

異方性および接線塑性に基づく非共軸性を持つ 土の非弾性構成式の力学的応答

Mechanical response of inelastic constitutive equation
with non-coaxiality based on anisotropy and tangential stress effect for soils

堤成一郎*, 橋口公一**, 杉本昌也***, 池田清宏****, 山川優樹*****

Seiichiro Tsutsumi, Koichi Hashiguchi, Masaya Sugimoto, Kiyohiro Ikeda, Yuki Yamakawa

*農博 東北大学助手 大学院工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

**工博, 農博 九州大学教授 大学院農学研究院生産環境科学部門 (〒812-8581 福岡市東区箱崎 6-10-1)

***農修 エムエスシーソフトウェア株式会社 (〒107-0052 東京都港区赤坂 5-2-39)

****Ph. D. 東北大学教授 大学院工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

*****工修 長岡技術科学大学助手 工学部環境・建設系 (〒940-2188 新潟県長岡市上富岡町 1603-1)

It is widely known that the principal stress directions rotates in foundations subjected to the cyclic loading due to wheel traveling, tidal wave, earthquake, etc. Besides, it has been indicated that the direction and the magnitude of inelastic deformation of soils depend on the stress rate much more than those predicted by elastoplastic constitutive equation with the smooth plastic potential surface. In this article the deformations in test results for sands subjected to the principal stress rotation process keeping the magnitudes of principal stresses and to the stress rates with various directions are predicted appropriately by the subloading surface model with the anisotropy due to the rotation of yield surface and the tangential stress rate effect which lead to the non-coaxiality of directions of inelastic strain rate and stress.

Key Words: inelastic constitutive equation, subloading surface model, tangential stress rate effect, non-coaxiality

1. はじめに

車輪走行, 潮流および地震等による繰返し載荷過程において, その支持地盤内では主応力軸方向が回転することが知られている. 3 主応力値一定の条件下で, 中空ねじり試験装置により豊浦砂を供試して行われた実験により, 主応力方向の回転に伴って非弾性変形が生じることが明らかにされている¹⁾. これは, 塑性ひずみ速度が主応力およびその速度では表されないことを意味している. この現象は, 弾塑性論における降伏面が応力以外のテンソル量を含み異方性を有するか, 塑性ひずみの方向が応力速度に依存するときに表現され, 一般にこれらの場合, 塑性ひずみ速度の主軸は応力の主軸に一致せず, いわゆる“非共軸”となる. また, 所定の応力点から種々の方向へ応力増分を与える, いわゆる応力プローブ試験において, 非弾性ひずみ増分方向が応力増分方向に依存することが指摘されている^{2), 3)}. なお, これは粒状要素法を用いた数値実験においても材料特性として認められている^{4), 5), 6)}. これは, 滑らかな塑性ポテンシャルを仮定する流動則を採用する弾塑性構成式においては表現し得ず, 塑性ひずみ速度の大きさおよび方向が応力増分方向に依存するので, “尖り点効果” (vertex effect), あるいは, 滑らかな降伏面ではその接線方向の応力速度成分により非弾性ひずみ速度が生じるので, “接線塑性”

(tangential plasticity)または“接線速度効果” (tangential stress rate effect)と呼ばれている.

尖り点効果を表すモデルとして, 複数降伏面の交差⁷⁾, ⁸⁾, コーナー理論^{9), 10)}, 多重すべり^{11), 12)}, 速度非線形^{13), 14)}および接線塑性モデル^{15), 16), 17), 18)}が提案されている. これらの中, “下負荷面モデル” (subloading surface model)^{19), 20), 21), 22)}に接線応力速度効果を導入した“接線塑性一下負荷面モデル” (subloading surface model with tangential stress rare effect)¹⁸⁾は, 連続性条件, 滑らか条件等の構成式としての力学的要求条件^{23), 24)}を満たし, 単調負荷のみならず, 除荷, 再負荷, 逆負荷を含む任意の負荷における変形挙動の予測に適用し得る. さらに, 速度線形型の構成式であるので, 境界値問題へも容易に適用可能であると考えられる. なお, 主応力軸方向が回転しない三軸試験条件下の硬化および軟化状態において, ひずみ速度入力時の応力速度応答の把握が行われている²⁵⁾. さらに, 非排水・平面ひずみ条件におけるせん断帯発生に関する解析²⁶⁾により, その発生応力状態および角度等を現実的に予測し得ることが明らかにされている.

一方, 地盤材料の異方性は, 土粒子の配向, インターロッキング等により生じるが, これは, Sekiguchi-Ohta²⁷⁾により提案された降伏面の回転により合理的に表現し得ると思われる.

本論文では、既述の主応力軸回転試験結果¹⁾および応力プローブ試験結果³⁾に着目して、既述の Sekiguchi-Ohta による降伏面の回転による異方性表現を導入した接線塑性一下負荷面モデルによる計算結果との照査を行うことにより、接線塑性と異方性の有無、ひいてはこれらの役割について解明する。なお、応力(速度)およびひずみ速度に関する諸量の符号は、引長を正とする。また、応力は、間隙圧を除きたいわゆる有効応力を意味するものとする。

2. 降伏面の回転を考慮した接線塑性一下負荷面モデル

速度勾配 $\mathbf{L}$ の対称成分であるひずみ速度 $\mathbf{D} \equiv (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T)/2$ は次のように弾性ひずみ速度 $\mathbf{D}^e$ と非弾性ひずみ速度 $\mathbf{D}^i$ に加算分解されるとする。

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^i \quad (1)$$

ここに、弾性ひずみ速度 $\mathbf{D}^e$ は、次式で与えられる。

$$\mathbf{D}^e = \mathbf{E}^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2)$$

$\boldsymbol{\sigma}$ は応力、 $(\cdot)$ は客観性を有する共回転速度を表す^{28), 29)}。4 階のテンソル $\mathbf{E}$ は Hooke 型の次式で与えられる。

$$E_{ijkl} = (K - \frac{2}{3}G)\delta_{ij}\delta_{kl} + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (3)$$

ここに、体積弾性係数 K およびせん断弾性係数 G は、一般に応力および内部状態変数の関数であり、 δ_{ij} は Kronecker のデルタ、すなわち、 $i=j$ に対し $\delta_{ij}=1$ 、 $i \neq j$ に対し $\delta_{ij}=0$ である。

