

粘性土の平面ひずみ非排水伸張試験における分岐解析とその圧縮試験との比較

Bifurcation Analysis of Clay under Plane Strain Undrained Extension Loadings and Its Comparison with the Compression Loadings

志比利秀・亀井健史・矢富盟祥

Toshihide SHIBI, Takeshi KAMEI and Chikayoshi YATOMI

*正会員 博(工) 島根大学助手 総合理工学部地球資源環境学科 (〒690-8504 島根県松江市西川津町 1060)

**正会員 工博 島根大学助教授 総合理工学部地球資源環境学科 (〒690-8504 島根県松江市西川津町 1060)

***正会員 Ph. D. 金沢大学大学院教授 自然科学研究科地球環境科学専攻 (〒920-8667 石川県金沢市小立野 2 丁目 40-20)

This paper investigates inhomogeneous deformation behavior of clay under the plane strain undrained extension loadings based on bifurcation theory. Constitutive equations of clay are applied for a coaxial and a non-coaxial Cam-clay model. Development locations and forms of slip surfaces are estimated based on distribution of maximum shear strain at the occurrence of bifurcation. Bifurcation stress ratios with lower symmetric modes are smaller under extension loadings than any other mode. The smallest bifurcation stress ratio under extension loadings is larger than the smallest ratio under compression loadings. However, bifurcation stress ratio in extension tests is smaller than in compression tests in the case of lower symmetric modes that the influence of the allowable eccentric load is small. Slip surfaces observed under compression loadings develop from the center of the inside to the side in the end face at top and bottom. In extension tests, however, slip surfaces develop from the exterior to the point of greatest narrowing to the inside.

Key words: bifurcation, extension, non-coaxial, slip surface

1. はじめに

軟弱粘性土地盤上への盛土载荷によって地盤内にすべり面を伴うせん断破壊が発生する場合、そのせん断破壊の形式は、すべり面の各部分で異なっており、これを模式的に示すと図-1 のようになる。一次元圧密 (K_0 圧密) を受けた地盤では、载荷前の最大主応力の方向は、場所によらず鉛直である。しかしながら、载荷後の最大主応力の方向は、盛土直下のような主働域では鉛直のままであるが、すべり面に沿って载荷位置から遠ざかるのに伴い徐々に変化してゆき、すべり面先端のような受働域においては水平となる。したがって、せん断破壊時には、すべり面上において圧縮から伸張までの種々の破壊形式が想定される。このような応力状態の違いによる異方性は、応力誘導異方性と呼ばれ、地盤の強度・変形特性に大きな影響を及ぼす。一般的に地盤工学においては、土固有の異方性と上記の応力誘導異方性の両者を合わせて異方性と総称している。この点に関して、Ladd *et al.*¹⁾ は、既往の研究データを取りまとめ、平面ひずみ伸張せん断における c_u 値の大きさは平面ひずみ圧縮せん断における c_u 値の 0.4~0.8 倍程度となることを報告している。

室内試験において一般的な圧密非排水三軸伸張試験に

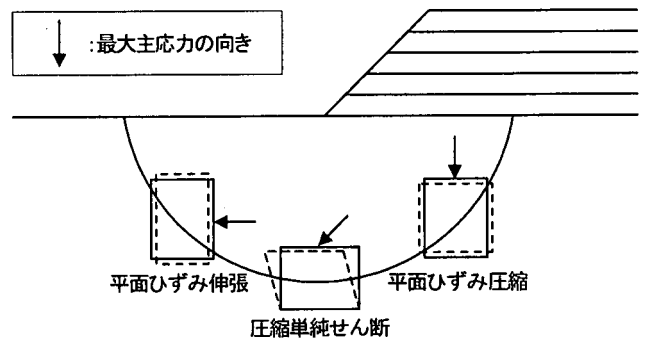


図-1 すべり面に沿うせん断条件の変化

着目すると、粘土供試体の変形挙動は、以下のような遷移過程を辿る。軸差応力が小さな範囲では、側圧の増加、もしくは鉛直荷重の減少に伴い、供試体は均一に半径方向に圧縮され軸方向には伸張される。そのときの供試体内のひずみは、場所によらず均一な状態となっている。しかしながら、伸張载荷の進行に伴い軸差応力が最大値近傍に達すると、供試体は中央付近でくびれるような非均一な変形を示し、供試体内にひずみの局所化が観察される。その後、供試体表面には、タスキ型のすべり面が発生し、供試体は破壊へと至る²⁾。

このような粘土供試体の均一ひずみ状態からひずみの

局所化、せん断帯の形成、すべり面への発達といった一連の変形挙動の移り変わりに着目した研究が、最近盛んに行われている。実験的な研究例としては、例えば、微小なノッチを導入した粘土供試体に対して中空円筒ねじり試験を行い、せん断帯の形成に及ぼすノッチの影響を明らかにした研究がある。その中で、ノッチの存在の有無は、応力-ひずみ曲線に大きな影響を及ぼさないが、その変形挙動に違いが現れることや、ノッチの方向と形成されるせん断帯の傾きが一致する場合には、せん断帯が応力-ひずみ曲線のピークの80%程度で形成されることが報告されている³⁾。

また、近年のコンピュータの発達と土の力学的挙動をよく説明できる構成式の出現により、土の構成式に必要な土質定数を精度よく求めることが出来れば、有限要素法等の数値解析を行うことにより、地盤の変形挙動をある程度予測できるようになってきている。このような有限要素法を用いて粘土供試体の圧縮载荷試験の解析を行い、载荷に伴うせん断帯の形成のシミュレートを行う研究もなされている。それらの研究では、せん断帯の形成に及ぼす間隙水の移動の重要性⁴⁾や载荷に伴う変形挙動の遷移現象⁵⁾、粒度組成の違いがせん断帯の傾きに及ぼす影響⁶⁾に関して報告がなされている。しかしながら、これらの有限要素解析を用いたせん断帯の形成シミュレートは、初期供試体に不整形を導入した解析である。

一方、供試体の変形が均一な状態から非均一な状態へと移行する現象に着目し、その均一変形状態を保つ限界荷重を求める分岐解析^{7), 8)}を用いた理論解析手法も行われている。この解析手法は、初期供試体に不整形を導入することなく、非均一変形やひずみの局所化を表すことが可能であり、その結果得られる最大せん断ひずみや応力状態量の分布性状に着目することにより、形成されるすべり面の発生位置および形態を推察することができるという特徴を有する。とくに粘土の構成方程式に非共軸 Cam-clay モデルを用いた場合には、载荷に伴う供試体寸法比の変化を考慮することにより、共軸 Cam-clay モデルでは説明できない樽型に膨らむような対称バルジ型の変形現象を説明できることが報告されている⁷⁾。すなわち、载荷前において粘土内部の応力状態が均一であっても、载荷に伴い粘土の変形や内部の応力状態が均一でなくなるような場合には、非共軸性の存在が粘土の強度・変形特性に大きな影響を及ぼすこととなる。地盤材料に対するこのような分岐解析の既往の研究では、圧縮領域における解析がほとんどであり、伸張領域における研究例はあまり見受けられない。前述したように、軟弱粘性土地盤上への盛土载荷によって地盤内に発生するすべり面を伴うせん断破壊では、すべり面は、圧縮領域だけではなく、伸張領域にも形成される。このような場合には、それぞれの領域における地盤材料の破壊メカニズムを明らかにし、それらを総合して地盤の破壊現象を捉えることが地盤工学上極めて重要となる。したがって、分岐概

