

分岐解析によるひずみ局所化現象における供試体形状と境界条件の影響に関する検討

Bifurcation Analysis on Shape Effect and Boundary Effect
in Localization of Deformation of Geomaterials

佐藤 啓介*・山川 優樹**・池田 清宏***・鳥居 邦夫****

Keisuke SATOH, Yuki YAMAKAWA, Kiyohiro IKEDA and Kunio TORII

*学生会員 工修 長岡技術科学大学大学院 工学研究科材料工学専攻 (〒940-2188 新潟県長岡市上富岡町 1603-1)

**正会員 工修 長岡技術科学大学助手 環境・建設系 (〒940-2188 新潟県長岡市上富岡町 1603-1)

***正会員 Ph.D. 東北大学大学院教授 工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

****正会員 工博 長岡技術科学大学教授 環境・建設系 (〒940-2188 新潟県長岡市上富岡町 1603-1)

In the compressive shearing test for geomaterials, various modes of localized deformation are observed. We carry out several bifurcation analyses by varying the shape ratio of plane strain rectangular specimens to observe the significant change of bifurcation loads and bifurcation modes. We also conduct a series of plane strain compression tests of soil specimens for various conditions to investigate the effect of the boundary conditions for the formation of the localized deformation modes. The numerically obtained bifurcation modes corresponding to the minimum bifurcation load for each size of the specimen are in good agreement with the typical experimental results for sand specimens.

Key Words : soil specimen, bifurcation, shape effect, boundary condition, localization of deformation

1. はじめに

地盤材料の平面ひずみ供試体における圧縮せん断変形挙動では、様々な局所変形モードを示すとともに、漸次的にモードが変化して破壊に至る。これに伴い供試体のピーク強度も変動する。これは供試体に初期状態から含まれている材料的な不均一さや幾何学的な形状の微小なひずみなどが次第に局所変形へと進展し、最終的な破壊に至るためである。この現象は弾塑性分岐現象により支配されており、分岐荷重や発生する分岐モードは、供試体の形状によって様々である。

弾塑性分岐による局所変形モードの発生やせん断帯の形成に関する研究は、地盤材料の要素試験における変形挙動シミュレーションとして、幅広くなされている^{1),2),3),4),5),6),7),8)}。例えば、Hill and Hutchinson¹⁾は、金属材料の平面ひずみ引張り供試体について均質状態から塑性分岐によりくびれやせん断帯が形成されるメカニズムを明らかにし、基本経路における分岐発生の可能性とそのモードに関して解析的な検討を行っている。Young²⁾は同様の解析手法を圧縮場に適用し、分岐発生の可能性が引張り試験における場合とは異なることを示した。このように固体の変形挙動においては、材料に拘わらず分岐をきっかけとした変形の局所化は不可避的な現象であり、地盤材料においても分岐に関する研究は盛んに行われている^{5),9),10),11)}。最近の研究では、志比ら⁸⁾により非共軸 Cam-clay モデルの拡散型分岐モード発生条件と供試体形状効果に関する研究が行われており、Asaoka and Noda¹²⁾は、Cam-Clay 供試体に対する初期不整の影響について、土～水連成有限

要素解析により調べている。

分岐により、要素試験においても応力・変形場の一様性が喪失する現象が見られるが、要素試験は境界値問題であるために、分岐荷重や発生する分岐モードは、供試体の形状や境界条件により様々に変動する。例えば、砂の三軸圧縮試験における供試体の変形特性は、寸法・形状の影響を大きく受けており、様々な局所化モードを呈し、それに伴い、強度や変形特性も大きく変動するとの報告がなされている¹³⁾。また、数値解析的にも幾何学的不安定現象としての拡散型分岐モードがせん断帯状の局所変形発生の要因であることが明らかにされている¹⁴⁾。

本研究では、圧縮せん断試験時の分岐発生に対する供試体形状と境界条件の影響を調べることで、実験時に発生する破壊形態のばらつきの傾向を分岐現象という観点から調べることを目的とした。その手法としては、弾塑性有限要素法を用いた数値解析的な拡散型分岐解析を用い、分岐による変形モードの変動(幾何学的非線形性)から、分岐荷重や分岐モードに対する形状効果や境界条件の違いが及ぼす供試体への影響を調べた。また、解析と同様な境界条件下で行った実験と比較を行い、形状効果による破壊形態の変化について検証を行った。

2. 有限変形弾塑性分岐解析の定式化

2.1 有限変形・弾塑性境界値問題

有限変形を考慮した一般的な弾塑性境界値問題の定式化についてまとめる。本研究では、運動学的に厳密

とされる変形勾配の乗算型分解 $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p$ と超弾性構成式に基づく定式化を採用する。滑らかな境界 ∂B を有する閉集合の領域 $B \subset \mathcal{R}^{n_{\text{dim}}}$ ($n_{\text{dim}} = 1, 2, 3$) を考える。 B は物体の基準配置を表し、 n_{dim} は領域の次元、 $\mathcal{R}$ は実数の空間である。このとき、空間表示 (現配置参照型) の弱形式のつり合い方程式は、

$$\begin{aligned} g_{\varphi_i}(\tau; \eta) &= \int_B \tau : (\eta \otimes \nabla \mathbf{x}_i) \frac{dv}{J} \\ &\quad - \int_B \rho_0 \mathbf{B} \cdot \eta \frac{dv}{J} - \int_{\partial_i B} \bar{\mathbf{T}} \cdot \eta \, ds \\ &= 0, \quad \forall \eta \in \nu_{\varphi_i} \quad (1) \end{aligned}$$

と与えられる。ここで、 $\varphi(B)$ は変形写像、 $J = \det \mathbf{F}$ は変形勾配 $\mathbf{F} = \varphi \otimes \nabla \mathbf{x}$ のヤコビアン、 τ は Kirchhoff 応力、 ρ_0 は質量密度、 $\mathbf{B}$ は物体力、 $\bar{\mathbf{T}}$ は $\partial_i B$ 上で与えられる表面力、 η は斉次境界条件を満たす可変変位の試験関数であり、その空間 ν_{φ} は、

$$\begin{aligned} \nu_{\varphi} &= \{ \eta : \varphi(B) \rightarrow \mathcal{R}^{n_{\text{dim}}} \mid \eta \in [W^{1,p}(B)]^{n_{\text{dim}}}, \\ &\quad \eta(\varphi(\mathbf{X})) = \mathbf{0} \text{ for } \mathbf{X} \in \partial_{\varphi} B \} \quad (2) \end{aligned}$$

である。ここで、 $\partial_{\varphi} B$ は変位境界、 $W^{1,p}$ は一階微分までが $L^p(B)$ に属する Sobolev 空間である ($p > 2$)。つり合い式 (1) は変位に関して非線形であるため、有限の大きさを持つ増分変位 $\Delta \mathbf{u}$ を用いて線形化すると、

$$\begin{aligned} \int_B [\mathcal{L}_{\Delta \mathbf{u}} \tau_i + (\Delta \mathbf{u} \otimes \nabla \mathbf{x}_i) \cdot \tau_i] : (\eta \otimes \nabla \mathbf{x}_i) \frac{dv}{J} \\ + g_{\varphi_i}(\tau_i; \eta) = 0 \quad \forall \eta \in \nu_{\varphi_i} \quad (3) \end{aligned}$$

となる。左辺第2項の $g_{\varphi_i}(\tau_i; \eta) \neq 0$ は不つり合い力 (残差力) に相当し、 $g_{\varphi_i} = 0$ となるつり合い状態の解を求めることとなる。ここで、 $\mathcal{L}_{\Delta \mathbf{u}} \tau_i$ は Kirchhoff 応力の $\Delta \mathbf{u}$ に関する Lie 微分である。増分型の弾塑性構成式を

$$\mathcal{L}_{\Delta \mathbf{u}} \tau_i = \bar{\mathbf{c}}_i^{\text{ep}} : [\Delta \mathbf{u} \otimes \nabla \mathbf{x}_i] \quad (4)$$