非弾性ストレッチング $\mathbf{D}^i$ は塑性ストレッチング $\mathbf{D}^p$ および接線ストレッチング $\mathbf{D}^t$ に加算分解される。

$$\mathbf{D}^i = \mathbf{D}^p + \mathbf{D}^t \quad (4)$$

2.1 正規降伏面と下負荷面

まず、Sekiguchi-Ohta²⁷⁾に従い、降伏面は常に応力空間の原点を通してその周りに回転するとして、次式で与える。

$$pf(\chi) = F(H) \quad (5)$$

ここに、

$$p \equiv -\frac{1}{3}\text{tr}\boldsymbol{\sigma}, \quad \boldsymbol{\sigma}^* \equiv \boldsymbol{\sigma} + p\mathbf{I} \quad (6)$$

$$\chi \equiv \frac{\|\hat{\boldsymbol{\eta}}\|}{m} \quad (7)$$

$$\hat{\boldsymbol{\eta}} \equiv \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\beta}, \quad \boldsymbol{\eta} \equiv \frac{\boldsymbol{\sigma}^*}{p} \quad (8)$$

m は一般に、材料定数 ϕ および

$$\sin 3\theta_\sigma \equiv -\sqrt{6} \frac{\text{tr} \hat{\boldsymbol{\eta}}^3}{\|\hat{\boldsymbol{\eta}}\|^3} \quad (9)$$

の関数、つまり

$$m = f_m(\sin 3\theta_\sigma; \phi) \quad (10)$$

であり、材料の限界状態を規定する。 $\|\cdot\|$ は大きさを表

す。 H は等方硬・軟化変数、 $\boldsymbol{\beta}$ は降伏面の回転を表す 2 階の定テンソルであり、 $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\beta}$ は下負荷面の中心軸を表す。また、 θ_σ は 2 階の定テンソル $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ に関する Lode 角を表し、次式を満たす。

$$\tan \theta_\sigma = \frac{\mu}{\sqrt{3}} = \frac{2\hat{\eta}_2 - \hat{\eta}_1 - \hat{\eta}_3}{\sqrt{3}(\hat{\eta}_1 - \hat{\eta}_3)} \quad (11)$$

ここに、 $\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2$ および $\hat{\eta}_3$ は $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ の主値であり、 μ は Lode のパラメータと称される。なお、 $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ のとき、 μ は中間主応力パラメータである b 値と次の関係を有する。

$$\mu = 2b - 1 \quad (12)$$

ここで、降伏面の内部を純弾性域とせず、その内部の応力変化で塑性変形が生じる非古典塑性論を導入する。これに伴い、降伏面を“正規降伏面”(normal-yield surface)と呼ぶことにする。そこで、降伏面の内部に常に現応力点 $\boldsymbol{\sigma}$ を通り、降伏面と相似形および相似の配置を保ちつつ膨張・収縮する“下負荷面”(subloading surface)を導入する。なお、正規降伏面に対する下負荷面の大きさの比つまり相似比は、正規降伏状態への接近の測度を表すと考えられるので、“正規降伏比”と呼び、記号 R で表す。以上により、下負荷面は次式で表される。

$$pf(\chi) = RF(H) \quad (13)$$

2.3 塑性ストレッチング

下負荷面の式(13)の時間微分は次式で与えられる。

$$\text{tr} \left\{ \frac{\partial(pf(\chi))}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \right\} = \dot{R}F + RF' \dot{H} \quad (12)$$

ここに、 $(\cdot)$ は物質時間微分を表し、

$$F' \equiv \frac{\partial F}{\partial H} \quad (13)$$

塑性変形過程 ($\mathbf{D}^p \neq \mathbf{0}$) において、下負荷面は正規降伏面に漸近することを考慮して、 R の発展則を次式で与える。

$$\dot{R} = U \|\mathbf{D}^p\| \quad (\mathbf{D}^p \neq \mathbf{0}) \quad (14)$$

ここに、 U は次の関係を満たす R の単調減少関数である。

$$\begin{aligned} U = \infty : R = 0 \\ U = 0 : R = 1 \\ (U < 0 : R > 1) \end{aligned} \quad (15)$$

本論文では、関数 U として次式を採用する。

$$U = -u_R \ln R \quad (16)$$

u_R は材料定数である。本式によると、現応力点 $\boldsymbol{\sigma}$ を常に含む下負荷面は、塑性変形に伴って正規降伏面に近づき、仮に現応力点が正規降伏面を飛び出し $R > 1$ となっても、塑性負荷状態 ($\mathbf{D}^p \neq \mathbf{0}$) ならば $\dot{R} < 0$ となり、現応力点 $\boldsymbol{\sigma}$ は自動的に正規降伏面上へ引き戻される。ただし、下負荷面の接線方向への応力増分が連続的に加わる負荷過程においては、 $\dot{R} = 0$ にもかかわらず、応力点は下負荷面の外側へ飛び出し、誤差集積の要因となり得

るため、リターンマッピング法³³⁾などの数値計算による修正が必要である。

式(4)における塑性ストレッチング $\mathbf{D}^p$ は、次の関連流動則で与える。

$$\mathbf{D}^p = \lambda \mathbf{N} \quad (17)$$

ここに、 λ は正值の比例係数、 $\mathbf{N}$ は現応力点における正規化された下負荷面の外向き法線ベクトルであり、次式で与えられる。

$$\mathbf{N} \equiv \frac{\partial(pf(\chi))}{\partial \boldsymbol{\sigma}} / \left\| \frac{\partial(pf(\chi))}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\| \quad (\|\mathbf{N}\|=1) \quad (18)$$

式(14)および(17)を式(12)に代入することにより、正值の比例係数 λ は次式で与えられる。

$$\lambda \equiv \frac{\text{tr}(\mathbf{N} \dot{\boldsymbol{\sigma}})}{M_p} \quad (19)$$

ここに、塑性係数 M_p は次式で与えられる。

$$M_p \equiv \text{tr}(\mathbf{N} \boldsymbol{\sigma}) \left\{ \frac{F'}{F} h + \frac{U}{R} \right\} \quad (20)$$

$$h \equiv \frac{\dot{H}}{\lambda} \quad (21)$$

$$\mathbf{N}^* \equiv \mathbf{N} - \frac{1}{3}(\text{tr} \mathbf{N}) \mathbf{I} \quad (22)$$

