

増分非線形モデルの数学的構造・定式化と主応力軸回転時の挙動の検証

Mathematical Structure and Formulation of Incrementally Nonlinear Models and
Their Behaviors during the Rotation of Principal Stress Axes

飛田 善雄*・加茂 謙一**

Yoshio TOBITA and Ken-ichi Kamo

*正会員 工博 東北学院大学工学部教授 環境土木工学科 (〒985-8537 多賀城市中央 1-13-1)

**正会員 修(工) 日本電子計算株式会社(前東北学院大学大学院前期課程) (〒135-8388 江東区東陽 2-4-24)

The incrementally nonlinear behaviors of engineering materials, in particular geomaterials, are often reported and formulated into constitutive models. We here discuss the mathematical structure of incrementally nonlinear constitutive models among stress rates, strain rates, and the rate of change in internal variables through the representation theorem of isotropic functions and their matrix forms. As the examples of incrementally nonlinear models we discuss the formulation of the multi-slip model and the modified elasto-plastic model leading to incremental nonlinearity. Both models are evaluated whether they can account for the behavior of sands during the rotation of principal stress axes and found to be satisfactory from a qualitative view point.

Key Words: incremental nonlinearity, representation theorem of isotropic functions, multi-slip model, modified elasto-plastic model

1. はじめに

地盤材料に対する実験技術の進歩により、材料の等方性を仮定する古典的弾塑性モデルでは表現できない性質が明らかになった。例えば、非共軸性、異方性の影響、増分非線形性などである^{1), 2), 3)}。塑性ひずみ速度と応力の主軸に関する非共軸性や強度・変形の異方性は、内部構造の数学的表現である構造テンソルを導入することにより、負荷関数、塑性ポテンシャル関数を利用する古典的な弾塑性モデルでもある程度表現可能である^{4), 5)}。しかし、上記変形挙動のうち、増分非線形性は古典的な定式化では表現できない性質である。

様々な速度量の関係式に現れる増分非線形性は、構成モデルに用いられる変数が、さまざまな方向を有する微視的メカニズムの複雑な相互作用の結果として同定されることを考えると、物性的には極めて自然な現象であると判断されるが、その性質の数学的表現については、十分に理解されているとはいえない。

本論文では、増分非線形性に注目し、以下の事項について議論を行う：

- 1) 増分非線形性の数学的表現に関する議論を等方関数の表示定理に基づいて行い、そのマトリックス表現により、数理的特徴を議論する
- 2) 増分非線形性を表現する過去のモデルの総括を行い、その数学的特徴を明確にする
- 3) 増分非線形性を表現する具体的なモデルとして、多重すべりモデルと弾塑性修正モデルの定式化

とモデルの検証を行う。同時に数学的構造を議論する。

本論文では、点として定義される構成モデルを対象に議論する。すなわち、変形の一様性が仮定できるひずみ硬化状態を対象とする。また、有限変形を対象として構成モデルを定義する場合の煩わしさを避けるために、微小変形理論の範囲内での議論に限定する。

本論文では、直交デカルト座標系を主として採用し、指標表示で構成モデルを表現する。表示定理の議論で、一部直接表記法を利用するが、その演算の定義については、必要と思われる範囲内で指標表示により定義する。ある項の中の繰り返し指標に対する総和規約を、文中で断りなく利用する。応力・ひずみテンソルは、右手座標系の正方向に正の値が一致するように、引っ張りを正とする。

2. 増分非線形の定義とその表現

2.1 増分非線形の定義

本節では増分非線形性の定義を与える。「速度関係式の非線形性」と呼ぶのが、材料挙動を表現する構成モデルとしては正確な表現であるが、ここでは、慣例に従い数値解析への応用を重視した「増分非線形性」を一貫して使用する。増分非線形性は、しばしば古典的弾塑性モデルにおける流れ則(塑性ポテンシャルの現応力点における法線方向に塑性ひずみ速度が発生する)からの逸脱を意味する言葉として用いられることがある。しかし、そ

れは誤りであり、後に議論するように増分線形であっても法線則からの逸脱は生じる。増分非線形性は、例えば、応力速度、ひずみ速度を表現する関係式を次式のように表現したとき、4 階の剛性テンソル E_{ijkl} にひずみ速度の方向の影響が残ることを意味している。