として、式 (3) に代入し、有限要素離散化を行い、増分ステップ毎に反復的に解く。ここで、 $\bar{\mathbf{c}}_i^{\text{ep}}$ は接線係数テンソルであり、 $\Delta \lambda$ の関数となっている。ここで $\Delta \lambda$ は後述の consistent パラメータ λ の増分である。

2.2 弾塑性有限ひずみ理論と応力評価アルゴリズム

(1) 超弾性構成式と塑性発展方程式

弾塑性材料の自由エネルギー関数 Ψ は、弾性ポテンシャル $\mathcal{W}(\mathbf{b}^e)$ と塑性ひずみ硬化ポテンシャル $\mathcal{H}(\xi)$ を用いて、

$$\Psi(\mathbf{b}^e, \xi) = \mathcal{W}(\mathbf{b}^e) + \mathcal{H}(\xi) \quad (5)$$

として与えられるものとする。ここで、 $\mathbf{b}^e = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^{eT}$ は弾性の左 Cauchy-Green 変形テンソル、 ξ は塑性ひずみ硬化に関するパラメータである。このとき超弾性構成式が、

$$\tau = 2 \frac{\partial \Psi(\mathbf{b}^e, \xi)}{\partial \mathbf{b}^e} \cdot \mathbf{b}^e = 2 \frac{\partial \mathcal{W}(\mathbf{b}^e)}{\partial \mathbf{b}^e} \cdot \mathbf{b}^e \quad (6)$$

と与えられる。また、塑性ひずみ硬化則が、

$$q = - \frac{\partial \Psi(\mathbf{b}^e, \xi)}{\partial \xi} = - \frac{\partial \mathcal{H}(\xi)}{\partial \xi} \quad (7)$$

と与えられる。ここで、 q は塑性ひずみ硬化に関する応力のオーダーを持つ内部変数である。さらに、本研究では、弾塑性応答が最大塑性散逸の原理に従い、散逸不等式より、流れ則および内部変数発展則には関連型を用いるとそれぞれ、

$$-\frac{1}{2}(\mathcal{L}_v \mathbf{b}^e) \cdot \mathbf{b}^{e^{-1}} = \lambda \frac{\partial \phi(\tau, q)}{\partial \tau}, \quad (8)$$

$$\dot{\xi} = \lambda \frac{\partial \phi(\tau, q)}{\partial q} \quad (9)$$

と導かれる。ここで、 $\phi(\tau, q)$ は降伏関数、 λ は塑性 consistency パラメータ、 $\mathcal{L}_v \mathbf{b}^e$ は $\mathbf{b}^e$ の変位速度 $\mathbf{v} = \dot{\varphi}$ に関する Lie 微分である。これに、Kuhn-Tucker 形式の負荷・除荷条件

$$\lambda \geq 0, \quad \phi(\tau, q) \leq 0, \quad \lambda \phi(\tau, q) = 0 \quad (10)$$

と塑性 consistency 条件

$$\lambda \dot{\phi}(\tau, q) = 0 \quad (11)$$

が課される。

(2) Drucker-Prager の降伏条件

本研究では、静水圧依存型の弾塑性モデルである Drucker-Prager の降伏条件を用いて応力評価を行った。超弾性方程式 (5) について材料の等方性を仮定すると、弾性ポテンシャル $\mathcal{W}$ は弾性の主ストレッチ λ_A^e ($A = 1, 2, 3$) の関数であり、対数ひずみ $\varepsilon_A^e = \log(\lambda_A^e)$ を用いた Henky モデル

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\varepsilon_1^e, \varepsilon_2^e, \varepsilon_3^e) &= \frac{1}{2} \lambda [\varepsilon_1^e + \varepsilon_2^e + \varepsilon_3^e]^2 \\ &\quad + \mu [(\varepsilon_1^e)^2 + (\varepsilon_2^e)^2 + (\varepsilon_3^e)^2] \quad (12) \end{aligned}$$

を用いる。ここで、 $\lambda > 0, \mu > 0$ は Lamé 定数である。これにより、Kirchhoff 応力の主応力が、

$$\tau_A = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_A^e} = \lambda [\varepsilon_1^e + \varepsilon_2^e + \varepsilon_3^e] + 2\mu \varepsilon_A^e, \quad (13)$$

と与えられる。また、Drucker-Prager の降伏関数は、

$$\phi(\tau, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\|\text{dev}[\tau]\| + g(\bar{\tau})] - [\bar{\tau}_{y0} - q(\xi)] \leq 0 \quad (14)$$

を用いる。ここで、 $\bar{\tau} = \frac{1}{3} \text{tr}[\tau]$ および $\text{dev}[\tau] = \tau - \bar{\tau} \mathbf{1}$ はそれぞれ Kirchhoff 応力 τ の等方成分、偏差成分、 $\|\text{dev}[\tau]\| = \sqrt{\text{dev}[\tau] : \text{dev}[\tau]}$ は偏差応力のノルム、 $\bar{\tau}_{y0}$ は初期降伏応力である。また、 $g(\bar{\tau})$ は等方応力の塑性への影響を表す関数であり、

$$g(\bar{\tau}) = \beta_{\phi} \bar{\tau} \quad (15)$$

という形式を用いることとすると、定数 β_{ϕ} は主応力空間における Drucker-Prager の降伏面による円錐の頂

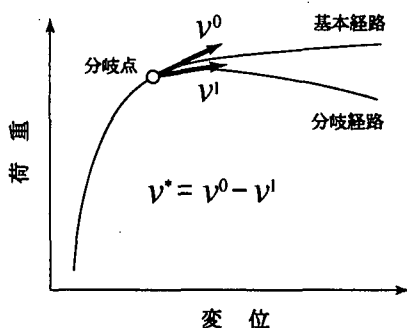


図-1 解の分岐の模式図

点に対応する。これらのパラメータ $\bar{\tau}_{y0}, \beta_\phi$ については Mohr-Coulomb の粘着力 $\bar{c}$ および摩擦角 $\bar{\theta}$ により、

$$\bar{\tau}_{y0} = \frac{6\bar{c} \cos \theta}{\sqrt{3}(3 + A \sin \bar{\theta})}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\beta_\phi = \frac{6 \sin \bar{\theta}}{\sqrt{3}(3 + A \sin \bar{\theta})} \quad (16)$$

と決定できる ($-1 \leq A \leq 1$)。ここで、 A は定数であり、 $A = -1, 1$ のときにはそれぞれ、Drucker-Prager 降伏面は 3 次元応力空間において Mohr-Coulomb 降伏面の外側、内側の頂点を通る包絡線となる。

実際の数値解析では、各荷重ステップの反復過程において数値積分点での応力評価を行うことになるが、これについては後退型 return mapping 法を用いて厳密に降伏面上に位置する応力を求めるとともに、変形テンソルの弾性部分 b^e をステップ毎に保存することで塑性変形履歴を更新する手続きを取る。

2.3 弾塑性分岐条件と数値分岐解析手法

(1) 弾塑性境界値問題における分岐発生条件

本研究では、初期不整を導入した疑似分岐解析ではなく、完全系の分岐解析を行う。基本経路上の分岐点と分岐モードを求め、分岐経路への切り替え操作をおこなう。ここでは、分岐点の判定条件について述べる。この条件は本研究で対象とする地盤材料だけでなく、他の弾塑性材料にも構成式を問わず適用可能である。

解析的な手法による分岐荷重・分岐モード解析⁵⁾と比較して、精度に関する検討の余地はあるが、有限要素解析による分岐解析は、種々な境界条件を持つ問題に対しても容易に適用でき、また、分岐後の変形挙動を追跡できるという利点を有している。