2.4 接線ストレッチング

任意の滑らかな形状を有し、任意の硬化則に従う下負荷面の接線方向の応力速度の偏差成分つまり偏差接線応力速度により、塑性ストレッチング $\mathbf{D}^p$ は、次式で与えられる。

$$\mathbf{D}^p = \frac{1}{T} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_t^* \quad (23)$$

ここで、 $\mathbf{N}$ の偏差成分 $\mathbf{N}^*$ とその正規化テンソル $\mathbf{n}^*$ により、偏差接線応力速度 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_t^*$ は次式で表される。

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_t^* \equiv \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_n^* \quad (24)$$

ここに、

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^* \equiv \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{1}{3}(\text{tr} \dot{\boldsymbol{\sigma}}) \mathbf{I} \quad (25)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_n^* \equiv \text{tr}(\mathbf{n}^* \dot{\boldsymbol{\sigma}}) \mathbf{n}^* \quad (26)$$

$$\mathbf{n}^* \equiv \left(\frac{\partial(pf(\chi))}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^* / \left\| \left(\frac{\partial(pf(\chi))}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^* \right\| = \frac{\mathbf{N}^*}{\|\mathbf{N}^*\|} \quad (\|\mathbf{n}^*\|=1) \quad (27)$$

主応力空間においては、偏差接線応力速度 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_t^*$ は下負荷面と偏差応力一定面の交差により形成される閉曲面の接線方向を有する。また、 T は次の関係を満たす R の単調減少関数である。

$$\left. \begin{aligned} T &= \infty : R = 0 \\ T &= \xi : R = 1 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

なお、関数 T として次式を仮定している。

$$T = \frac{\xi}{R^n} \quad (29)$$

ここに、 n は材料定数、 ξ は応力の次元を有する材料関数である。さらに、地盤材料は応力比の増大につれて、つまり、 χ 値の増加につれて非弾性変形が進行すると考えられる。そこで、地盤材料を対象とした材料関数 ξ は次式で与えられる。

$$\xi = \frac{p}{a\chi^c} \quad (30)$$

ここに、 a および c は材料定数である。なお、既往の接線係数¹⁶⁾ $T = C(m - \|\boldsymbol{\eta}\|)p$ (C : 材料定数)は、限界状態以下 ($\chi < 1$) の応力比における正規降伏状態 ($R = 1$) に対してのみ適用可能である。

式(1)、(2)、(4)、(17)および(23)より、ひずみ速度—応力速度関係として次式が得られる。

$$\mathbf{D} = \mathbf{E}^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\text{tr}(\mathbf{N} \dot{\boldsymbol{\sigma}})}{M_p} \mathbf{N} + \frac{1}{T} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_t^* \quad (31)$$

さらに、正の比例定数 λ のひずみ速度による表現を Λ と記せば、次式を得る。

$$\Lambda = \frac{\text{tr}(\mathbf{N} \mathbf{D})}{M_p + \text{tr}(\mathbf{N} \mathbf{E} \mathbf{N})} \quad (32)$$

式(31)の逆関係すなわち応力速度—ひずみ速度関係は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \frac{1}{1+2G/T} \left\{ \mathbf{E} \mathbf{D} - \frac{\text{tr}(\mathbf{N} \mathbf{D})}{M_p + \text{tr}(\mathbf{N} \mathbf{E} \mathbf{N})} [\mathbf{E} \mathbf{N} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2G}{T} \left\{ \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{E} \mathbf{N}) \mathbf{I} - \left(M_p + \frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{N} \text{tr}(\mathbf{E} \mathbf{N}) \right) \frac{\mathbf{n}^*}{\|\mathbf{N}^*\|} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2G}{T} \text{tr}(\mathbf{E} \mathbf{D}) \left(\frac{1}{3} \mathbf{I} - \frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{N} \frac{\mathbf{n}^*}{\|\mathbf{N}^*\|} \right) \right\} \end{aligned} \quad (33)$$

塑性ひずみ速度 $\mathbf{D}^p$ に対する負荷基準は、 Λ の正值性により、次式で与えられる²⁴⁾。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D}^p &\neq \mathbf{0} : \Lambda > 0 \\ \mathbf{D}^p &= \mathbf{0} : \Lambda < 0 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

2.5 材料関数

下負荷面における関数 f を次式で与える。

$$f(\chi) = 1 + \chi^2 \quad (35)$$

これによれば、下負荷面は、 $(p, \|\boldsymbol{\sigma}^*\|)$ 平面において楕円を呈する。

また、等方硬・軟化関数 F は、体積 v と圧力 p の両対数線形関係³²⁾を導入して得られる次式で与える。

$$F = F_0 \exp\left(-\frac{H}{\rho - \gamma}\right) \quad (36)$$

ここに、

$$H \equiv \varepsilon_v^p = \int \text{tr} \mathbf{D}^p dt \quad (37)$$

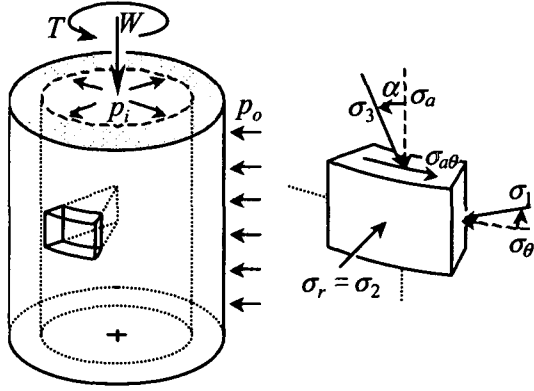


図1 中空ねじり試験の概要および応力状態

F_0 は F の初期値, ε_p^p は塑性体積ひずみである. ρ および γ は, それぞれ $\ln v - \ln p$ 線形関係における正規圧密線および膨潤線の勾配である. また, 本関係より, 体積弾性係数 K は次式で与えられる.

$$K = \frac{p}{\gamma} \quad (38)$$

なお, 本論文では, Poisson比 ν を一定とする.

3. 実測値との比較

以上のモデルの妥当性を調べるため, 密詰の豊浦砂を供試して, 中空ねじりせん断試験装置により得られた応力プローブ試験³⁾および主応力軸回転試験の結果¹⁾との比較, 照査を行う. なお, 試験結果^{1), 3)}は密詰の豊浦砂を供試して, 等方応力および b 値一定排水条件で行われている.