念に基づいて、地盤の破壊現象を考える場合には、伸張領域においても分岐解析を実施し、地盤材料の破壊メカニズムを解明する必要がある。

本研究では、伸張領域における地盤材料の破壊メカニズムを解明するために、正規圧密粘土供試体に対して平面ひずみ非排水伸張試験の場合における分岐解析を行い、種々の非均一変形が生じる分岐荷重を明らかにする。なお、粘土の構成式としては、非共軸性の影響を検討するために、共軸 Cam-clay モデルと非共軸 Cam-clay モデルを用いている。さらに、分岐時の供試体内の最大せん断ひずみ分布に着目し、その性状から破壊時に形成されるすべり面の発生位置およびその形状について考察を行う。また、圧縮試験における分岐荷重、およびすべり面の発生位置・形状と伸張試験におけるそれらとの比較検討も行っている。

2. 構成式

本研究では、粘土の構成式として有限変形に拡張した Cam-clay モデルとそのモデルに非共軸項を導入した非共軸 Cam-clay モデル⁹⁾を用いる。なお、前者のモデルは、後者と比較して、共軸 Cam-clay モデルと呼ばれる。まず、共軸 Cam-clay モデルについて簡単に説明する。

共軸 Cam-clay モデルの降伏関数 f は次式で提案される。

$$f = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e} \ln \frac{p'}{p'_0} + D \left(\frac{q}{p'} \right) - v^p = 0 \quad (1)$$

ここで、 p' と p'_0 は、それぞれ平均有効主応力と先行圧密圧力であり、応力比 $\eta (= q/p')$ は p' と一般化された偏差応力の比を、 v^p は塑性体積ひずみを表している。また、 λ と κ はそれぞれ自然対数表示による圧縮指数と膨潤指数を表し、 e は間隙比、 D はダイレイタンシー係数を表す。なお、ダイレイタンシー係数は、限界状態における応力比 M と、 $D = (\lambda - \kappa) / \{M(1 + e)\}$ により関係付けられる¹⁰⁾。

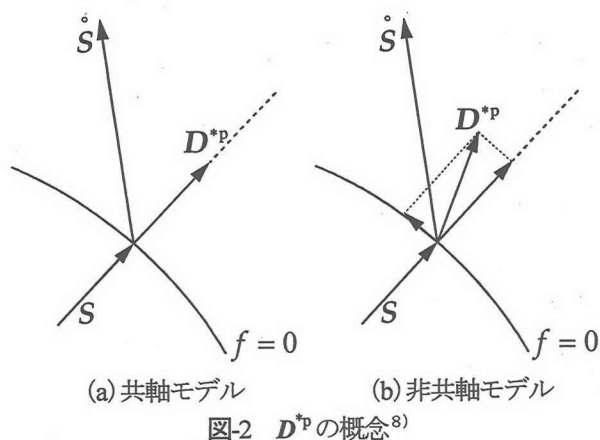
変形速度 D の塑性成分 D^p は、この降伏関数 f に対して関連流れ則を適用することにより、次式として得られる。なお、 D^p は、 D^p の偏差成分を表している。

$$2D_{ij}^{*p} = \frac{1}{h} \frac{S_{ij}}{\tau} \left\{ \frac{S_{kk}}{2\tau} T_{kk}^* - \frac{1}{3} \bar{\beta} T_{kk}^* \right\} \quad (2)$$

$$D_{kk}^p = -\frac{\bar{\beta}}{h} \left\{ \frac{S_{kk}}{2\tau} T_{kk}^* - \frac{1}{3} \bar{\beta} T_{kk}^* \right\} \quad (3)$$

ここで、 $\dot{T}'$ は有効 Cauchy 応力の共回転速度、 S は T' の偏差成分を表しており、 $\tau = \sqrt{S_{ij} S_{ij}} / 2$ である。限界状態における応力比を M と表すと、 $\beta = (M - \eta) / \sqrt{3}$ は限界状態への隣接度を示す関数であり、 $h = (\beta \sqrt{3} D) p'$ は硬化係数を表す。なお、変形速度 D の弾性成分 D^e と有効 Cauchy 応力の共回転速度 $\dot{T}'$ との間にフックの法則が成り立つと仮定する。

いま、粘土の変形挙動を非排水変形 ($D_{ii} = 0$) で、かつ



平面ひずみ状態 ($D_{33} = 0$) に限定する場合 (すなわち, $D_{11} + D_{22} = 0$) には, 有限変形共軸 Cam-clay モデルの構成式は, 次式で書き表すことができる.

$$\left. \begin{aligned} \dot{T}'_{11} - \dot{T}'_{22} &= 2\mu^* (D_{11} - D_{22}) \\ \dot{T}'_{12} &= 2\mu D_{12} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここで, μ^* と μ は, それぞれ 45° せん断におけるせん断係数と単純せん断係数であり, 次式で与えられる.

$$\mu^* = \frac{\tilde{h}\tilde{G}}{\tilde{h} + \tilde{G}}, \quad \mu = \tilde{G} \quad (5)$$

また, $\tilde{h} = \tilde{K}\beta^2 + h$ であり, $\tilde{K} (= \{(1+e)/\kappa\}p')$ は体積弾性係数, $\tilde{G} (= \{3(1-2\nu)\}\tilde{K}/\{2(1+\nu)\})$ はせん断弾性係数を表している. なお, ν はポアソン比である.

一方, 非共軸 Cam-clay モデルの場合には, 変形速度 D の塑性成分 D^p は, 式(1)の降伏関数 f に関連流れ則を適用し, さらに応力速度の影響を考慮した付加項 (非共軸項) を加えることによって得られる.

$$2D_{ij}^{*p} = \frac{1}{h} \frac{S_{ij}}{\bar{\epsilon}} \left\{ \frac{S_{kl}}{2\bar{\epsilon}} \dot{T}'_{kl} - \frac{1}{3} \bar{\beta} \dot{T}'_{kk} \right\} + \frac{1}{h_1} \left(\dot{S}_{ij} - \frac{S_{ij} S_{kl}}{2\bar{\epsilon}^2} \dot{S}_{kl} \right) \quad (6)$$

ここで, h_1 は第2硬化係数と呼ばれ, 非共軸パラメータ $A (>0)$ を用いて, $h_1 = (\beta/\sqrt{3}A)p'$ と仮定される⁹⁾. 式(6)の第1項は降伏曲面の直交方向成分であり, 第2項は降伏曲面の接線方向成分である. 図-2に D^p の概念を示す. A の値は, 接線方向成分のみに影響を及ぼし, 直交方向成分には影響を及ぼさないことがわかる. A の増大に伴い, D^p の接線方向成分は増大し, 一方, A の減少に伴い, D^p の接線方向成分は減少しゆき, $A = 0$ の場合には, 非共軸モデルの D^p と共軸モデルの D^p は一致する.