弾塑性境界値問題における解の唯一性の十分条件は、Hill により議論されている¹⁵⁾。この弾塑性分岐条件を速度形式の現配置表記で書くと、

$$I_t = \int_{\varphi_t(B)} \left[(\mathcal{L}_v \tau_t^*) : \text{sym}[v^* \otimes \nabla_{x_i}] + \tau : \{(v^* \otimes \nabla_{x_i})^T \cdot (v^* \otimes \nabla_{x_i})\} \right] \frac{dv}{J} = 0 \quad (17)$$

と表される。ここで、 v は変位速度、上付き添字 (*) は、基本経路と分岐経路にそれぞれ対応する変位速度場の相違なる 2 つの解 v^0, v^1 が存在すると仮定した場合に、各々に対応する量の差を取ったことを示す (図-1)。また、弾塑性材料から除荷の可能性を排除した線形比較体を仮定し、 v^0, v^1 により共に除荷が生じずに、塑性

負荷が持続するものとする、 $\mathcal{L}_v \tau_t^*$ は式 (4) を書き換えた速度型弾塑性構成式により $\mathcal{L}_v \tau_t^* = c_t^{\text{ep}} : [v^* \otimes \nabla_{x_i}]$ と書くことができ、式 (17) は、

$$I_t = \int_{\varphi_t(B)} \left[(v^* \otimes \nabla_{x_i}) : c_t^{\text{ep}} : (v^* \otimes \nabla_{x_i}) + \tau : \{(v^* \otimes \nabla_{x_i})^T \cdot (v^* \otimes \nabla_{x_i})\} \right] \frac{dv}{J} = 0 \quad (18)$$

となる。ここで、 c_t^{ep} は速度型の弾塑性接線係数で、consistent 接線係数の $\bar{c}_t^{\text{ep}}$ 中の $\Delta \lambda$ を 0 としたものに等しい。さらに、変位速度 v^* を変位増分 Δu^* として、式 (18) を有限要素離散化すると、 $I_t = \Delta u^* K \Delta u^* = 0$ となる。接線剛性マトリックス K が特異性条件

$$\det K = 0 \quad (19)$$

を満たすときに非自明解 $\Delta u^* = \Delta u^0 - \Delta u^1 \neq 0$ が存在する。従って、式 (19) を判定することにより、拡散型分岐モードの分岐点 (あるいは荷重極限点) を求めることができ、ゼロ固有値に対応する固有ベクトル Δu^* が分岐モードとなる。

(2) 数値解析における分岐条件の判定法と経路切り替え手続き

前節で述べたように、分岐点の判定を行うためには、各つり合い点において接線剛性マトリックス K の固有値を求め、ゼロ固有値が発生する点をモニタリングする必要がある。また、分岐経路への切り替えを行う際には、 K のゼロ固有値に対応するクリティカルな固有ベクトル、すなわち分岐モードを求める必要がある。

藤井、野口¹⁶⁾は、線形化つり合い式を解く際に行う K の三角分解 (LDL^T 分解) の結果から近似固有ベクトル¹⁷⁾を抽出する手法を提案している。この手法によれば、連立方程式の解法に僅かに付加的な手続きを加えるだけで、近接・多重分岐点であっても個別に分岐モードを求めることができる。弾塑性分岐は、Hill and Hutchinson¹⁾も指摘しているように、最初に分岐発生点を超えると、様々なモードの分岐が多数集積して発生する。従って、この方法は弾塑性分岐解析に対して大変有用である。そこで、本研究の分岐解析ではこの手法を用いて固有値解析を行うこととする。

つり合い点で分岐条件が判定された場合には、通常の解法を続ければ基本経路追跡が行われるが、分岐経路を追跡する場合には経路切り替え手続きをする必要がある。数値解析における分岐経路への切り替え手続きは以下の通りである。各荷重ステップのつり合い点において K の固有値の符号を確認し、一つでもゼロのものがあつた荷重パラメータ (ここでは軸荷重) の極大・極小点 (荷重極限点, limit point) でなければ、このつり合い点は分岐点と判定される。次に、分岐点においてゼロ固有値に対応するクリティカルな固有ベクトル (分岐モード) を前述の方法を用いて求め、これをスケーリングしたものを変位予測子の初期値として反復計算を開始し、得られた収束点に分岐経路上のつり合い点となる。経路切替えを上手く行うためには、このスケーリング法は弾塑性分岐解析では特に重要である。Hill の線形比較体による議論に従い、分岐発生

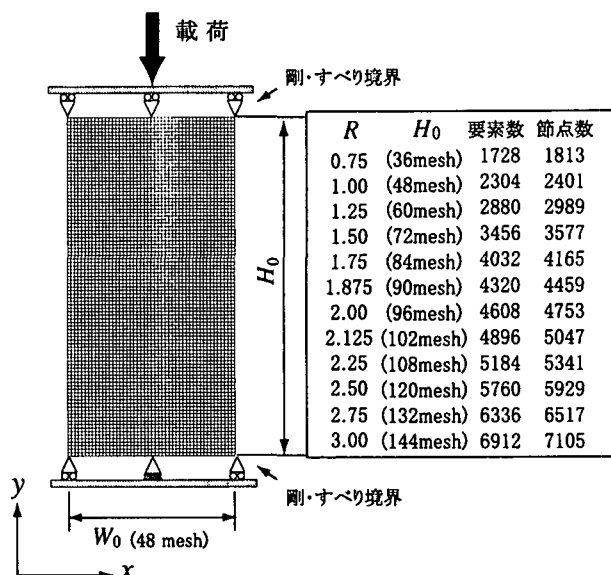


図-2 有限要素解析モデル

瞬間での除荷発生の可能性を排除するため、分岐モードの変位予測子を変位増分として、何回か試行的に数値積分点で応力評価を行い、全ての積分点で除荷が発生しないような最大のスケーリング係数を用いることにより、効率的に経路切替えができる。

3. 平面ひずみ供試体の形状効果の数値解析

形状比を様々に変動させた矩形平面ひずみ供試体に対して、弾塑性有限要素法を用いた拡散型分岐解析を行い、分岐荷重や発生する分岐モードへの影響を調べた。

3.1 解析モデルと境界条件

解析モデルは、 x, y 方向寸法をそれぞれ W_0, H_0 とし、 W_0 は一定として、 H_0 を変化させ、形状比 $R = H_0/W_0 = 0.75 \sim 3.00$ の供試体について解析を行った。一例として図-2 に形状比 $R = 2.00$ のモデルを示す。初期の有限要素メッシュは均等分割の4節点アイソパラメトリック要素を用いた。平面ひずみ状態を仮定し、供試体の上端に一樣な y 方向下向きの変位が与えられるものとする。上下端面の拘束条件については、剛体移動を止めるために下面中央部の1点のみを拘束して、それ以外は x 方向の変位を自由とした(端面摩擦なし)。

3.2 材料定数と硬化関数

本解析で用いた材料定数と硬化関数を示す。本研究ではひずみ軟化モデルは用いないこととし、ひずみ硬化型のみを用いる。式(14)中の塑性ひずみ硬化関数 $q(\xi)$ は、

$$q(\xi) = -\left[\hat{\tau}_{y0} \left(1 + \frac{\xi}{\hat{\varepsilon}_{y0}}\right)^n - \hat{\tau}_{y0}\right] \quad (20)$$

という n 乗硬化則の形式のひずみ硬化モデルを用いた。ここで、 $\hat{\tau}_{y0}, \hat{\varepsilon}_{y0}, n$ はそれぞれ降伏応力、降伏ひずみ、塑性硬化則に関する定数であり、 $\hat{\tau}_{y0} = 100 \text{ kPa}$, $\hat{\varepsilon}_{y0} = 0.005$, $n = 0.030$ とした。このとき硬化関数は 図-3 のようになる。