3.1 解析条件

図1に試験装置の概要, 作用力および応力成分を示しているが, 中空円筒の共試体に軸力 W , トルク T , 外圧 p_o および内圧 p_i の4成分を独立に制御することにより, 軸方向応力 σ_a , 半径方向応力 σ_r , 周方向応力 σ_θ およびねじりせん断応力 $\sigma_{a\theta}$ を変化させて, 種々の応力状態を実現することが可能である. これら4応力成分に対応するひずみ成分, つまり軸方向ひずみ, 半径方向ひずみ, 周方向ひずみおよびねじりせん断ひずみをそれぞれ ε_a , ε_r , ε_θ および $\varepsilon_{a\theta}$ とする. また, 3主応力を $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ とする. なお, σ_r は中間主応力 σ_2 となる.

図1のように, 軸方向に対して最小主応力 σ_3 方向がなす角度を α として, 4応力成分 (σ_a , σ_r , σ_θ , $\sigma_{a\theta}$) は p, q, θ および α により次のように表される.

$$\sigma_a = -p + q \left\{ \frac{\sin \theta}{3} - \frac{\cos \theta \cos 2\alpha}{\sqrt{3}} \right\} \quad (39)$$

$$\sigma_r = -p - \frac{2}{3} q \sin \theta \quad (40)$$

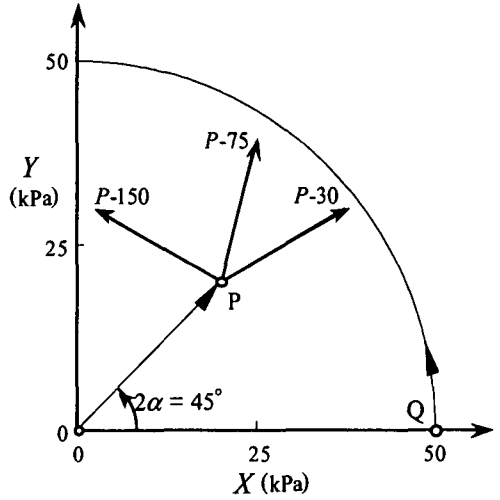


図2 応力プローブおよび主応力回転試験の概要

$$\sigma_\theta = -p + q \left\{ \frac{\sin \theta}{3} - \frac{\cos \theta \cos 2\alpha}{\sqrt{3}} \right\} \quad (41)$$

$$\sigma_{a\theta} = -q \left\{ \frac{\cos \theta \sin 2\alpha}{\sqrt{3}} \right\} \quad (42)$$

ここに,

$$q = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\sigma^*\| \quad (43)$$

$$\tan \theta = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sqrt{3}(\sigma_1 - \sigma_3)} \quad (44)$$

また, 中間主応力パラメータ b 値は次式で与えられ,

$$b = \frac{1}{2}(\sqrt{3} \tan \theta + 1) \quad (45)$$

本論文で対象とした試験結果^{1), 3)}においては, 等方応力および半径方向応力一定 ($\sigma_r = \sigma_2 = -p = \text{const.}$) であり, 本場合, 式(44)より $\tan \theta = 0$ であり, さらに式(45)より b 値 = 0.5 一定となる. また, 応力経路は, 次式で与えられる変数 X および Y を軸とする平面に表される (図2参照).

$$X = \frac{\sigma_\theta - \sigma_a}{2} \quad (46)$$

$$Y = \sigma_{a\theta} \quad (47)$$

ここで, 現応力点と X 軸がなす角は, 最小主応力軸が水平方向となす角 α の2倍で, 次式で与えられる.

$$\tan 2\alpha = \frac{\sigma_{a\theta}}{\sigma_\theta - \sigma_a} \quad (48)$$

なお, (X, Y) 面において, 原点から現応力点へ向かうベクトルの長さは偏差応力の大きさ $\|\sigma^*\|$ に対応し, Mohr 円の半径と一致する.

3.2 軸対称異方性について

軸対称応力状態にある材料を対象に, 降伏面の回転を規定するテンソル β は, 軸, 半径および周方向成分のみを持つとし, また, 半径および周方向成分は一致する ($\beta_\theta = \beta_r$) と仮定する (図3参照). なお, テンソル β の偏差性により, $\text{tr} \beta = \beta_a + 2\beta_\theta = 0$ が成り立つ. し

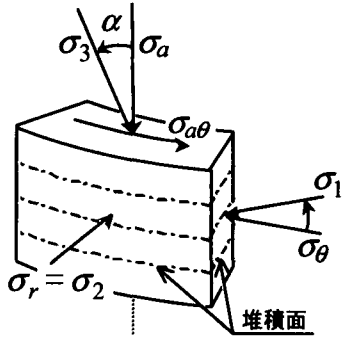


図3 主応力軸方向と堆積面の関係

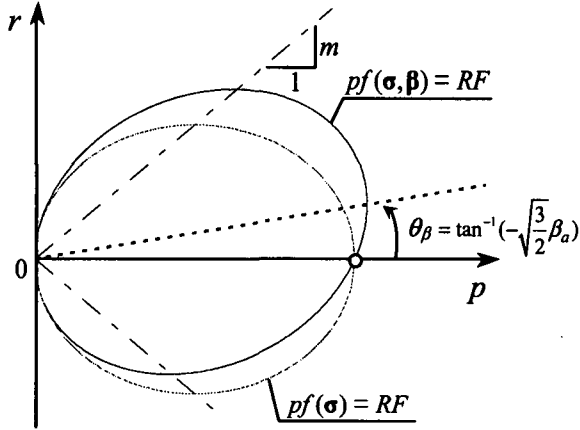


図4 (p, r) 面における下負荷面

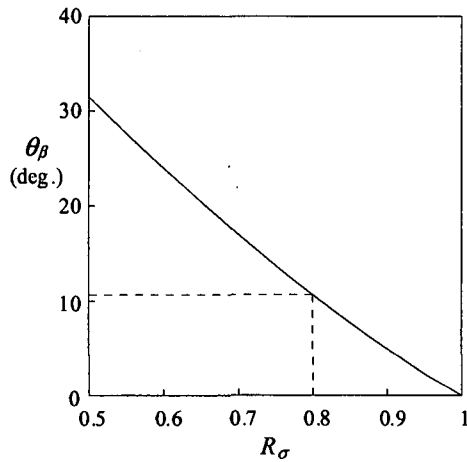


図5 R_σ と下負荷面回転角度 θ_β の関係

たがって、テンソル β は、次式で与えられる。

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_a & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_a/2 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_a/2 \end{bmatrix} \quad (49)$$