平面ひずみ非排水せん断条件下においては, 有限変形非共軸 Cam-clay モデルの構成式は, 最終的に式(5)において以下のような変数変換を形式的に行うことにより, 式(4)を用いて表現できる.

$$\mu^* = \frac{\tilde{h}\tilde{G}}{\tilde{h} + \tilde{G}}, \quad \mu = \frac{h_1\tilde{G}}{h_1 + \tilde{G}} \quad (7)$$

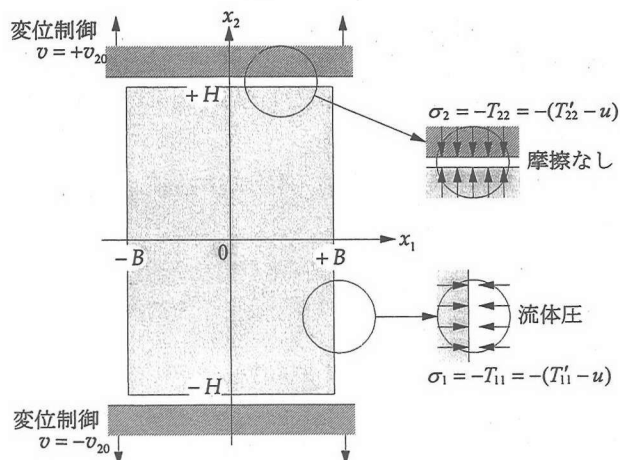


図-3 分岐時の供試体概形

すなわち, 非共軸パラメータ A は, 45° せん断変形には影響を及ぼさないが, 単純せん断変形には影響を及ぼし, A が増大するのに伴い, 主応力の回転に伴う単純せん断変形がより発生しやすくなる. このような特徴から, この非共軸モデルは, これまでにせん断帯生成に関する理論解析⁹⁾ や分岐解析^{7), 8)} および有限要素解析⁶⁾ などの種々の解析に用いられてきている. また, 粘土の構成式に用いる土質定数の種類も, $\lambda, \kappa, \nu, e, M$, および A の6種類であり, 比較的少ないという利点がある.

前述した平面ひずみ非排水条件 ($D_{11} + D_{22} = v_{1,1} + v_{2,2} = 0$) を考慮することにより, 速度場 v の成分は, 流れ関数 ψ を用いて次式で表せる.

$$v_1 = \psi_{,2}, \quad v_2 = -\psi_{,1} \quad (8)$$

このとき, 式(4)は, 以下のように書き換えられる.

$$\begin{aligned} \dot{T}'_{11} - \dot{T}'_{22} &= 4\mu^* \psi_{,12} \\ 2\dot{T}'_{12} &= (2\mu + \bar{q}) \psi_{,22} - (2\mu - \bar{q}) \psi_{,11} \end{aligned} \quad (9)$$

ここで, $\bar{q} (= \sigma_1' - \sigma_2' = 2q/\sqrt{3})$ は軸差応力である.

3. 分岐条件式

粘土の非排水せん断強さが, 排水せん断強さと比べて, より小さいことや粘土地盤の透水性が小さいことなどを考慮すると, 非排水条件下における粘土の変形・強度特性を把握することが重要となる. 本研究では, 平面ひずみ非排水条件下において, 伸張载荷を受ける正規圧密粘土供試体を対象として, 分岐解析を行う.

境界条件として, 供試体の両側面に液圧により一定圧力を作用させ, 上下方向に変位制御により伸張するものとする. なお, 供試体の上下端面には, 摩擦が働かないものとする. このとき, 伸張初期において, 供試体は均一な変形を維持し続け, 分岐の瞬間において, 幅 $2B$, 高さ $2H$ の供試体へと均一に変形しているものと仮定する (図-3). なお, 後述する境界条件下で速度場を求める

ことにより、分岐の瞬間までは、供試体は、均一な変形を維持することがわかる。この場合には、供試体内の応力やひずみも、分岐の瞬間までは均一状態を保ち続けることとなる。

静的に伸張载荷を行う場合、増分釣合式は、次式で書き表せる。

$$\begin{aligned} \dot{T}'_{11,1} + \dot{T}'_{12,2} - \dot{u}_{,1} &= 0 \\ \dot{T}'_{21,1} + \dot{T}'_{22,2} - \dot{u}_{,2} &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

増分釣合式に構成式を代入することにより、流れ関数 ψ に関する支配方程式が得られる。

$$a\psi_{,111} - 2b\psi_{,112} + c\psi_{,222} = 0 \quad (11)$$

ここで、 $a=2\mu-\bar{q}$ 、 $b=-(4\mu^*-2\mu)$ 、 $c=2\mu+\bar{q}$ とおいた。式(11)は、 ψ に関して線形偏微分方程式となっていることから、流れ関数によって表される速度場は、均一場と非均一場の重ね合わせにより表現できる。

一方、分岐時の境界条件は、一定側圧の大きさを σ_1 、上下端面における伸張速度を v_{20} とすると、次式となる。

$$\begin{cases} (\dot{s}_i)_1 = \sigma_1 L_{11}, (\dot{s}_i)_2 = \sigma_1 L_{12} & \text{on } x_1 = \pm B \\ (\dot{s}_i)_1 = 0, v_2 = \pm v_{20} & \text{on } x_2 = \pm H \end{cases} \quad (12)$$

ここで、 L は速度勾配、 $s_i (= S_i n)$ は全公称表面力速度であり、 S_i は全公称応力速度、 n は考えている面の単位法線ベクトルを表している。なお、間隙水に関する境界条件は、非排水条件を仮定しているので、前述した $D_{ii} = 0$ を満足することにより、自動的に成立する。

供試体内において、応力状態およびひずみ状態が均一な場合には、伸張载荷の進展に伴う供試体の変形は、均一変形状態を維持し続けることが可能である。したがって、分岐現象は、伸張载荷の進展に伴って非均一な変形状態が生じうるときに発生するものと考えられる。

前述したように、速度場の重ね合わせが可能であり、かつ境界条件も流れ関数に関して線形関係にある。したがって、式(12)の境界条件を満足する解は、以下に示す境界条件の解の和により表される。

均一境界条件：

$$\begin{cases} \dot{T}'_{11} = 0, \dot{T}'_{12} = 0 & \text{on } x_1 = \pm B \\ \dot{T}'_{21} = 0, v_2 = \pm v_{20} & \text{on } x_2 = \pm H \end{cases} \quad (13)$$

非均一境界条件：

$$\begin{cases} \dot{T}'_{11} = \dot{u}, \dot{T}'_{12} = \bar{q} L_{12} & \text{on } x_1 = \pm B \\ \dot{T}'_{21} = 0, v_2 = 0 & \text{on } x_2 = \pm H \end{cases} \quad (14)$$

式(13)は、供試体内の各点において、変形が均一な伸張状態となる境界条件であり、その解 ($D_{22} = -D_{11} = v_{20}/H$,

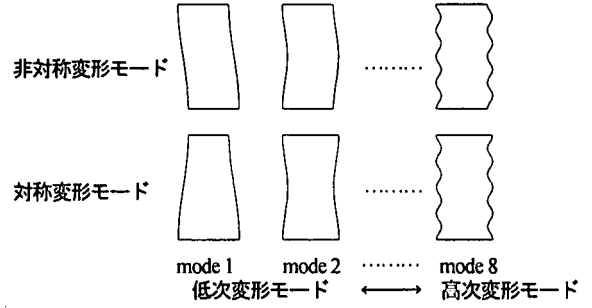


図4 変形モード概形

$D_{12} = W_{12} = 0$) は自明である。したがって、供試体内の各点において、式(14)を満足するような非自明な解が存在するとき、分岐現象が発生することとなる。なお、供試体の各点で塑性負荷状態となるような変形は、非均一な速度場に、各点で負荷状態となるような均一な速度場を重ね合わせることで表現できる。以後、式(14)を境界条件と呼ぶこととする。