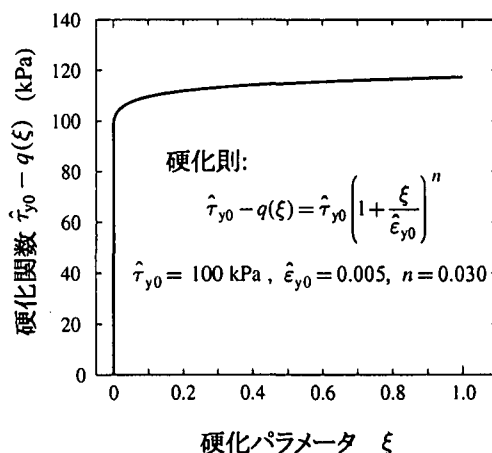


図-3 硬化関数

3.3 つり合い経路と分岐モード

上述の解析条件において弾塑性分岐解析を行った。図-4 は、供試体形状比 $R = 2.00$ におけるつり合い経路(基本経路および分岐経路)であり、図中の括弧付きの数字は対応する分岐点の番号である。分岐点番号とは基本経路上の解析過程で分岐点を確認された順の番号とする。この解析の結果、一樣変形が持続している基本つり合い経路上に、(○)で示すゼロ固有値の重複度が1である7個の単純分岐点を確認された。分岐点は非常に近い荷重で近接して(集積して)発生していることが分かる。硬化型材料のため基本経路では単調に荷重増加を続け、荷重極大点は存在しない。分岐経路に移行した後も荷重増加を続けるモードもあるが、モードによっては、分岐直後のみ荷重増加し、その後、荷重が低下に転じるものもある。また、荷重不安定挙動(軸荷重の低下)の度合いは図で見る限りでは、低次の分岐経路ほど度合いが大きい傾向がある。また、分岐後の経路における荷重は、いずれも基本経路よりもかなり低くなっている。他の形状比においても、このような傾向が認められた。

図-5 は、各図(a)~(g)の左側に各分岐点における分岐モードを、右側に軸ひずみ ε が20% 付近となったときの変形の様子とせん断ひずみの分布を分岐点番号順に示したものである。ここで、各図中左側の分岐モードは y 軸に関して対称あるいは反対称の拡散型分岐モードであり、変形モードが分かり易いようにスケーリングしてある。また、せん断ひずみは対数ひずみの偏差成分ノルムで示してある。

3.4 分岐荷重・分岐モードに対する供試体形状比の影響

形状比を変化させたときの形状比と分岐荷重の関係を対称・反対称の各分岐モードについてそれぞれ図-6, 7 で示した。これらの図より、形状比の変化に対し、各分岐モードの分岐荷重は極値を持つ変動を示すことが分かる。このような現象は志比ら⁸⁾により解析的にも検証されており、塑性ひずみ速度の非共軸性の影響についても検討されている。各形状比において分岐荷重が最も低い分岐モードは比較的 low order のモードに限られている。

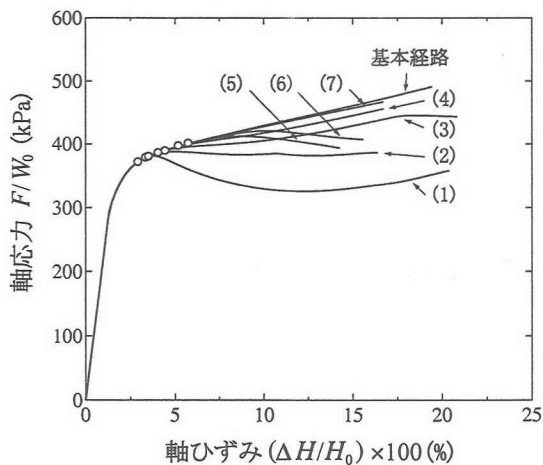


図-4 形状比 2.00 のつり合い経路 (基本経路, 分岐経路)

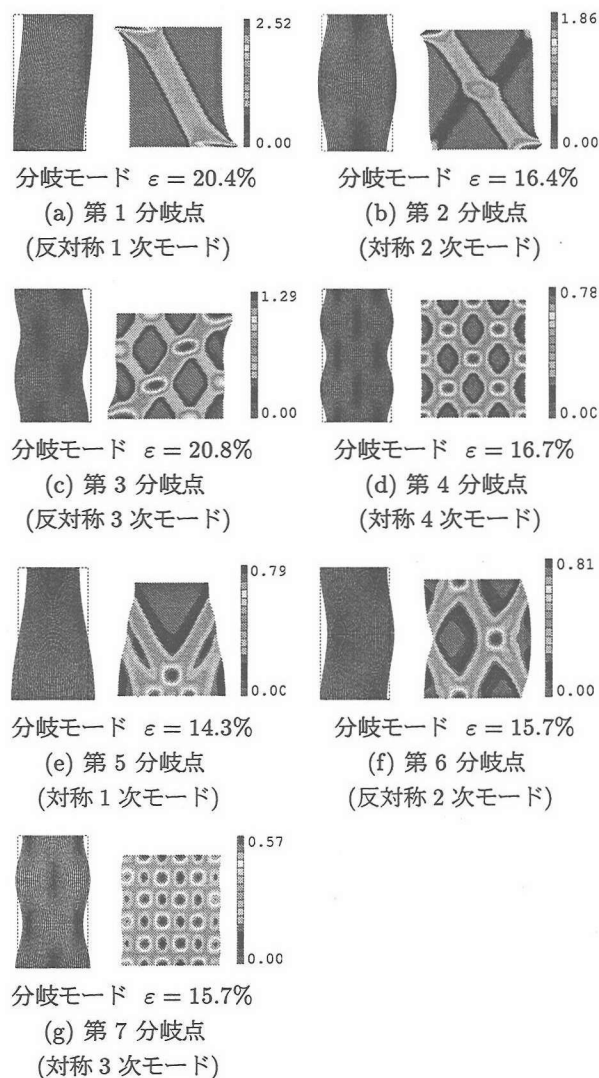


図-5 分岐モードとせん断ひずみの分布 (形状比 $R = 2.00$)

そこで、最小分岐荷重の分岐モードとなることが多い対称1次モード、反対称1次モードおよび対称2次モードをまとめて図-8に示した。最小分岐荷重を与える分岐モードは、 $R < 1.75$ では対称1次モード、 $1.75 < R < 2.25$ では反対称1次モードと対称2次モード、 $2.25 < R$ では反対称1次モードである。このことは実

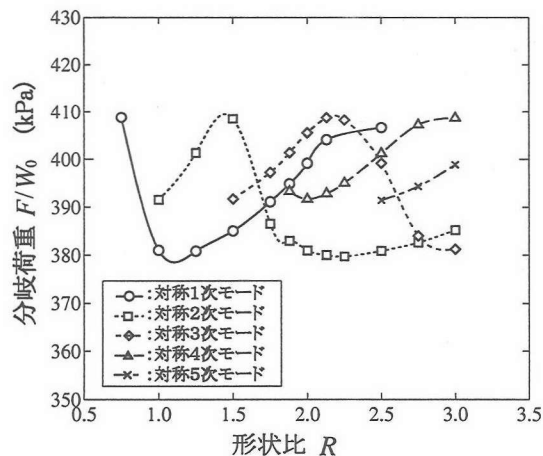


図-6 分岐モード毎の分岐荷重と形状比の関係 (対称モード)