以上において、 β_a 、 β_r および β_θ は、 β の軸、半径方向および周方向成分を表す。なお、下負荷面の中心軸を規定する $\eta = \beta$ 条件より、次式が得られる。

$$\beta_a = -2\beta_\theta = -\frac{2(1-R_\sigma)}{1+2R_\sigma} \quad (50)$$

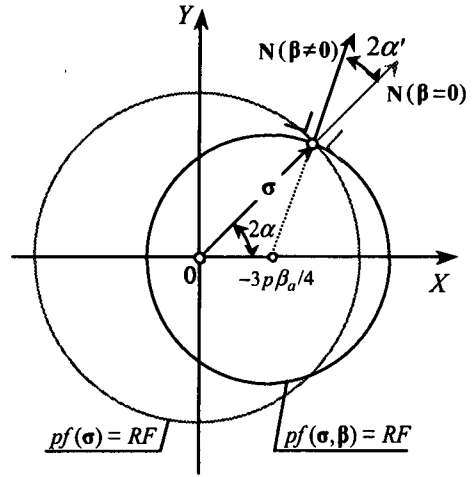


図6 (X, Y) 面における下負荷面

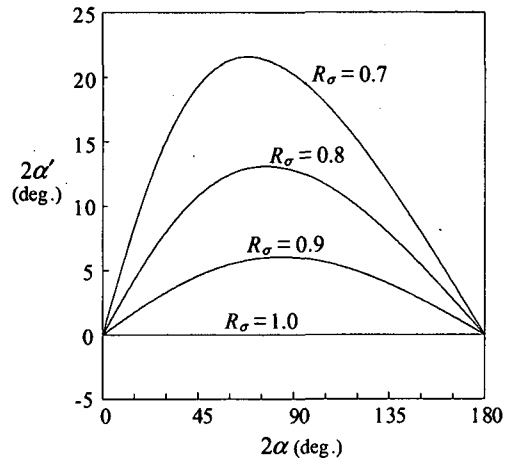


図7 2α に対する下負荷面の法線方向角 $2\alpha'$

ここに、 R_σ は、下負荷面の中心軸上の応力の軸方向成分 $\bar{\sigma}_a$ と周方向成分 $\bar{\sigma}_\theta$ の比、すなわち

$$R_\sigma \equiv \frac{\bar{\sigma}_\theta}{\bar{\sigma}_a} \quad (51)$$

通常、自然堆積地盤では、鉛直方向に軸 a 方向をとれば、 $\beta_a < 0$ 、 $\beta_\theta > 0$ および $R_\sigma < 1$ である(図3参照)。

図4に (p, r) 面($r = \sqrt{2/3}(\sigma_\theta - \sigma_a)$ 、 $|r| = \|\sigma^*\|$)における下負荷面を示す。また、 (p, r) 面における降伏面の傾き θ_β と R_σ との関係を図5に示す。なお、下負荷面の中心軸の式 $\eta = \beta$ より $\tan \theta_\beta = -\sqrt{3/2}\beta_a$ が成り立つ。

本試験条件において、下負荷面の式(13)は、変数 X および Y により次式で表される。

$$\begin{aligned} (X + \frac{3}{4}p\beta_a)^2 + Y^2 \\ = \frac{m^2}{2}(pRF - p^2) - \frac{3}{16}(p\beta_a)^2 \end{aligned} \quad (52)$$

また、 $m = \text{const.}$ として (X, Y) 面における下負荷面の外向き単位法線ベクトルの成分 (N_x, N_y) は次式で与えられる。

$$N_x = (X + \frac{3}{4}p\beta_a) / \sqrt{(X + \frac{3}{4}p\beta_a)^2 + (Y/p)^2} \quad (53)$$