境界条件に増分釣合式、構成式を用いることにより、式(14)は次式のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} a\psi_{,111} - (2b-a)\psi_{,122} &= 0 \\ \psi_{,11} - \psi_{,22} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (a \neq 0) \quad \text{on } x_1 = +B \\ & \left. \begin{aligned} \psi_{,1} &= 0 \\ \psi_{,22} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} (c \neq 0) \\ (a \neq 0) \end{aligned} \quad \text{on } x_2 = +H \end{aligned} \quad (15)$$

各点非排水条件の下で圧縮性弾塑性体（粘土）を二軸圧縮せん断する際に導かれる構成式、増分釣合式、境界条件に、各点非排水条件を満足する流れ関数を導入して得られた式は、非圧縮弾塑性体に対して側面荷重を 0 とした単純な一軸引張試験¹¹⁾や一軸圧縮試験¹²⁾を行う際に得られる式と同様の型となることが報告されている⁶⁾。本解析においても、式(4)、式(10)、および式(12)は、粘土（圧縮性弾塑性体）を各点非排水条件の下で平面ひずみ伸張せん断（二軸伸張条件下）する場合に導かれる式であるが、流れ関数を導入して最終的に得られた式(11)、式(15)は、単純な一軸引張試験¹¹⁾や一軸圧縮試験¹²⁾から得られた式と同様の型となることがわかった。したがって、以下の分岐条件式の誘導は、文献^{11), 12)}を参考にして行うものとする。

まず、式(15)の中の上下端面の境界条件を考慮して、流れ関数 ψ を次式のように仮定する。

$$\psi = V(x_1) \cos(k_m x_2) \quad (16)$$

ここで、 $k_m = m\pi/2H$ であり、 $m (= 1, 2, \dots)$ は変形モードを表す（図4）。なお、 m が偶数の場合には、 x_2 の原点を H/m だけ移動させる必要がある。流れ関数 ψ は、式(11)を満足する必要があるため、 $V(x_1)$ は、式(16)を式(11)に代入して得られる次式を満足する必要がある。

表-1 平面ひずみ非排水伸張せん断試験における各領域の判別条件, $V(x_1)$ の一般解, および分岐条件式
 $(A_1, A_2$: 未定定数, $a=2\mu-\bar{q}$, $b=-(4\mu^*-2\mu)$, $c=2\mu+\bar{q})$

	判別条件	ρ と P, Q および P, Q と a, b, c の関係		$V(x_1)$ の一般解	分岐条件式
EC 領域	$b^2 - ac < 0$	$\rho = P \pm iQ, -(P \pm iQ)$ $P^2 - Q^2 = \frac{b}{a}$ $P^2 + Q^2 = \sqrt{\frac{c}{a}}$	対称 モード	$*\Re[(A_1 + iA_2)\sin\{(P + iQ)k_m x_1\}]$	$\frac{Q \sin(2Pk_m B)}{P \sinh(2Qk_m B)} = \frac{(a-c)\sqrt{a} - 2(a-b)\sqrt{c}}{(a-c)\sqrt{a} + 2(a-b)\sqrt{c}}$
			非対称 モード	$*\Re[(A_1 + iA_2)\cos\{(P + iQ)k_m x_1\}]$	$\frac{Q \sin(2Pk_m B)}{P \sinh(2Qk_m B)} = -\frac{(a-c)\sqrt{a} - 2(a-b)\sqrt{c}}{(a-c)\sqrt{a} + 2(a-b)\sqrt{c}}$
EI 領域	$b^2 - ac > 0$, $\frac{b}{a} < 0$, $2\mu > \bar{q} $	$\rho = \pm iP, \pm iQ$ $P^2 - Q^2 = \frac{2\sqrt{b^2 - ac}}{a}$ $P^2 + Q^2 = -\frac{2b}{a}$	対称 モード	$A_1 \sin(Pk_m x_1) + A_2 \sin(Qk_m x_1)$	$\frac{P \tanh(Qk_m B)}{Q \tanh(Pk_m B)} = \frac{(1 + P^2)^2}{(1 + Q^2)^2}$
			非対称 モード	$A_1 \cos(Pk_m x_1) + A_2 \cos(Qk_m x_1)$	$\frac{P \tanh(Pk_m B)}{Q \tanh(Qk_m B)} = \frac{(1 + P^2)^2}{(1 + Q^2)^2}$
H 領域	$b^2 - ac > 0$, $\frac{b}{a} > 0$, $2\mu > \bar{q} $	$\rho = \pm P, \pm Q$ $P^2 - Q^2 = \frac{2\sqrt{b^2 - ac}}{a}$ $P^2 + Q^2 = \frac{2b}{a}$	対称 モード	$A_1 \sinh(Pk_m x_1) + A_2 \sinh(Qk_m x_1)$	$\frac{P \tan(Qk_m B)}{Q \tan(Pk_m B)} = \frac{(1 - P^2)^2}{(1 - Q^2)^2}$
			非対称 モード	$A_1 \cosh(Pk_m x_1) + A_2 \cosh(Qk_m x_1)$	$\frac{P \tan(Pk_m B)}{Q \tan(Qk_m B)} = \frac{(1 - P^2)^2}{(1 - Q^2)^2}$
P 領域	$2\mu < \bar{q} $	$\rho = \pm P, \pm iQ$ $P^2 - Q^2 = \frac{2b}{a}$ $P^2 + Q^2 = -\frac{2\sqrt{b^2 - ac}}{a}$	対称 モード	$A_1 \sin(Pk_m x_1) + A_2 \sinh(Qk_m x_1)$	$\frac{P \tanh(Qk_m B)}{Q \tan(Pk_m B)} = \frac{(1 - P^2)^2}{(1 + Q^2)^2}$
			非対称 モード	$A_1 \cos(Pk_m x_1) + A_2 \cosh(Qk_m x_1)$	$\frac{P \tan(Pk_m B)}{Q \tanh(Qk_m B)} = -\frac{(1 - P^2)^2}{(1 + Q^2)^2}$

* $\Re[\dots]$ は, $[\dots]$ の実数部分を表す.

$$(aD^4 + 2bk_m^2 D^2 + ck_m^4)V(x_1) = 0 \quad (17)$$

ここで, D は x_1 に関する微分演算子であり, その右肩の数字はその微分階数を表している. $V(x_1)$ は, 供試体の変形形状が対称モードの場合には $\sin(\rho k_m x_1)$ により, 非対称モードの場合には $\cos(\rho k_m x_1)$ により表現できると仮定すると, 式(17)は次式へと書き換えられる.

$$a\rho^4 - 2b\rho^2 + c = 0 \quad (18)$$

この ρ に関する4次方程式の実数解の個数により, 式(17)は分類され, 実数解の存在個数が0, 2, および4に対応して, それぞれ楕円領域(E), 放物領域(P), および双曲領域(H)と呼ぶ¹¹⁾. また, 楕円領域はさらに2つの領域に分類され, 4つの異なる複素数解を有する場合を(EC)と, 4つの異なる虚数解を有する場合を(EI)と呼ぶ¹²⁾. このとき, 領域の判別条件, $V(x_1)$ の一般解および分岐条件式等を表-1に整理して示す. なお, 分岐条件式は, $V(x_1)$ の一般解を代入した側面の境界条件において, $V(x_1)$ の一般解中に存在する未定定数 A_1, A_2 の非自明な解が存在する条件として得られる. 得られた分岐条件式は, 圧縮試験の場合と同様の型となるが, P領域では P, Q と a, b, c の間の関係式が一部異なっているので注意する必要がある.