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (1)$$

構成モデルにおける全ての速度関係式が増分線形・非線形の議論の対象となる。例えば弾塑性モデルのうち、移動硬化理論モデルに非線形硬化モデル^{6), 7)} と呼ばれるものがあり、応力・ひずみ以外の内部変数の速度関係式においても、この議論は大切になる。

速度関係式では、内部変数の発展則に特別の配慮をしない限り時間依存性挙動を示すことになる。ここでは、式(1)の両辺が時間に関して同じ次元(時間に関して1次の同次関数)であることを要求し⁶⁾、速度型構成モデルとして非時間依存性を有するモデルのみを対象として議論する。速度形式の構成モデルにおいては、定式化のいずれかの段階で増分非線形関係を仮定すれば、最終的な応力速度・ひずみ速度関係式は増分非線形関係式となる。

議論の正確さのために、最初にテンソル関係式に必要とされる等方関数の表示定理を簡潔に紹介する。さらに、等長変換を用いてマトリックス表現を行い、得られた構成マトリックスの数学的特徴を議論する。数学的特徴はテンソル式よりも、マトリックス表現の方が視覚的に理解しやすいので、できる限りマトリックス表現を行う。

2.2 等方関数の表示定理とマトリックス表現

工学材料の構成関係は、多くの要因に支配される。例えば、応力、初期異方性、誘導異方性などが影響を与えることが知られている。これらの要因を全て取り入れて、数学的議論を行うのは極めて困難であり、また増分非線形性の数学的特徴を議論するには、必ずしも有益でない。そこで、塑性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ が、修正応力(変換応力と呼ばれることもある) T_{ij} と応力速度 $\dot{\sigma}_{ij}$ で与えられるテンソル関数を考えることにする。修正応力^{5), 8)} は、応力と構造テンソルの関数として与えられるものであり、一般には、次の関係式により定義される

$$T_{ij} = f_{ij}(\sigma_{ij}, H_{ij}) \quad (2)$$

ここに、 H_{ij} は、構造テンソルと呼ばれ、材料の内部構造を表現するテンソル量であり、異方性を表現する役割をもつ。修正応力の具体的関数形として、例えば、

$$T_{ij} = \frac{1}{2}(\sigma_{ik} H_{kj} + H_{ik} \sigma_{kj}) \quad (3)$$

などが粒子接触状況を反映する応力として用いられている⁵⁾。修正応力を導入することにより、異方性の影響を取り入れた構成モデルの表現が可能になる。

塑性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ が、修正応力 T_{ij} と応力速度 $\dot{\sigma}_{ij}$ の関数として表現される次式を中心に議論を進めていく。

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = f_{ij}(T_{ij}, \dot{\sigma}_{ij}) \quad (4)$$

2つの対称テンソルを独立変数とする関係式に関する等方関数の表示定理^{4), 8)} を利用すると(表現定理とも呼ばれる)、式(4)の既約な表現(必要なものは全て含むがこれ以上は簡単にできない表現)は、次式のように与えられる。

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}^p = & a_1 I + a_2 T + a_3 \dot{\sigma} + a_4 T^2 + a_5 \dot{\sigma}^2 + a_6 (T\dot{\sigma} + \dot{\sigma}T) \\ & + a_7 (T\dot{\sigma}^2 + \dot{\sigma}^2 T) + a_8 (T^2\dot{\sigma} + \dot{\sigma}T^2) \end{aligned} \quad (5)$$

この式のテンソル量を、以下生成元(generators)と呼ぶことにする。

式(5)において、係数 a_α ($\alpha = 1, 2, \dots, 8$) は以下に示す不変量で定義されるスカラー関数である。

$$\begin{aligned} & tr(T), tr(T^2), tr(T^3), tr(\dot{\sigma}), tr(\dot{\sigma}^2), tr(\dot{\sigma}^3), \\ & tr(T\dot{\sigma}), tr(T^2\dot{\sigma}), tr(T\dot{\sigma}^2), tr(T^2\dot{\sigma}^2) \end{aligned} \quad (6)$$