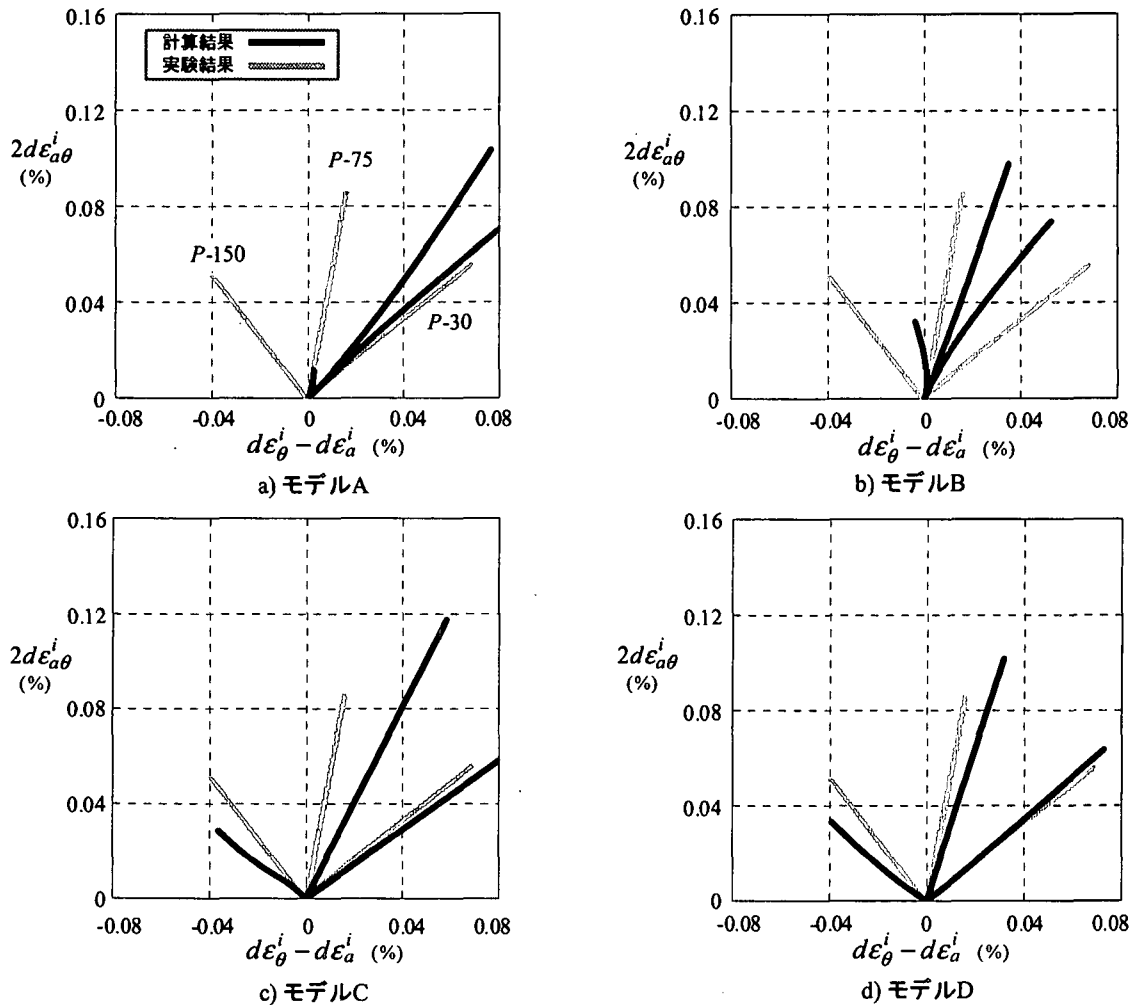


図8 応力プロープに伴う非弾性ひずみ増分

$$N_Y = \frac{Y}{p} / \sqrt{\left(\frac{X}{p} + \frac{3}{4}\beta_a\right)^2 + \left(\frac{Y}{p}\right)^2} \quad (54)$$

図6に (X, Y) 面における下負荷面を示している。なお、応力と下負荷面の外向き単位法線ベクトルの主軸のなす角の2倍を $2\alpha'$ とした。異方性の増大、つまり R_σ の減少とともに (X, Y) 面における下負荷面の中心軸が原点から移動し、その法線ベクトルは応力ベクトルから変移する。次に、 $R_\sigma = 1.0, 0.9, 0.8$ および 0.7 の場合について、偏差応力の大きさ $\|\sigma^*\|$ 一定条件下での 2α に対する $2\alpha'$ の関係を図7に示す。なお、関連流動則が成り立つ場合、主応力軸の回転を表す 2α の増加に伴って、応力と塑性ひずみ速度の主軸のずれが生じ、 $2\alpha = 90^\circ$ 付近で最大値を示した後、 $2\alpha = 180^\circ$ において再び主軸が一致することがわかる。また、いうまでもなく R_σ の減少とともに、非共軸性が著しくなる。

3.3 応力プロープ試験

本研究で採用した応力プロープ試験³⁾は、図2に示すように、 (X, Y) 面内の原点0からP点まで主応力方向一定($2\alpha = 45^\circ$)でせん断を与えた後、 $2\alpha = 30^\circ, 75^\circ$ および 150° 方向に大きさ一定の応力増分を与えている。

表1 計算に用いたモデルの分類

		固有 (初期) 異方性	
		無 ($R_\sigma = 1.0$)	有 ($R_\sigma = 0.8$)
接線塑性 (尖り点効果)	無 ($a = 0.0$)	モデルA	モデルB
	有 ($a = 0.01$)	モデルC	モデルD

表2 初期値および材料定数

$F_0 = 350 \text{ (kPa)}$	$\nu = 0.2$	$R_\sigma = 1.0 \text{ or } 0.8$
$\rho = 0.0034$	$m = 0.96$	$a = 0.01 \text{ or } 0.0$
$\gamma = 0.00057$	$u_R = 10$	$n = c = 1.0$

なお、それぞれP-30, P-75およびP-150試験と呼ぶ。実験では、応力増分負荷時に得られるひずみ増分 $d\epsilon$ から、あらかじめ求めた弾性係数により得られる弾性ひずみ成分 $d\epsilon^e$ を減じることにより、非弾性ひずみ増分 $d\epsilon^i$ を算出している。

接線塑性および異方性の影響に関して、表1に示される4つのモデルを用いて計算を行った。なお、計算に用いた材料定数および初期値を表2に示す。

A (下負荷面), B (回転硬化を考慮した下負荷面), C (接線塑性を考慮した下負荷面)およびD (接線塑性および回転硬化を考慮した下負荷面)モデルによる応力プロープ