表-2 本解析に用いた土質定数^{9), 13)}

λ	=	0.231
κ	=	0.042
ν	=	0.333
e	=	1.5
M	=	1.43
A	=	0.01(0)*

*共軸モデルの場合は $A=0$, 非共軸モデルの場合は $A=0.01$.

4. 解析結果および考察

本研究で用いた粘土の土質定数¹³⁾を表-2に示す. なお, 非共軸パラメータ A の値を実験的に明らかにするためには, 種々の応力条件下で供試体に単純せん断変形を与え, そのときの応力状態と塑性ひずみの増分を求める必要がある. 現在までのところ, 非共軸性を詳細かつ正確に検討した定量的な実験は, ほとんど認められていない. そこで, 非共軸モデルに用いる非共軸パラメータ A の値は, 有限変形理論を用いたせん断帯形成理論⁹⁾, および分岐解析による数値実験結果¹⁴⁾に基づいて決定した.

4. 1 伸張試験における分岐荷重

粘土のような摩擦性材料の場合には, 平均有効主応力

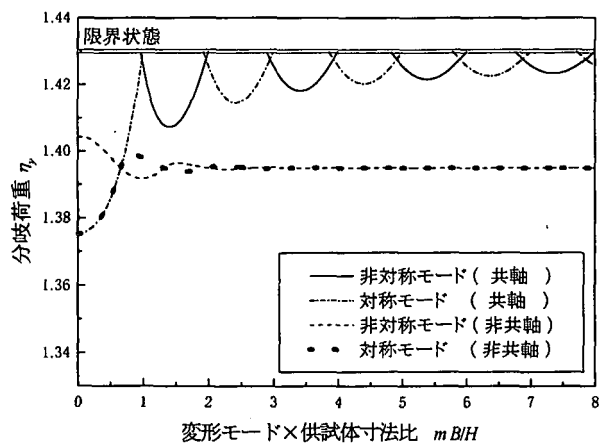


図-5 分岐荷重 η_f と供試体寸法比 B/H および変形モード m の関係（伸張試験）

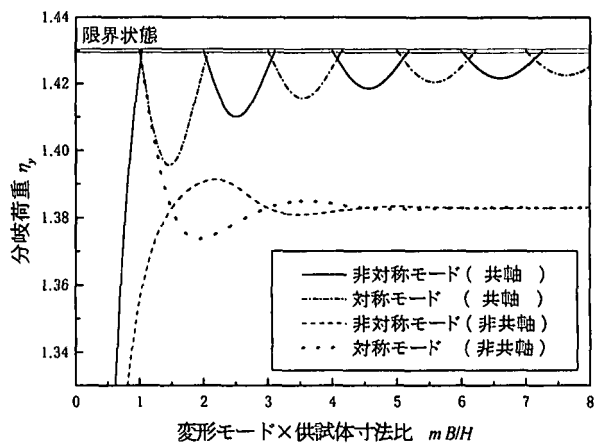


図-6 分岐荷重 η_f と供試体寸法比 B/H および変形モード m の関係⁷⁾（圧縮試験）

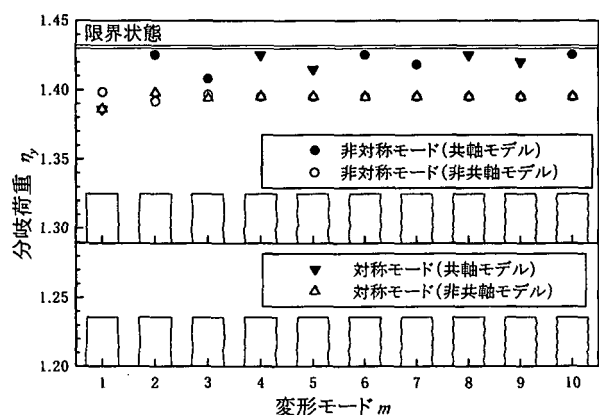


図-7 分岐荷重 η_f と変形モード m の関係
（伸張試験・ $B/H=0.5$ ）

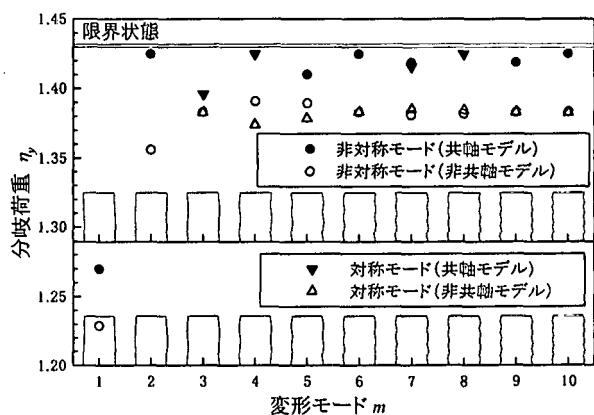


図-8 分岐荷重 η_f と変形モード m の関係⁷⁾
（圧縮試験・ $B/H=0.5$ ）

の増大に伴い、せん断強さも増加する。したがって、本研究のような均一多軸応力条件下での分岐荷重としては、軸応力 σ や主応力差 q よりも、応力比 $\eta(=q/p)$ が物理的に最も合理的な分岐荷重の定義であると考えられる。したがって、本研究では、分岐時の応力比 η_f を「分岐荷重」と呼ぶ。以後、この分岐荷重の存在およびその解析値の大きさやそのときの最大せん断ひずみ分布から、分岐現象ないしすべり面の発生位置やその形態に関して考察を行う。しかしながら、弾塑性体の場合には、弾性体の場合とは異なり、分岐荷重が存在しても、そのときの均一変形状態が必ずしも不安定になるとは限らない。均一変形状態が安定な場合には、分岐荷重が存在しても、均一変形状態を維持し続ける。分岐現象は、均一変形状態が不安定となり、かつ分岐荷重が存在する場合にのみ発生し、その場合には、供試体の変形は均一変形状態を維持し続けることが困難となり、非均一変形状態へと移行する。したがって、供試体の変形状態が均一変形状態から非均一変形状態へと移行すること、すなわち分岐現象が発生することを正確に示すためには、そのときの均一変形

状態が不安定であることを証明する必要がある。そのためには、弾塑性体の場合、負荷除荷領域を考慮した全ての仮想変形状態を想定する必要がある。このような証明は、非常に困難であり、著者らの知る限り皆無である。また、たとえ、理論的にある均一変形が安定であることが証明できたとしても、実際の供試体には、なんらかの初期不整が存在することから、均一変形状態を維持し続けることが困難となり、分岐解へと移行することもある。

図-5に平面ひずみ非排水伸張試験における分岐荷重 η_f と供試体寸法比 B/H および変形モード m の関係を示す。なお、分岐荷重は、対称、非対称の種々の変形モードのおのについて、限界状態における応力比以下の範囲の中で最小の分岐荷重のみを示している（非排水平面ひずみ条件下では、応力状態が限界状態を超えないことが簡単に証明できる）。

