心による双対枝ベクトルからはこの表現は得られない。

- (3) 図-9 に示すように、変形の間に仮枝が突然に変化することがある。この場合、仮枝に対応する接触の領域は次第に減少して消滅し、別の仮枝の領域が発生するのが自然である。提案のひずみについてはこの性質が満たされている (図-9 シャド

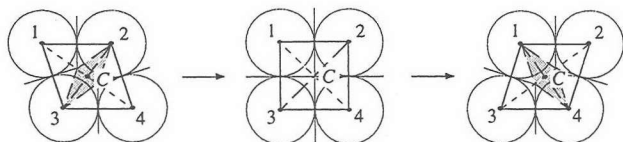
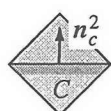
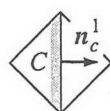


図-9 仮枝の突然な変化

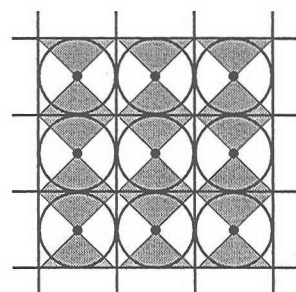
ウの部分)。重心を用いると、式(32)に示すようにに接触の領域の体積 (面積) はその属する単体の体積の $1/6$ (面積の $1/3$) で、連続で自然な変化を示さない。

4.3 簡単な例題 (単純せん断変形)

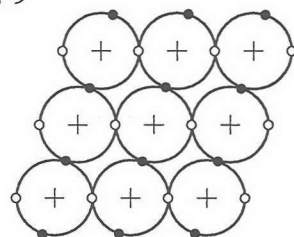


$$h_c^1 = S_c n_c^1 = (1, 0)$$

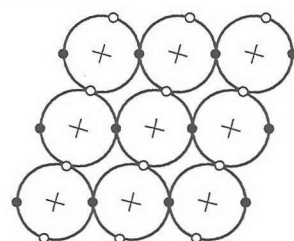
$$h_c^2 = S_c n_c^2 = (0, 1)$$



Case 1 滑り



Case 2 回転と滑り



Case 3 転がり

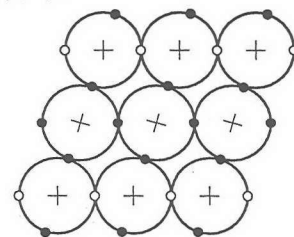


図-10 3種類の単純せん断変形

(● ひずみを生じる接点, ○ ひずみを生じない接点)

図-10は、等径粒子の正方パッキングの単純せん断変形である。この例題について接触のひずみと全体のひずみを考察する。接触法線 n が水平な接点と鉛直な接点の二種類（上指標1, 2で表す）あり、これらの接触点における接触変位、接触回転をそれぞれ $u_c^1, w_c^1, u_c^2, w_c^2$ とする。Case 1, Case 2の場合は、これらは一定値で、粒径を1、粒子間のすべりを δ とおけば

$$\text{Case 1: } u_c^1 = (0, 0), w_c^1 = 0, u_c^2 = (\delta, 0), w_c^2 = 0$$

$$\text{Case 2: } u_c^1 = (0, \delta), w_c^1 = 0, u_c^2 = (0, 0), w_c^2 = 0$$

である。

$$h_c^1 = (1, 0), h_c^2 = (0, 1)$$

であるから、0でない接触のひずみ、および全体のひずみは

$$\text{Case 1: } \varepsilon_c^2 = \begin{pmatrix} 0 & \delta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & \delta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \alpha = 0$$

$$\text{Case 2: } \varepsilon_c^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \delta & 0 \end{pmatrix}, \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \delta & 0 \end{pmatrix}, \alpha = 0$$

となる。この場合、二つの全体のひずみは剛体回転を取りされば一致する。

次に、Case 3では、第1層と第2層の違いがあり、これをさらに第1上指標1, 2で区別すれば

$$u_c^{11} = (0, 0), w_c^{11} = 0, u_c^{12} = (0, 0), w_c^{12} = 2\delta,$$

$$u_c^{21} = (0, 2\delta), w_c^{21} = 0, u_c^{22} = (0, 0), w_c^{22} = -2\delta$$

したがって、0でない接触ひずみおよび全体のひずみは

$$\varepsilon_c^{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2\delta & 0 \end{pmatrix}, \alpha_c^{12} = (0, 2\delta), \alpha_c^{22} = (0, -2\delta)$$

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \delta & 0 \end{pmatrix}, \alpha = 0$$

となる。Case 3は全体のひずみではCase 2と同一であるが、接触のひずみを調べることによって、その違いを把握することができる。

5. あとがき

本文では、デリクレ分割に基づく新しい粒状体のひずみを提案し、Bagiによる提案と比較しながら考察を行った。また粒状体の内部仕事は接触点においてのみ行われ

ることに着目し、接触の応力、ひずみを導入し、ヒルの条件が修正された形で成立することを示した。マイクロメカニクスの立場からひずみを導入するためには、結局、デロウニー単体（デロウニー・ネットワークに現れる三角形や4面体）のある中心を定める必要があり、本論文ではデリクレ中心、Bagiのひずみでは重心が用いられている。しかし、適合条件との対応や、変形中の仮枝の変化への対応などの点で、前者の方が合理的であることを示した。最後に、単純せん断変形の例題によって本論文で提案するひずみがマイクロメカニクスの研究に有用であることを説明した。本論文で扱っているのは球または円粒子であるが、任意の凸な形状の粒子についての拡張も考えられる⁹⁾。