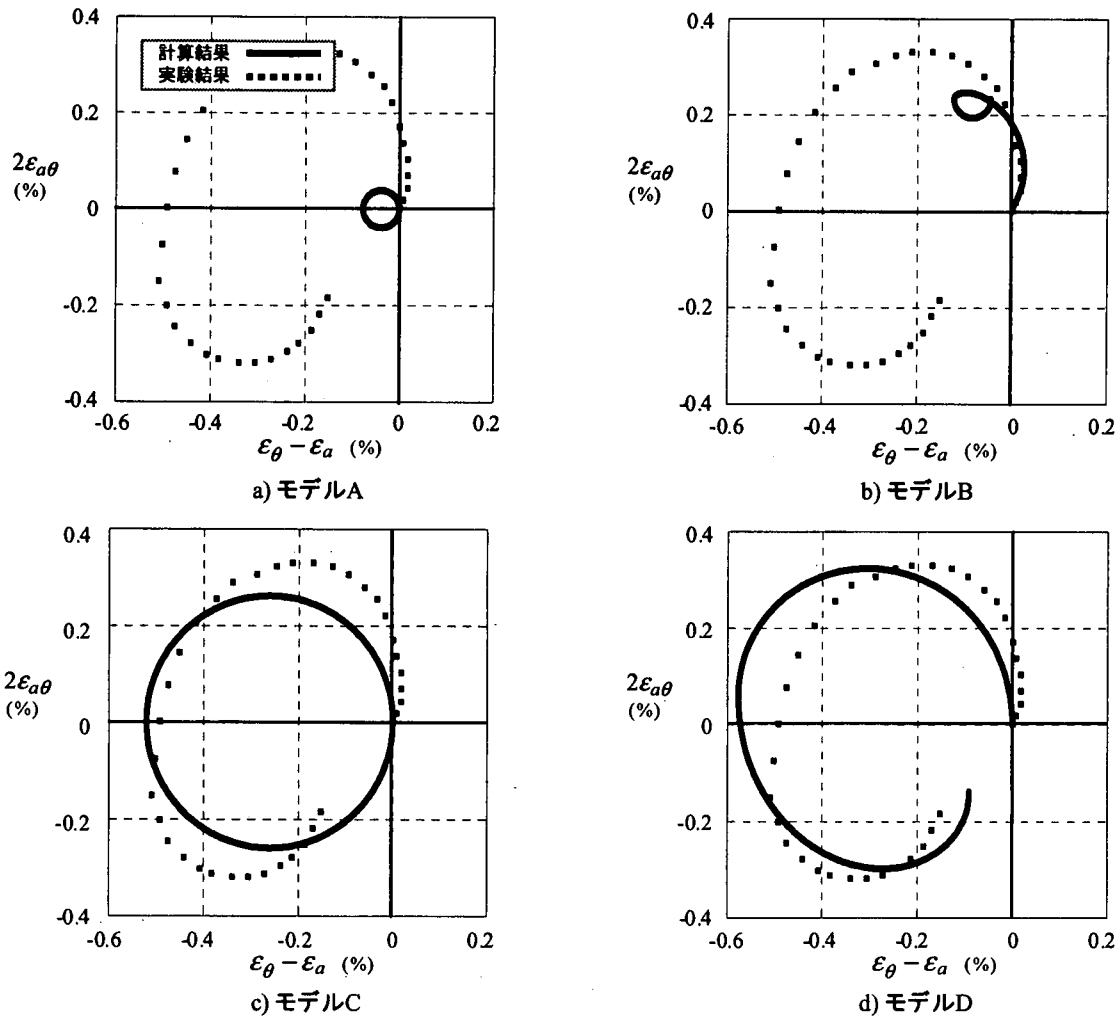


図9 滑らかな主応力軸回転に伴うひずみ

ブの間に得られた非弾性ひずみ増分を、試験の結果と併せて図8の非弾性ひずみ増分空間 ($d\epsilon_{\theta}^i - d\epsilon_a^i$, $2d\epsilon_{a\theta}^i$) に示す。まず、接線塑性および回転硬化を考慮しないAモデルの非弾性ひずみ増分応答は、载荷初期において図6の $N(\beta=0)$ 方向に一致している。なお、P-150は $\|\sigma^*\|$ の増加が少なく、降伏面の接線方向への载荷であるので、非弾性ひずみ増分はほとんど得られない。次に、Aモデルへ異方性を考慮したBモデルにおいては、载荷初期の非弾性ひずみ増分が図6の $N(\beta \neq 0)$ 方向へ生じている。また、P-150に関しても、図7に示したような下負荷面の移動に起因する非共軸性により、Aモデルより大きな非弾性ひずみ増分を示しているが、実験結果を適切に表現していない。また、Aモデルへ接線塑性を考慮したCモデルは、降伏面の接線方向成分によってもひずみ増分が生じるため、P-150に関して比較的良好に実験値を表現しているが、回転硬化を考慮していないために、 $N(\beta=0)$ 方向に大きな非弾性ひずみを予測している。最後に、接線塑性および異方性の両者を考慮したDモデルは、いずれの方向に対しても実験結果をよく再現しており、非弾性ひずみ増分の応力増分依存性を表現可能であることがわかる。

3.4 主応力軸方向回転試験

現提案モデルの照査に用いる主応力軸回転試験結果¹⁾では、図2に示される (X, Y) 面上の原点から点Qまでせん断後、3主応力の大きさ一定 ($\|\sigma^*\|=50\text{kPa}$) のもとで、主応力軸方向を滑らかに回転させている。なお、この応力経路はMohr円に沿うものであり、等方応力、偏差応力の大きさおよび b 値はいずれも一定である。モデルおよび材料定数は応力プローブ試験の場合と同様、表1および2で与えられるものを採用した。図9に主応力軸回転時に得られるひずみ関数 ($\epsilon_{\theta} - \epsilon_a$, $2\epsilon_{a\theta}$) の実験結果とA、B、CおよびDモデルによる計算結果を示す。

まず、接線塑性および異方性のいずれも考慮しないAモデルにおいては、主応力軸回転試験を通じて等方および偏差応力の大きさが一定であるため塑性変形が生じず、弾性変形のみを予測する。次に、Aモデルに回転硬化を考慮したBモデルにおいては、図6および7に示したように応力の主軸と塑性ひずみ速度の主軸が一致しないため、主応力軸方向の回転に伴う非弾性変形を予測可能であり、ひずみの集積が計算されている。ただし、下負荷面の外側へ応力速度増分が生じる Y 軸正の領域

においてのみ非弾性変形を生じ、 Y 軸負の領域においては弾性変形のみを予測する。また、 A モデルに接線塑性を考慮した C モデルでは、降伏面の接線方向の応力増分によって非弾性ひずみ増分が生じるため、 A モデルのものよりも大きなひずみを予測しているが、応力が Q 点に戻るとともに非弾性ひずみ増分も 0 となり、ひずみの集積を表現し得ない。最後に、接線塑性および異方性の両者を考慮した D モデルは、実験結果を適切に表現しており、主応力軸回転に伴うひずみの集積の予測には接線塑性および異方性が不可欠な役割を果たすことがわかる。

4. まとめ

接線塑性一下負荷面モデルに降伏面の回転に基づく異方性を導入して、応力プローブ試験結果および主応力軸回転試験結果のシミュレーションを行って、これらの実験結果との比較により、本構成式の妥当性の照査を行った結果、以下の知見を得た。

- 1) 接線塑性および回転硬化を考慮しない等方硬化型のモデルは、応力増分方向に対応した非弾性ひずみ増分を適切に表現し得ない。また、 3 主応力一定条件下では弾性変形のみを予測し、ひずみの集積を表現し得ない。
- 2) 異方性のみを導入したモデルは、応力増分方向に対応した非弾性ひずみ増分を適切に表現し得ない。また、応力と塑性ひずみ速度の非共軸性により、主応力軸回転時の非弾性変形を予測するが、実験結果を妥当に表現し得ない。
- 3) 接線塑性のみを導入するモデルは、応力増分方向に対応した非弾性ひずみ増分を表現し得るが、主応力軸回転時のひずみの集積を適切に表現し得ない。
- 4) 接線塑性および回転硬化の概念を導入した下負荷面モデルは、応力増分方向に対応した非弾性ひずみ増分を予測し、さらに、主応力軸回転時の変形挙動を適切に表現し得る。

以上、回転硬化を考慮した接線塑性一下負荷面モデルにより、非弾性ひずみの応力増分方向依存性および主応力軸回転に伴うひずみの集積の予測が可能であることが明らかとなった。