共軸モデルの場合には、 mB/H の値が増大するのに伴い、分岐荷重 η_f は、区分的に増減を繰り返しながら、大きくなり、限界状態に漸近する傾向を示している。また、対称および非対称変形モードのそれぞれの分岐荷重に着

目すると、 m B/H の増大に伴い周期的に分岐荷重が存在しない範囲が存在している。したがって、共軸モデルを用いた場合には、供試体寸法比の違いが分岐荷重に大きな影響を及ぼすことがわかる。とくに、分岐荷重が区分的に増減する傾向も幾何学性が鋭敏に影響した結果である。共軸モデルを用いた場合に、周期的に対称および非対称変形モードの分岐荷重が存在しない範囲が認められるという分岐解析結果は、平面ひずみ非排水圧縮試験における分岐荷重 η_y と供試体寸法比 B/H および変形モード m の関係⁷⁾ (図-6) においても報告されている。

非共軸モデルの場合には、 m B/H の値が増大するのに伴い、対称変形モードの場合には、最小値 ($\eta_y = 1.375$) から増大してゆき、 m $B/H = 0.75$ 程度で極大値 ($\eta_y = 1.4$) となったあとは、共軸モデルとは異なり、明瞭な周期性を示さずに一定値 ($\eta_y = 1.395$) となる。一方、非対称変形モードの場合には、対称変形モードの場合とは異なり、最大値 ($\eta_y = 1.405$) から減少してゆき、 m $B/H = 1$ 程度で極小値 ($\eta_y = 1.39$) をとり、その後は対称変形モードと同様に一定値 ($\eta_y = 1.395$) となる。したがって、非共軸モデルの場合には、供試体寸法比の違いが分岐荷重に大きな影響を及ぼさないことや、共軸モデルの場合と比較して、分岐現象が発生しやすいことが明らかとなった。圧縮試験においても、非共軸モデルを用いた場合には、供試体寸法比の違いが分岐荷重に影響を及ぼし難いことや m B/H の比較的大きな範囲の分岐荷重 η_y は、周期性を有さず、一定値となることが報告されている⁷⁾ (図-6)。

また、圧縮試験では、非対称変形モードの分岐荷重が、 m B/H が小さな範囲において、小さな値となるのに対して、伸張試験では、対称変形モードの分岐荷重が小さな値となる。すなわち、圧縮試験では非対称変形モードが、伸張試験では対称変形モードの非均一変形が発生しやすいものと推察される。

次に、より具体的な例として、とくに分岐時の供試体寸法比が $B/H = 0.5^{15)}$ となる場合に関する分岐解析結果を示す。図-7は、平面ひずみ非排水伸張試験の際の分岐荷重 η_y と変形モード m ($m=1\sim 10$) の関係を示している。

共軸モデルを用いた場合には、 $m = 1, 4, 5, 8, 9$ の場合に対称モード、 $m = 2, 3, 6, 7, 10$ の場合に非対称モードの分岐荷重が存在していることがわかる。また、偶数次変形モードの分岐荷重は、限界状態近傍にのみ存在している。一方、奇数次変形モードの分岐荷重は、 $m = 9$ の場合には $\eta_y = 1.420$ 程度であるが、変形モードの次数が減少するのに伴い低下してゆき、 $m = 1$ の場合には $\eta_y = 1.385$ 程度となっている。したがって、高次変形モードより低次変形モードの非均一変形が発生しやすいことが推察される。

一方、非共軸モデルを用いた場合には、対称モード、非対称モードによらず、本研究で対象とした $m = 1\sim 10$ の全ての変形モードにおいて、分岐荷重が存在している。また、その分岐荷重は、大部分の変形モードに関しては、ほぼ一定値 ($\eta_y = 1.395$) を示しているが、対称1次変形

モードのみは、その他の変形モードより小さく、 $\eta_y = 1.385$ 程度となっている。したがって、モデルの違いによらず、 $B/H = 0.5$ とした平面ひずみ伸張試験では、対称1次変形モードが最も発生しやすいことになる。共軸モデルの場合と比較すると、最小の分岐荷重を示す対称1次変形モードの場合には、両者の間に大きな変化は認められない。しかしながら、分岐荷重が比較的大きな値となる高次変形モードにおいては、非共軸モデルを用いた際の分岐荷重が、共軸モデルを用いた際より、小さくなっている。したがって、非共軸モデルを用いた場合には、供試体の変形挙動はより非均一変形へと移行しやすくなることが推察される。

次に、伸張試験における分岐荷重と圧縮試験における分岐荷重の比較を行う。平面ひずみ非排水圧縮試験の際の分岐荷重 η_y と変形モード m ($m=1\sim 10$) の関係⁷⁾ を図-8に示す。圧縮試験では、最も小さな分岐荷重となる変形モードが非対称1次変形モードの場合であるが、伸張試験では、対称1次変形モードの分岐荷重が最も小さいことがわかる。したがって、伸張および圧縮という载荷の方法の違いにより、発生しやすい供試体の変形挙動が異なることが解析的に明らかとなった。

実際の平面ひずみ伸張試験の場合には、一般的に、供試体の底部から中央部にかけて絞り込まれるような対称的な破壊形態が観察され、非対称変形が認められることは少ない。したがって、低次の対称モードの分岐荷重が最小となる、すなわち低次の対称変形モードが発生しやすいという本解析結果は、実際の伸張試験における供試体の変形挙動と一致するものと考えられる。なお、圧縮試験の場合には、供試体の変形挙動は、一般的に均一変形から非対称的な非均一変形へと移行するケースが多い。

圧縮試験では、共軸モデルと非共軸モデルの違いによらず、実際の圧縮試験においてしばしば発生する樽型の変形に対応する対称2次変形モードの分岐荷重は、限界状態以下には存在しない。しかしながら、伸張試験では、非共軸モデルの場合には、対称2次変形モードの分岐荷重が存在しており、その大きさは、その他の変形モードの分岐荷重と同程度である。仮に、圧縮試験の対称2次変形モードの分岐荷重が限界状態と一致すると考えると、伸張試験の分岐荷重は圧縮試験の0.98倍となる。本解析では、等方性を有する構成式を用いて分岐解析を行い、分岐荷重を明らかにした結果、伸張試験の分岐荷重が圧縮試験のそれより僅かに小さくなることを示した。なお、本解析結果のように、伸張試験の強度が圧縮試験の強度に比較して小さくなるという傾向は、実際の要素試験においても認められている^{16), 17)}。