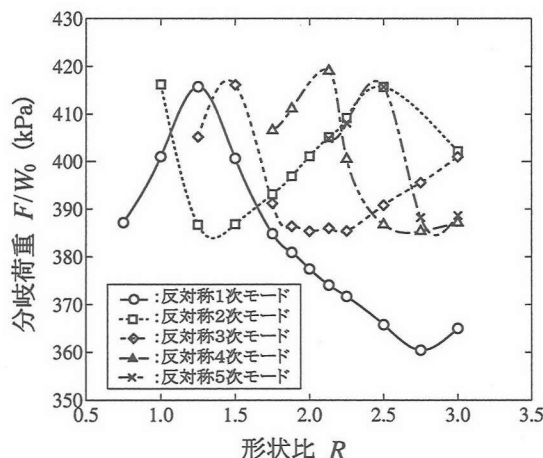


図-7 分岐モード毎の分岐荷重と形状比の関係 (反対称モード)

際の実験における標準供試体 $R = 2.0 \sim 2.5$ において反対称1次モードや対称2次モードに類似した破壊形態を示すことが多いことから今回の解析結果との関連性が伺える。また、各種の形状比を有する供試体を用いた実験において観察された典型的な破壊モードと同様の傾向となっている。

本研究における弾塑性分岐解析では、平面ひずみ供試体を解析モデルとしているが、実際の地盤材料の供試体に多少なりとも存在する材料の不均一性 (材料の不整) や形状のゆがみ (幾何学的な不整) といった影響は存在しない。そのため、高次の分岐モードについての解析を行うことができるが、実際の実験においてはこうした不整の影響により、変形の初期段階から変形の局所化が誘発され、高次の分岐モードが発生する前に、低次の分岐モードに類似する破壊形態が現れるものと考えられる。

4. 端面境界条件による影響

地盤材料における圧縮せん断試験時には、供試体の上下端面の摩擦による変位拘束の有無が破壊形態ひいては供試体の強度に影響を及ぼすことが多くある。

そこで、本節では平面ひずみ供試体の境界における変位の拘束条件を変化させて弾塑性解析を行い、発生

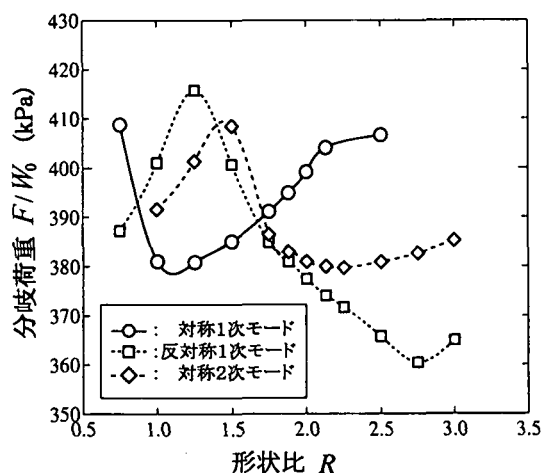


図-8 形状効果による最小分岐荷重の変動

する破壊形態および荷重-ひずみ関係についての検討を行った。

4.1 解析モデルと境界条件

本節において数値解析を行った解析モデルを図-9に示す。また、解析を行う際の基本的なパラメータ等の設定は、第3.1節および第3.2節に従うものとし、初期の有限要素メッシュは均等分割の4節点アイソパラメトリック要素を用いた。平面ひずみ供試体形状には、幅 W_0 (24mesh), 高さ H_0 (48 mesh), 要素数 1152, 節点数 1225 の形状比 $R = H_0/W_0 = 2.00$ の矩形供試体とした。

荷重条件は全ての解析パターンにおいて平面ひずみ状態を仮定し、上端に一樣な y 方向の変位が与えられるものとする。

拘束条件に関する解析パターンは、モデル1からモデル4までの4通り行い、その拘束条件については以下に記す。モデル1は上下端面の拘束は剛体移動を止めるために下面中央部の1点のみを拘束して、それ以外は x 方向の変位を自由とした。これは、端面摩擦が理想的に排除された条件である。モデル2は上下端面全てを拘束し、上下端面とも x 方向の変位も許さないものとした。これは、端面摩擦によって変位が完全に拘束された条件となる。モデル3は x 方向の変位を止めるために上下面中央部のそれぞれ1点を拘束して、それ以外の x 方向の変位を自由とした。モデル1との違いは、上側のキャップが x 方向にスライドできない点である。モデル4は下端面の拘束を固定端として、上端面は荷重載荷面を拘束して形状は変化しないが、 x 方向の変位は自由とすることで、摩擦拘束しながら、キャップはスライド可能としている。実際の端面摩擦条件は、ここで用いた完全拘束ではなく、摩擦が働きながら側方変位するものと考えられるが、これも考慮に入れた解析²⁰⁾は今後の課題としたい。

こうした各種の境界条件の下では、分岐モードの発生が抑制されるものである。例えば、モデル3では反対称1次モードは生じ得ない。一方、モデル2では、特に分岐を発端とせず始めから不均一変形が進展し、対称2次モードに類似した変形形態となる。

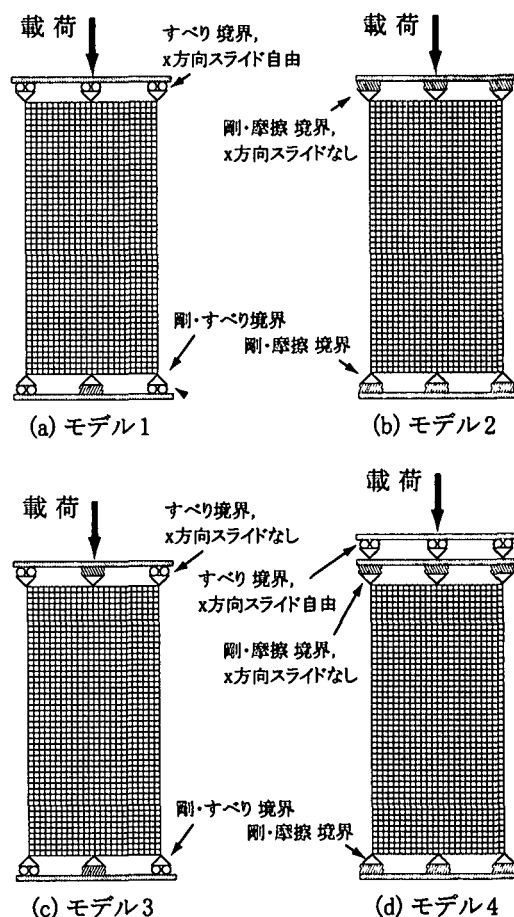


図-9 端面境界条件の異なる解析モデル

4.2 つり合い経路に対する端面境界条件の影響

上述の条件における弾塑性解析によって得られた各供試体モデルごとのつり合い経路を図-10に示す。ただし、各経路の追跡過程で分岐点の判定を行ったが、分岐点の存在が認められなかったため分岐解析は行っていない。しかし、供試体形状比が本論文で想定したものと大きく異なる場合には分岐解の存在も考えられ得る。また、図-11は解析モデルにおけるせん断ひずみ分布の進展を表したものである。

図-10より、モデル1とモデル3は同じつり合い経路を辿っていることが分かる。これは、供試体モデルが一樣変形を続けるために必要な上下端面における x 方向の変位が拘束されていないために、双方とも基本経路から逸脱することなく変形が進展するためである。そのことは、図-11においてひずみの局所化が発生せずに四角形の形を保ったまま一樣変形が進行していることから確認される。

モデル2、モデル4におけるつり合い経路は、モデル1、モデル3とは明らかに異なる経路を辿っている。また、図-11を見たときに、変形の進み方が明らかに異なることから確認できる。これは、 x 方向の変位が拘束されているために、供試体モデルが一樣変形することができず、一樣変形の基本経路を辿ることができず、供試体の中央部にひずみが集中し、対称2次モードに似た破壊形状となる。これは、上下端面が拘束されているために始め供試体中央部にひずみが集中が起るためである。さらに、軸ひずみが10%付近