参考文献

- 1) Miura, K., Miura, S. and Toki, S., Deformation behavior of anisotropic dense sand under principal stress axes rotation. *Soils and Found.* Vol. 26, No. 1, pp. 36-52, 1986.
- 2) Pradel, D., Ishihara, K. and Gutierrez, M., Yielding and flow of sand under principal stress axes rotation. *Soils and Found.* Vol. 30, No. 1, pp. 87-99, 1990.
- 3) Gutierrez, M., Ishihara, K. and Towhata, I., Flow theory for sand during rotation of principal stress direction. *Soils and Found.* Vol. 31, No. 4, pp. 121-132, 1991.
- 4) Kishino, Y., The incremental nonlinearity observed in numerical tests of granular media, CD-ROM Proc. 15th ASCE Eng. Mech. Conf., 2002.
- 5) 金子賢治, 石井建樹, 鳴海 渉: 応力主軸回転を受ける粒状体の塑性ひずみ増分応答の考察, 応用力学論文集, Vol.5, 2002, 投稿中.
- 6) 石井建樹, 金子賢治, 岸野祐次: 真三軸応力プローブに対する粒状体の増分非線形応答について, 応用力学論文集, Vol.5, 2002, 投稿中.
- 7) Koiter, W.T., Stress-strain relations, uniqueness and variational theories for elastic-plastic materials with singular yield surfaces. *Quart. Appl. Math.* Vol. 11, pp. 350-354, 1953.
- 8) Sewell, M.J., A plastic flow at a yield vertex. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 22, pp. 469-490, 1974.
- 9) Christoffersen, J. and Hutchinson, J.W., A class of phenomenological corner theories of plasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 27, pp. 465-487, 1979.
- 10) Petryk, H. and Thermann, K., A yield-vertex modification of two-surface models of metal plasticity. *Arch. Mech.* Vol. 49, pp. 847-863, 1997.
- 11) Spencer, A.J.M., A theory of kinematics of ideal soil under plane strain conditions. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 12, pp. 337-351, 1964.
- 12) Mehrabadi, M.M. and Cowin, S.C., On the double-sliding free rotating model for the deformation of granular materials. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 29, 269-282, 1981.
- 13) Mroz, Z., On forms of constitutive laws for elastic-plastic solids. *Archiwum Mechaniki Stosowanej*, Vol. 18, pp. 1-34, 1966.
- 14) Hashiguchi, K., The extended flow rule in plasticity. *Int. J. Plasticity*, Vol. 13, pp. 37-58, 1997.
- 15) Rudnicki, J.W. and Rice, J.R., Conditions for localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 23, pp. 371-394, 1975.
- 16) Yatomi, C., Yashima, A., Iizuka, A. and Sano, I., General theory of shear bands formation by a non-coaxial Cam-clay model. *Soils and Found.* Vol. 29, No. 3, pp. 41-53, 1989.
- 17) Papamichos, E. and Vardoulakis, I., Shear band formation in sand according to non-coaxial plasticity model. *Geotechnique*, Vol. 45, pp. 649-661, 1995.
- 18) Hashiguchi, K. and Tsutsumi, S., Elastoplastic constitutive equation with tangential stress rate effect. *Int. J. Plasticity*, Vol.17, pp. 117-145, 2001.
- 19) Hashiguchi, K. and Ueno, M., Elastoplastic constitutive laws of granular materials. in *Constitutive Equations of Soils (Proc. 9th Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng., Spec. Session 9, Tokyo)*, JSSMFE, pp. 73-82, 1977.
- 20) Hashiguchi, K., Constitutive equations of elastoplastic materials with elastic-plastic transition. *J. Appl. Mech.*

- (ASME) Vol. 47, pp. 266-272, 1980.
- 21) Hashiguchi, K., Subloading surface model in unconventional plasticity. *Int. J. Solids Struct.* Vol. 25, pp. 917-945, 1989.
 - 22) Hashiguchi, K. and Chen, Z.-P., Elastoplastic constitutive equation of soils with the subloading surface and the rotational hardening. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* Vol. 22, pp. 197-227, 1998.
 - 23) Hashiguchi, K., Mechanical requirements and structures of cyclic plasticity models. *Int. J. Plasticity*, Vol. 9, pp. 721-748, 1993.
 - 24) Hashiguchi, K., Fundamentals in constitutive equation: continuity and smoothness conditions and loading criterion. *Soils and Found.* Vol. 40, No. 4, pp. 155-161, 2000.
 - 25) Tsutsumi, S., Hashiguchi, K., Okayasu, Y., Saitoh, K. and Sugimoto, M., Mechanical response of subloading surface model with tangential plasticity. *J. Appl. Mech., JSCE*, Vol. 4, pp. 375-382, 2001.
 - 26) Hashiguchi, K. and Tsutsumi, S., Shear band formation analysis in soils by the subloading surface model with tangential stress rate effect. *Int. J. Plasticity*, in press.
 - 27) Sekiguchi, H. and Ohta, H., Induced anisotropy and time dependency in clays, *Constitutive Equations of Soils* (Proc. Spec. Session 9, 9th ICSMFE), Tokyo, pp. 229-239, 1977.
 - 28) Dafalias, Y.F., The plastic spin. *J. Appl. Mech. (ASME)* Vol. 52, pp. 865-871, 1985.
 - 29) Zbib, H.M. and Aifantis, E.C., On the concept of relative and plastic spins and its implications to large deformation theories. Part I: Hypoelasticity and vertex-type plasticity. *Acta Mech.* Vol. 75, pp. 15-33, 1988.
 - 30) Drucker, D.C., Conventional and unconventional plastic response and representation. *Appl. Mech. Rev. (ASME)* Vol. 41, pp. 151-167, 1988.
 - 31) Hashiguchi, K., Description of inherent/induced anisotropy of soils: rotational hardening rule with objectivity. *Soils and Found.* Vol. 41, No. 6, pp. 139-145, 2001.
 - 32) Hashiguchi, K., Isotropic hardening theory of granular media. *Proc. JSCE*, Vol. 227, pp. 45-60, 1974.
 - 33) Krieg, R. D. and Krieg, D. B., Accuracies of numerical solution methods for the elastic-perfectly plastic models. *J. Pressure Vessel Tech. (ASME)*, Vol. 99, pp. 510-515, 1977.

(2002 年 4 月 19 日受付)