4. 2 伸張試験における最大せん断ひずみ分布

载荷を受ける粘土供試体がすべり面を伴って破壊へと至る現象は、せん断変形による進行性破壊と考えられる。したがって、非均一変形へと移行したときの供試体内の

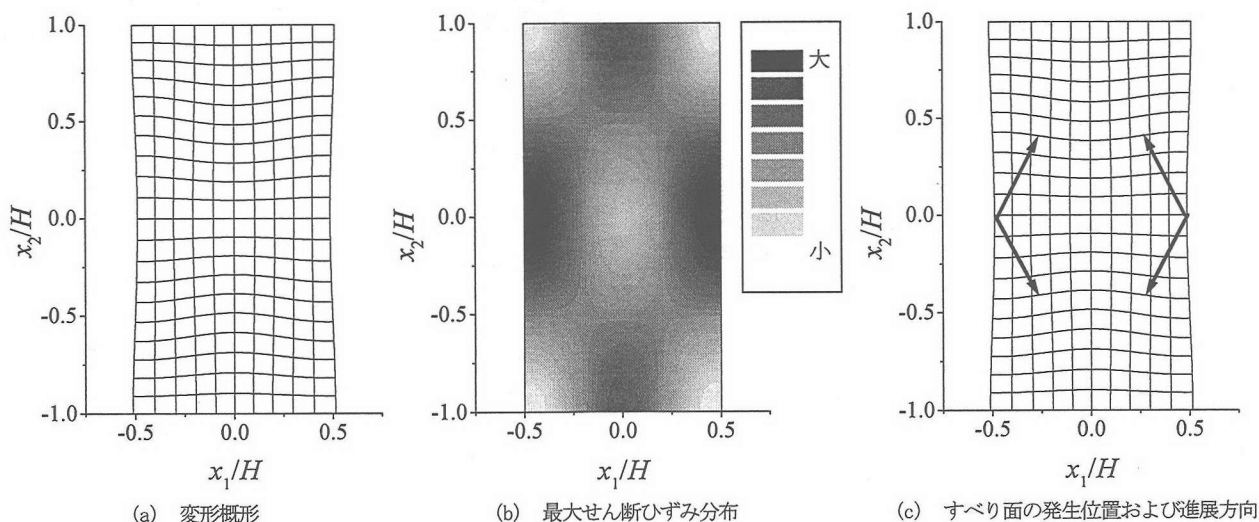


図-9 非排水伸張せん断時の変形概形，最大せん断ひずみ分布およびすべり面の発生位置・進展方向
($B/H=0.5$ ・対称2次変形モード・非共軸モデル)

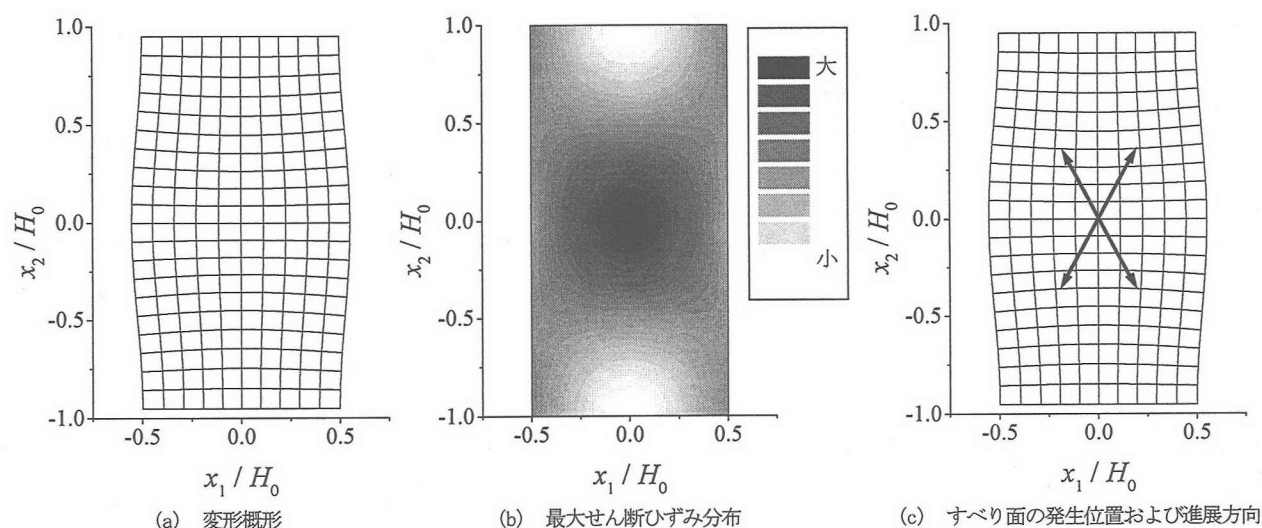


図-10 非排水圧縮せん断時の変形概形，最大せん断ひずみ分布およびすべり面の発生位置・進展方向
($B_0/H_0=0.5$ ・対称2次変形モード・非共軸モデル)

最大せん断ひずみ分布を明らかにすることにより，すべり面の形成されやすい位置やその形状を予測することが可能になる。

伸張試験の場合には，供試体の破壊時に観察される変形形状は，絞り込み破壊の形状となることが極めて多い。本解析で仮定している変形モードの中では，対称2次変形モードの場合が非常に類似している。この対称2次変形モードの分岐荷重は， $B/H=0.5$ を仮定した場合に着目すると（図-7），共軸モデルの場合には存在せず，非共軸モデルの場合にのみ存在する。また，この図より，非共軸モデル場合の対称2次変形モードの分岐荷重より，共軸および非共軸モデルの対称1次変形モードや非対称2次変形モードの分岐荷重が小さな値となっている。しかしながら，前述したように伸張試験の場合には，非対称変形モードの非均一変形状態（分岐現象）が発生しう

る場合には，物理的に均一変形状態が安定的，すなわち非対称変形モードの非均一変形へと移行することは少ないと考えられる。したがって，分岐荷重のみから判断すると，対称1次変形モードの非均一変形が最も発生しやすいと考えられる。しかしながら，実際には端面摩擦が完全に0ではないこと，および供試体内には何らかの初期不整が存在することなどの影響により，供試体の中央付近が絞り込まれるような変形形状が生じると考えられる。したがって，以後，対称2次変形モードの場合について考察を行う。

伸張試験において，供試体寸法比 $B/H=0.5$ とした非共軸モデルを用いた場合に得られた対称2次変形モードの変形概形および最大せん断ひずみ分布を図-9に示す。図より，供試体の変形形状は，供試体中央部において側面から絞り込まれるような形状を示しているのがわかる。

最大せん断ひずみ分布では、この絞り込まれた供試体中央部側面付近において最大せん断ひずみが大きくなっている。また、供試体上下端面中央部付近でも、最大せん断ひずみが若干大きな値となっている。したがって、平面ひずみ伸張試験において一般的に発生する絞り込み破壊の場合には、すべり面は供試体表面中央部付近から発生し始めることが推察される。

伸張試験と圧縮試験の違いが供試体の破壊メカニズムに及ぼす影響を明らかにするために、圧縮試験の場合の分岐解析から得られる最大せん断ひずみ分布について考える。圧縮試験においては、前述したように、共軸モデルと非共軸モデルの違いによらず対称2次変形モードの分岐荷重は存在していない。しかしながら、分岐時の供試体寸法比 B/H ではなく、初期供試体寸法比を $B_0/H_0=0.5$ とし、荷重に伴う供試体寸法比の変化を考慮した詳細な分岐解析を行うことにより、非共軸モデルの場合には、中央部が樽型に膨らむ対称2次変形モードの分岐荷重が存在することが報告されている⁷⁾。その報告の中で、圧縮試験の場合には、供試体は中央部が樽型に膨らむ変形を示し、供試体の中央部付近に最大せん断ひずみが大きな値を示す領域が広がっていること、また、供試体の4隅にも最大せん断ひずみが若干大きな値を示す領域が存在することが明らかにされている(図-10)。その結果、すべり面は供試体内部の中央部から発生し始め、供試体の4隅へと進展していくことが推察されている。なお、図-10では、荷重初期から分岐時までの均一変形により、供試体高さ $2H$ は減少、幅 $2B$ は増大している。