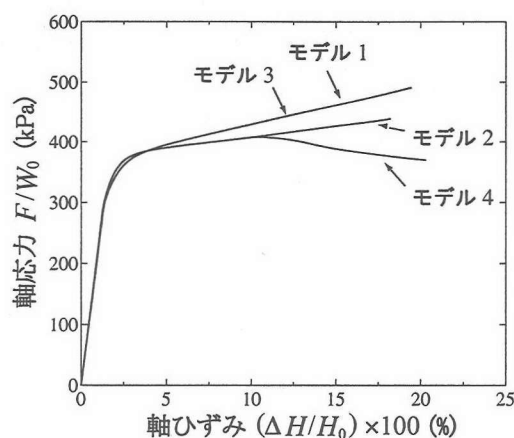


図-10 端面境界条件によるつり合い経路への影響

まで進展した時、モデル4においてモードジャンプが発生している。これは、供試体上端面の x 方向変位は拘束されておらず、キャップのスライドが自由なので、あるところで左右非対称な変形へ遷移し、やがて塑性によるひずみの集中が始まり、供試体を2つに分断するような大きなせん断帯が発生する。このような現象は、同様の拘束条件を用いた地盤材料の圧縮せん断試験において確認されている。

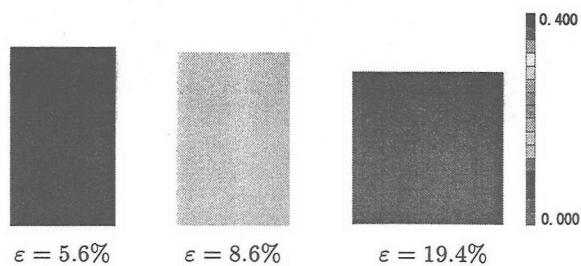
4.3 上下端面を拘束した供試体のひずみ分布

図-12 は、上下端面全てを拘束したモデル (モデル2) について形状比を $R = 1.50, 2.00, 2.50, 3.00$ としたときのひずみの分布を示したものである。各供試体のひずみの度合いは軸ひずみ20%前後とした。ただし、解析は基本経路のみについて行い、特に分岐解析は行っていない。これにより、上下端面を全て拘束したときの供試体のひずみの進展は、形状比に拘わらず、×印型のせん断帯のみが発生した。これは、端面摩擦が排除されたモデル1 (図-5.(b)) における対称2次モードに似た変形であることが言える。

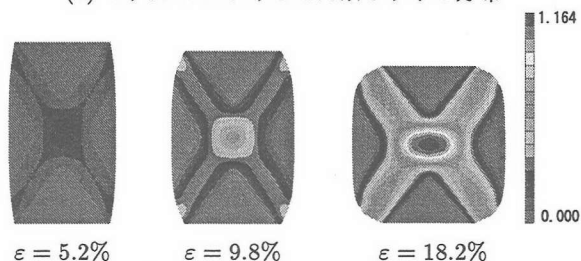
そこで、図-13 では、各形状比毎 ($R = 1.50, 2.00, 2.50$) にモデル1での対称2次モードのつり合い経路 (実線) とモデル2でのつり合い経路 (点線) について比較している。図より、モデル1とモデル2に共通して、形状比が大きくなるにつれ軟化の度合いも大きくなるのが分かる。また、軟化の度合いに若干の差は見られるものの、つり合い経路の方向性には大きな違いは見られず、端面摩擦の有無による破壊形状と分岐モードに関連性があることが伺える。モデル2の方が軟化した原因としては、上下端面が拘束されており、供試体中央部のひずみの進展に及ぼすエネルギーの散逸がモデル1と比べて少ないためと考えられる。

5. 実験における破壊モードと数値解析結果の比較

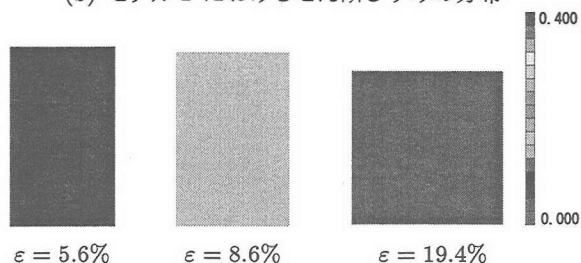
本研究では、形状効果と破壊形態の関係を調べるために、前章で用いた解析モデルと同様な拘束条件、荷重条件下で豊浦砂の平面ひずみ圧縮試験を行った。また、実験の概要は付録Iに後述する。本章では、数値



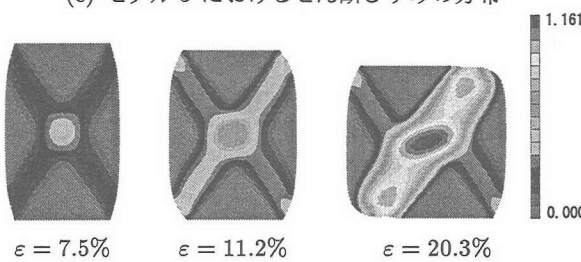
(a) モデル1におけるせん断ひずみの分布



(b) モデル2におけるせん断ひずみの分布



(c) モデル3におけるせん断ひずみの分布



(d) モデル4におけるせん断ひずみの分布

図-11 各モデル毎のせん断ひずみの分布

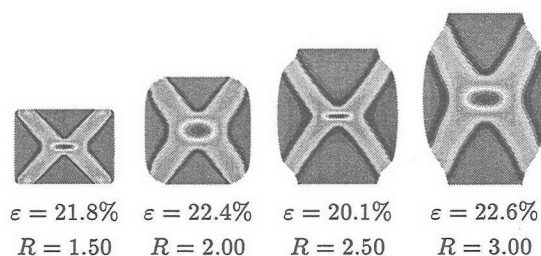


図-12 上下端面を拘束した供試体 (モデル2) でのせん断ひずみの分布

解析によって得られた結果との比較を行う。

5.1 実験から見た形状効果の分岐荷重へ及ぼす影響

第3.4節および図-8 から、供試体形状比のある範囲において最小分岐荷重を得る分岐モードの卓越が見られることが分かった。そこで、この解析結果と実現象との関連性について考えてみる。図-14 は、(a)~(d) の