本論文の作成にあたって、東北大学技官石見政男氏のお世話になったことを付記し、謝意を表する。

参考文献

- 1) Satake, M. (1993), New Formulation of Graph-theoretical Approach in the Mechanics of Granular Materials, *Mechanics of Materials*, **16**, 65 - 72
- 2) Satake, M. (1997), Three-dimensional Discrete Mechanics of Granular Materials, in *IUTAM Symposium on Mechanics of Granular and Porous Materials* (N.A. Fleck and A.C.F. Cocks (eds.)), Kluwer Academic Publishers, 193 - 202
- 3) Oda, M. and K. Iwashita (eds.) (1999), *Mechanics of Granular Materials, An Introduction*, A.A. Balkema, Rotterdam.
- 4) Christoffersen, J., M.M. Mehrabadi and S. Nemat-Nasser (1981), A Micromechanical Description of Granular Material Behavior, *J. of Applied Mechanics*, **48-2**, 339 - 344
- 5) Satake, M. (2001), Stress and Strain in Granular Assemblies, in *Powders & Grains 2001* (Y. Kishino (ed.)), A.A. Balkema, 149 - 152
- 6) Rothenburg, L. (1980), *Micro - Mechanics of Idealised Granular Materials*, Ph.D. Thesis. Dept. of Civil Engineering, Carleton University, Ottawa,
- 7) Krut, N.P. and L. Rothenburg (1996), Micro - Mechanical Definition of the Strain Tensor for Granular Materials, *Journal of Applied Mechanics, Transaction of the ASCE*, **118**, 706 - 711
- 8) Bagi, K. (1996), Stress and Strain in Granular Assemblies, *Mechanics of Materials*, **22**, 165 - 177
- 9) Bagi, K. (1995-6), Geometrical Modelling of Granular Assemblies, *Acta Technica Acad. Sci. Hung.* **107** (1-2), 1 - 17

付録 グラフ理論のマトリックス

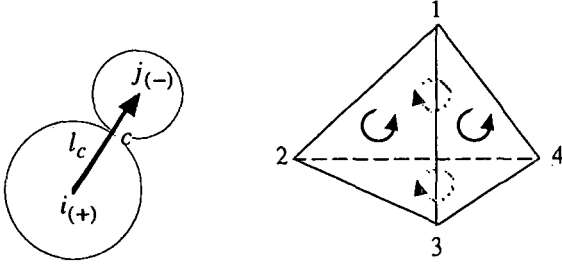


図-A1 枝の向きと点(粒子) 図-A2 4面体の面の+の向きの正負の接続

本文の中で用いられているグラフ理論のマトリックスや用語について説明する。ここでのグラフ理論はデロウニー単体に適用されるので、対象は三角形と4面体である。三角形の辺(枝)に任意の向きを与え、点pと接触cの関係を与える接続マトリックスを次のように定義する。

$$D_{pc} \text{ または } D_{cp} = \begin{cases} 1 & \text{枝 } l_c \text{ が点 } p \text{ を始点とする場合} \\ -1 & \text{枝 } l_c \text{ が点 } p \text{ を終点とする場合} \\ 0 & \text{点 } p \text{ と枝 } l_c \text{ とは無関係} \end{cases} \quad (\text{A1})$$

±1 の場合、その接触においてそれぞれ点(粒子) p が正に、または負に接続されているという (図-A1)。

次に接触cと三角形vの関係を与えるループマトリックスについて述べる。三角形vにも一つの向きを与えるが、この向きは2Dではすべての反時計まわり、3Dでは任意とする。

$$L_{cv} \text{ または } L_{vc} = \begin{cases} 1 & \text{枝 } l_c \text{ と 3 角形 } v \text{ の向きが一致} \\ -1 & \text{二つの向きが反対} \\ 0 & \text{枝 } l_c \text{ は 3 角形 } v \text{ に含まれない} \end{cases} \quad (\text{A2})$$

2Dでは三角形vは間隙に対応している。3Dでは、4面体vが間隙に対応し、4面体の面である三角形は、4面体の接触(双対接触という) d に対応する。したがって、3Dでは、ループマトリックスの指標はcとdを用い、さらに双対接続dと4面体vの関係を表す次のセルマトリックスが必要になる。

$$C_{dv} \text{ または } C_{vd} = \begin{cases} 1 & \text{面 } d \text{ の向きが 4 面体 } v \text{ 外側からみて反時計まわり} \\ -1 & \text{面 } d \text{ の向きが時計まわり} \\ 0 & \text{面 } d \text{ は 4 面体 } v \text{ に含まれない} \end{cases} \quad (\text{A3})$$

以上述べたマトリックスについては、次のような恒等式が成り立っている。

$$2\text{D}: D_{pc} L_{cv} = 0 \quad (\text{A4})$$

$$3\text{D}: D_{pc} L_{cd} = 0, \quad L_{cd} C_{dv} = 0 \quad (\text{A5})$$

(2002 年 4 月 19 日受付)