伸張試験における供試体の破壊メカニズムは、以下のように考えられる。軸荷重の減少に伴い水平方向の有効応力が相対的に軸方向の有効応力より大きくなり、軸差応力が生じる。その際、荷重初期においては、供試体は、均一に軸方向に伸張されるが、軸差応力が増大するのに伴い、初期不整の影響などにより均一な軸方向への伸張変形が不安定となりその均一変形を維持することが困難となる。供試体側面近傍の土要素は、表面付近の変位が拘束されていないため、自由な変形挙動をとることが可能である。一方、供試体内部の土要素は、上下端面の上下方向の変位が拘束されているため、自由な変形挙動をとりにくく、その変形挙動は側面近傍に比べてあまり顕著ではない。したがって、供試体内の土要素は、供試体側面中央部付近が絞り込まれる変形により、以下のような変形挙動を示す。供試体側面中央部付近の土要素は、側面から作用する外部圧力により水平方向に圧縮され、鉛直方向に伸長される。このような変形に伴い供試体側面の上下端面付近の土要素は外側へと張り出すような変形を示すことが推察される。この場合には、供試体側面の中央部の変形は外側から圧縮され上下方向に伸張されるような変形形態となっている。この変形形態は、伸張試験時の均一変形挙動の変形と非常に類似していることから、供試体側面の中央部の土要素に働いている伸張載

荷は、促進されていると考えられる。一方、側面の上下端面近傍の土要素においては、供試体表面が外側へと張り出すことにより、伸張載荷が抑制されている。したがって、伸張試験においては、供試体側面の中央部付近からすべり面が発生しやすいものと推察される。

一方、圧縮試験における供試体の破壊メカニズムは、以下のように考えられる。荷重の進行に伴い軸荷重が増大してゆき、軸差応力が増大する。最大応力近傍においては、供試体側面の変位が拘束されていないため供試体は、樽型に変形することによって軸荷重を受け持つことになる。その場合には、供試体中央部の土要素が軸方向に圧縮されることにより左右に膨らみ、供試体側面近傍の土要素は外側へと押し出され上下に引き伸ばされるものと推察される。圧縮試験時の均一変形挙動と比較すると、圧縮載荷が促進されている土要素は、供試体中央部の土要素となる。したがって、圧縮試験の場合には、すべり面は、供試体内部の中央部から発生しやすくなるものと考えられる。以上のことより、伸張試験、圧縮試験等の境界条件の違いが、供試体の破壊形態の違いに大きな影響を及ぼしているものと推察される。

5. 結論

本研究で対象とした土質定数を有する Cam-clay モデルに対して、軸方向の変位を制御した平面ひずみ非排水伸張試験の分岐解析結果およびその圧縮試験の結果との比較から得られた主要な結論を以下に列記する。

- 1) 平面ひずみ伸張試験においては、低次の対称変形モードの非均一変形が他の変形モードの非均一変形より発生しやすいことを解析的に示唆した。また、非共軸 Cam-clay モデルを用いた場合には、共軸 Cam-clay モデルを用いた場合より、分岐現象が発生しやすいことを明らかにした。
- 2) 供試体寸法比 $B/H = 0.5$ を有する供試体に関しては、対称2次変形モードに着目すると、非共軸 Cam-clay モデルを用いた場合には、伸張試験における分岐荷重は、圧縮試験の分岐荷重(ただし、 $B_0/H_0 = 0.5$)より小さくなることを解析的に示した。なお、共軸 Cam-clay モデルを用いた場合には、実際現象において一般的に認められる樽型の変形に対応する対称2次変形モードの分岐荷重は存在しない。
- 3) 非共軸 Cam-clay モデルを用いる場合には、初期供試体寸法比 $B_0/H_0 = 0.5$ を有する供試体の圧縮試験では、すべり面は、供試体内の中央部から発生し始め、供試体の上下端面の側面近傍へと進展してゆくものと推定されている。一方、供試体寸法比 $B/H = 0.5$ を有する供試体の伸張試験では、すべり面は、圧縮試験の場合とは異なり、供試体の側面中央部付近から発生しやすいことを解析的に示した。

参考文献

- 1) Ladd, C. C., Foott, R., Ishihara, K., Schlosser, F. and Poulos, H.: Stress-deformation and strength characteristics, State-of-the-Art-Report, *Proceedings of 9th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Tokyo, Japan, Vol.2, pp.421-494, 1977.
- 2) Kamei, T.: A study on the mechanical behavior of normally consolidated cohesive soils, *thesis presented to the Tokyo Institute of Technology at Tokyo, Japan*, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor Engineering, 1985.
- 3) Saada, A. S., Bianchini, G. F. and Liang, L.: "Cracks, bifurcation and shear bands propagation in saturated clays", *Géotechnique*, Vol.44, No.1, pp.35-64, 1994.
- 4) Asaoka, A. and Noda, T.: Imperfection-sensitive bifurcation of Cam-clay under plane strain compression with undrained boundaries, *Soils and Foundations*, Vol.35, No.1 pp.83-100, 1995.
- 5) 小林一三, 飯塚敦, 太田秀樹: 正規粘土供試体せん断時における局所変形の遷移, 土木学会論文集, No.617/III-46, pp.1-18, 1999.
- 6) 志比利秀, 亀井健史, 永吉雄大: 有限変形有限要素法によるすべり面の推定とその評価, 土木学会論文集 (投稿中) .
- 7) 志比利秀, 矢富盟祥, 亀井健史: 平面ひずみ非排水圧縮条件下における供試体寸法比の変化が正規圧密粘性土の分岐荷重に及ぼす影響, 土木学会論文集, No.666/III-53, pp.181-192, 2000.
- 8) 志比利秀, 亀井健史, 岩田佳代子: 平面ひずみ非排水条件下における分岐荷重近傍の応力状態と土質定数の関係, 土木構造・材料論文集, No.17, pp.113-120, 2001.
- 9) Yatom, C., Yashima, A., Iizuka, A. and Sano, I.: General theory of shear bands formation by a non-coaxial Cam-clay model, *Soils and Foundations*, Vol.29, No.3, pp.41-53, 1989.
- 10) Ohta, H.: Analysis of deformations of soils based on the theory of plasticity and its application to settlement of embankments, *Doctor Engineering Thesis*, Kyoto Univ., 1971.
- 11) Hill, R. and Hutchinson, W.: Bifurcation phenomena in the plane tension test, *Journal of the Mechanics and Physics Solids*, Vol.23, pp.239-264, 1975.
- 12) Young, N. J. B.: Bifurcation phenomena in the plane compression test, *Journal of the Mechanics and Physics Solids*, Vol.24, pp.77-91, 1976.
- 13) Sekiguchi, H.: Rheological characteristics of clays, *Proceedings of 9th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Tokyo, Japan, Vol.1, pp.289-292, 1977.
- 14) 志比利秀, 亀井健史, 東原聡子: 非共軸パラメータの違いが分岐荷重に及ぼす影響, 土木構造・材料論文集, No.16, pp.159-167, 2000.
- 15) 例えば, 土質工学会編: 土の試験実習書 (第二回改訂版), pp.133-158, 1991.
- 16) Nakase, A. and Kamei, T.: Undrained shear strength anisotropy of normally consolidated cohesive soils, *Soils and Foundations*, Vol.23, No.1, pp.91-101, 1983.
- 17) Nakase, A. and Kamei, T.: Undrained shear strength of remoulded marine clays, *Soils and Foundations*, Vol.28, No.1, pp.29-40, 1988.

(2002 年 4 月 19 日 受付)