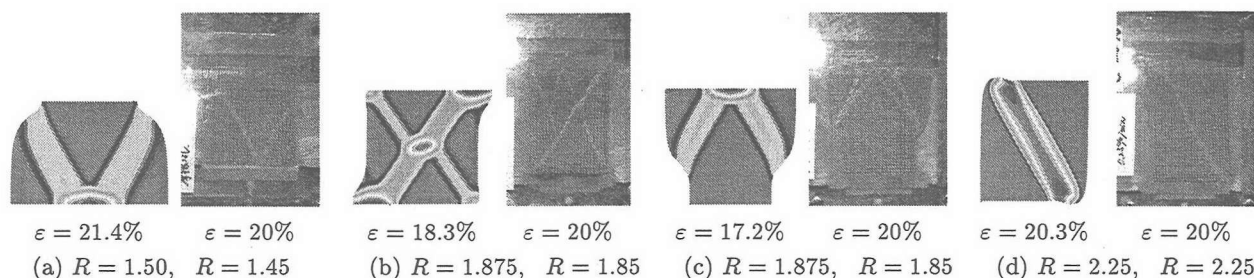


図-14 各形状比の最小分岐荷重に対応するモードの解析結果と実験における典型的な破壊モードの比較

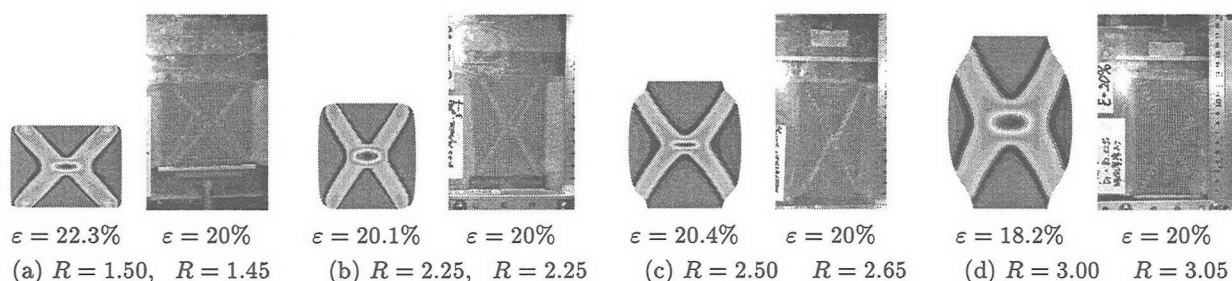


図-15 上下端面を拘束した供試体の各形状比に対する解析結果と実験結果の比較

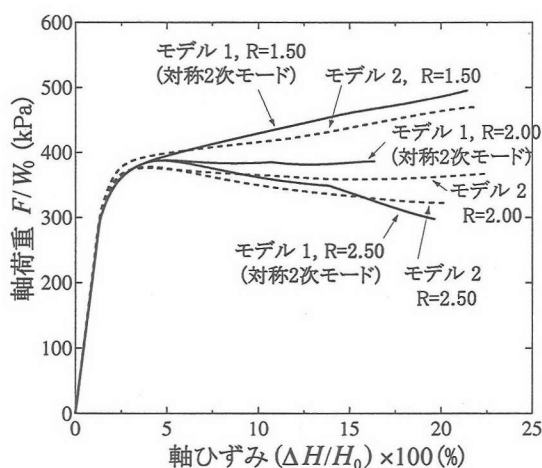


図-13 モデル1(対称2次モード)とモデル2のつり合い経路

各図左側に各形状比 $R = 1.50, 1.875, 2.25$ での最小分岐荷重となるとき分岐モードを、また、各図右側には解析を行った各形状比に対応した $R = 1.45, 1.85, 2.25$ について複数ケース実験したうちの最も多く(典型的に)観察された破壊形状を示したものである。

図より、解析により得られたせん断ひずみの局所化した部分の形態は、実験で観察されたせん断帯と同じような形態を示すことが分かる。このことは、第3.4節で述べたことと比較すると、 $R = 1.45$ では対称1次モード、 $R = 1.85$ では反対称1次モードと対称2次モード、 $R = 2.25$ では反対称1次モードに類似した破壊形態を示していることから関連性の高さが伺える。 $R = 1.85$ については、2ケースのみの実験(表-1 参照)であるが、図-14 (b), (c) の破壊形状が1ケースずつ観察されたことから、図-8で、最小分岐荷重が近接していることとの関連性が考えられる。

5.2 供試体の上下端面を拘束した場合の変形挙動

第3.2節で扱ったモデル2について、同様の境界条件下で行った実験結果と比較する。ここでの境界条件は図-9中のモデル2に示すとおりであり、平面ひずみ供試体の荷重載荷面(上端面)は x 方向、供試体接地面(下端面)は x, y 方向の変位を拘束している。これにより、荷重載荷開始直後から供試体中央部にひずみが集中し、徐々にその度合いが増えてくる。また、図-15 (a)~(d)の各図左側には、弾塑性解析による $R = 1.50, 2.25, 3.00$ に対するひずみの度合いを示す。この場合、分岐は発生せず、終始一定のモードのまま同図のような変形が進行し、形状変化は×印型の変形挙動を示す。図-15 (a)~(d)の各図右側には、上記の解析モデルと同様な境界条件下において、形状比を $R = 1.45, 2.25, 3.05$ の3通りに変化させたときの実験結果を示した。

実験結果において図より、上下端面が全て拘束されている場合には、形状比に関係なく供試体中央部に×印型のせん断帯が発生しており、前節のように様々な破壊形態を示すことなく、全ケースにおいて同じ形状で破壊している。このことは、弾塑性分岐解析の結果と実験結果の整合性を示している。

6. 結論

本研究では、形状比を様々に変動させた平面ひずみ矩形供試体について、弾塑性有限要素法を用いた拡散型分岐モード解析を行い、分岐荷重や分岐モードに対する供試体形状比の影響について調べた。また、平面ひずみ矩形供試体の端面境界条件を変えることにより、発生する分岐モードや分岐後のつり合い経路、ならびに変形局所化の進展の相違について調べた。これにより、平面ひずみ矩形供試体の形状効果や端面境界条件による影響について以下のような結論が得られた。

1. 供試体形状比の変化に対し、各分岐モードごとの

分岐荷重は極値を持った増減の変動を示すことが分かった。同時に、分岐モードが低次になるほど分岐荷重の最小値が小さくなる傾向が見られた。しかし、基本経路を辿っていく過程で、経路上に存在する分岐点は、必ずしもその分岐モードは低次の順ではないことが確認された。

2. 各供試体形状比において、分岐荷重の最も低い分岐モードは比較的低次のモードに限られていることが分かった。
3. 豊浦砂の実験結果と比較した結果、供試体形状比ごとに発生した破壊形態は、分岐解析により低い分岐荷重で発生する低次のモードと類似していることが分かった。
4. 端面境界条件による影響により、発生しうる分岐モードが限られることがあり、局所化進展挙動は大きく異なることが分かった。上下端面が全て拘束されている場合には、形状比に関係なく供試体中央部に×印型のひずみ集中域を形成することが分かった。しかし、上部のキャップの x 方向の変位を自由とした場合には、前者の結果と異なり、途中から左右の対称性を喪失して一方向のひずみ集中域のみが進行していくモードジャンプの挙動が見られた。こうしたひずみ集中域の形成から、せん断帯（不連続なひずみ速度場）の発生を断定できるものではない。従って、不連続せん断帯分岐モードの発生の判定とその後の不連続場の進展解析は今後行う必要がある²¹⁾。

5. 図-5 に示したように、端面摩擦が無く基本経路において一様変形が実現される実験条件では、分岐により多様な破壊モードが発生する可能性があり、それは実験においては初期不整により誘発されるものである。また、図-14 より、最小分岐荷重を与える分岐モード、あるいは、実験で典型的に現れる破壊モードは、供試体形状比によって異なることが分かった。さらに、図-4 では単調に荷重増加を続けるものもあるが、荷重低下を示すものであっても、最大荷重点は分岐経路に移行した後、しばらくは荷重増加を続け、さらにその後に荷重低下がおこる。そのため、分岐モードの変動は供試体強度にも影響を及ぼすことが分かる。一方、図-15 に示したように、端面摩擦がある場合は、初めから不均一変形が進展するが、この場合には、供試体形状比によらず、破壊モードは×印型のみである。このことは、実験を行う際の端面境界条件の設定は、分岐による多様な破壊モードの変動を許容するか、あるいは一つの破壊モードに限定して破壊させるかを規定するという意味において重要であることを示している。後者の場合、供試体の要素性（一様性）は初めから失われることとなるが、実験条件設定のひとつの方針として有効であると考えられる。

付録 I 豊浦砂の平面ひずみ試験の概要

供試体寸法・端面摩擦の有無の各種境界条件を変化させて行った豊浦砂の平面ひずみ圧縮せん断試験法に

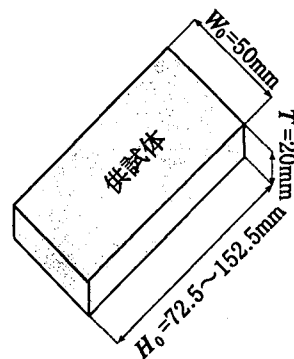


図-16 平面ひずみ供試体

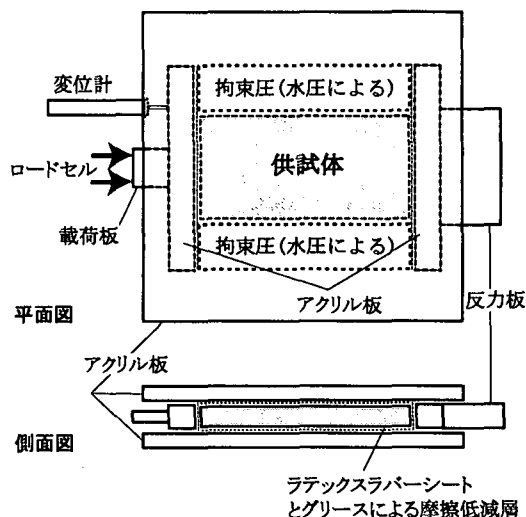


図-17 実験装置図

表-1 実験ケース一覧

形状比 R	供試体高さ H_0	端面摩擦 の有/無	サンプル数
1.45	72.5	無	2
1.85	92.5	無	2
2.05	102.5	無	3
2.25	112.5	無	4
1.45	72.5	有	4
1.85	92.5	有	5
2.25	112.5	有	7
2.65	132.5	有	4
3.05	152.5	有	2

ついてまとめる。

豊浦砂を水で洗浄し、ほこりを取り除いた後に炉乾燥したものを試料として、気中落下法により供試体を作成する。相対密度は $85 \pm 2\%$ の範囲内となるように管理した、比較的密な供試体である。さらに高さ方向についてもできるだけ均質な供試体とするために、試料は供試体の高さに合わせて何層かに分割し、各層で落下高さが一定となるように試料を詰めた。供試体形状としては、図-16 に示すような長方形を用い、寸法

は、幅 $W_0 = 50\text{mm}$ で一定とし、高さを $H_0 = 72.5 \sim 152.5\text{mm}$ 、厚さ $T = 20\text{mm}$ と変化させた。供試体は冷凍することによって作製した。

本実験の実験装置としては、一面せん断試験機を改良したものを用いた。この概略図を図-17に示す。透明なアクリル板2枚を水平に設置し、これらの間に20mmの空間を常時保って、アクリル板の両側に金属棒を挟んで固定した。モーターを一定速度で稼働させてロードセルと載荷板を押すことにより供試体にせん断力を与えた。

実験は、側圧は水圧を用いて73.5kPaとし、せん断速度は土質試験の方法と解説¹⁸⁾に従い設定した。実験ケースは表-1で示すように、各形状比それぞれについて端面摩擦ありと無しのケースを表に示すサンプル数だけ行った。

供試体のせん断挙動を明確に観察するために、供試体の表面に2.5mm×2.5mmの基盤の目を書いたラテックスラバーシートをかぶせ、これをアクリル板で挟むように設置する。さらに、供試体表面部における摩擦を低減するために、ラバーシートとアクリル板との間にシリコングリースを塗った。また、端面摩擦なしの条件では、シリコングリースとラテックスラバーシートを用いたlubrication layerを設置することで、供試体上下の端面摩擦を低減した。端面摩擦ありの条件では、供試体上下の端面と載荷板・反力板との間にサンドペーパーを挟み、摩擦境界とした。

まず、冷凍した供試体をセットし、載荷板が適度に可動する範囲でボルトを締め、アクリル板を固定する。側圧が供試体に均等に行き渡るように水圧を29.4～49kPaに上げ、供試体が溶けるのを待つ。その後、側圧を73.5kPaに設定し、軸圧縮(せん断)を開始した。軸ひずみが20%までは1%間隔で、それ以降30%までは2%間隔で写真を撮影した。

謝辞: 東北大学工学部土木工学科の須藤良清技官と卒業生の櫻庭嗣大氏には、豊浦砂の平面ひずみ試験においてご協力を戴きました。ここに記して謝意を表します。

参考文献

- 1) Hill, R. and Hutchinson, J. W.: Bifurcation phenomena in the plane tension test, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 23, pp. 239-264, 1975.
- 2) Young, N. J. B.: Bifurcation phenomena in plane compression test, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 24, pp. 77-91, 1976.
- 3) 小林 一三, 飯塚 敦, 太田 秀樹: 正規粘土供試体せん断時における局所変形の遷移, 土木学会論文集, No. 617/III-46, pp. 1-18, 1999.
- 4) 小林 一三: 地盤材料の力学的安定性と破壊現象, 金沢大学博士学位論文, 1998.
- 5) 志比 利秀, 矢富 盟祥, 亀井 健史: 平面ひずみ非排水圧縮条件下における供試体寸法比の変化が正規圧密粘土の分岐荷重に及ぼす影響, 土木学会論文集, No. 666/III-53, pp. 181-192, 2000.
- 6) Sabatini, P.J. and Finno, R.: Effect of consolidation on strain localization of soft clays, *Computers and Geotechniques*, Vol. 18, No. 4, pp. 311-339, 1996.
- 7) Saada, A.S., Liang, L., Figueroa, J.L., and Cope, C.T.: Bifurcation and shear band propagation in sands, *Géotechnique*, Vol. 49, No. 3, pp. 367-385, 1999.
- 8) Yatomi, C., Yashima, A., Iizuka, A., and Sano, I.: Shear bands formation numerically simulated by a non-coaxial Cam-Clay model, *Soils and Foundations*, Vol. 29, No. 4, pp. 1-13, 1989.
- 9) Yatomi, C. and Shibi, T.: Antisymmetric bifurcation analysis in a circular cylinder of a non-coaxial Cam-clay model, in: A. Asaoka, T. Adachi and F. Oka (eds.), *Deformation and Progressive Failure in Geomechanics*, Proc. IS-NAGOYA '97, pp. 9-14, 1997.
- 10) Wu, W.: Non-linear analysis of shear band formation in sand, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 24, pp. 245-263, 2000.
- 11) Vardoulakis, I. and Sulem, J.: *Bifurcation Analysis in Geomechanics*, Blackie Academic & Professional, Glasgow, UK, 1992.
- 12) Asaoka, A. and Noda, T.: Imperfection-sensitive bifurcation of Cam-clay under plane strain compression with undrained boundaries, *Soils and Foundations*, Vol. 35, No. 1, pp. 83-100, 1995.
- 13) 山川 優樹, 池田 清宏, 須藤 良清, 寺井 信夫, 鳥居 邦夫: 砂の三軸試験供試体の分岐変形モードと寸法・形状効果 土木学会論文集, No. 701/III-58, pp. 357-371, 2002.
- 14) 山川 優樹, 寺田 賢二郎, 池田 清宏, 鳥居 邦夫: 圧縮場における弾塑性体の分岐解析とパスジャンプ挙動, 土木学会論文集, No. 701/III-58, pp. 73-86, 2002.
- 15) Hill, R.: A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 6, pp. 236-249, 1958.
- 16) 藤井 文夫, 野口 裕久: 固有値解析を必要としない大規模非線形構造系の分岐座屈モードの求め方, 構造工学論文集, Vol. 46A, pp. 241-250, 2000.
- 17) 野口 裕久, 久田 俊明: Scaled Corrector を用いた有限要素分岐解析手法の開発, 日本機械学会論文集 (A 編), Vol. 58, No. 555, pp. 2191-2198, 1992.
- 18) 土質試験の方法と解説, 地盤工学会, 1999.
- 19) 野田 利弘: 限界状態における粘土の弾塑性挙動と水～土骨格連成有限変形解析に関する研究, 名古屋大学博士論文, 1994.
- 20) Simo, J. C. and Miehe, C.: Associative coupled thermoplasticity at finite strains: Formulation, numerical analysis and implementation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 98, pp. 41-104, 1992.
- 21) 杉本 環, 鱈 洋一, 矢富 盟祥: 経路不変積分を用いた強不連続解析の精度検証に関する研究, 応用力学論文集, Vol. 3, pp. 351-362, 2000.

(2002年4月19日 受付)