表示定理では、慣例的に直接表記法が利用される。式(5)、(6)中にでてくる直接表記法の表現を指標表示で、その演算を定義すると以下ようになる。

$$\begin{aligned} I &= \delta_{ij}, T = T_{ij}, T^2 = T_{ik} T_{kj}, tr(T) = T_{kk}, tr(T\dot{\sigma}) = T_{ik} \dot{\sigma}_{ki}, \\ tr(T^2) &= T_{ik} T_{ki}, tr(T^2\dot{\sigma}) = T_{ik} T_{kl} \dot{\sigma}_{li}, \dots \end{aligned}$$

(5)式は応力速度の2次の項を含むものであり、増分非線形性を示している(また、速度(時間)依存性も表現している)。すなわち、数学的観点からは、一般的な速度関係式は非線形な関係であり、増分線形関係は強い制限を課さなければ得られないことになる。増分線形関係式は、以下のような制約条件を課すことにより得られる(徳岡(1980)⁹⁾ 参照)

- 1) 生成元の非線形な項を全て削除する。すなわち、 $\dot{\sigma}^2, T\dot{\sigma}^2 + \dot{\sigma}^2 T$ の項は全て消去する
- 2) 1) により得られた式に対して、既に応力速度 $\dot{\sigma}$ を含む項に対しては、その項のスカラー関数は、応力速度を含まない修正応力の不変量だけで表現されるものとする。

Kronecker のデルタ δ_{ij} (I と表現する)、修正応力 T 、2次の修正応力 T^2 の係数を展開して、応力速度の1次の項のみを含む不変量で表現して、 h_α ($\alpha = 1, 2, \dots, 12$) が全て修正応力の不変量のみの関数であるとして陽に表現すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}^p = & [h_1 tr(\dot{\sigma}) + h_2 tr(T\dot{\sigma}) + h_3 tr(T^2\dot{\sigma})] I \\ & + [h_4 tr(\dot{\sigma}) + h_5 tr(T\dot{\sigma}) + h_6 tr(T^2\dot{\sigma})] T \end{aligned}$$

$$+ [h_7 \text{tr}(\dot{\sigma}) + h_8 \text{tr}(T\dot{\sigma}) + h_9 \text{tr}(T^2\dot{\sigma})] T^2 \\ + h_{10} \dot{\sigma} + h_{11} (T\dot{\sigma} + \dot{\sigma}T) + h_{12} (T^2\dot{\sigma} + \dot{\sigma}T^2) \quad (7)$$

修正応力の主軸を座標系に採用してその主値を $t_\alpha (\alpha=1,2,3)$ と表し、より簡単な表現を求める。以下の表現を利用すると、

$$T_{kl} \dot{\sigma}_{kl} = \sum_{k=1}^3 t_k \delta_{kl} \dot{\sigma}_{kl}, T_{kl} = t_k \delta_{kl}, T_{km} T_{ml} = t_k^2 \delta_{kl}, \\ \dot{\sigma}_{ij} = (1/2) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \dot{\sigma}_{kl}, \quad (8) \\ (T_{im} \dot{\sigma}_{mj} + \dot{\sigma}_{im} T_{nj}) = \left(\frac{t_i + t_j}{2} \right) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \dot{\sigma}_{kl} \dots$$

簡潔な表現となり式(9)が得られる⁹⁾。

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = C_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} \\ C_{ijkl} = A_{ik} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{2} B_{ij} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\ A_{ik} = h_1 + h_4 t_i + h_2 t_k + h_7 t_i^2 + h_5 t_i t_k \\ + h_3 t_k^2 + h_6 t_i t_k^2 + h_8 t_i^2 t_k + h_9 t_i^2 t_k^2 \\ B_{ij} = h_{10} + h_{11} \left(\frac{t_i + t_j}{2} \right) + h_{12} \left(\frac{t_i^2 + t_j^2}{2} \right) \quad (9)$$

この指標表示による表現から、得られた式の数学的特徴を議論することは難しいので、徳岡にならい等長変換を用いて、指標表示からマトリックスへ変換すると(付録-1に等長変換の基本的な約束を示す)、次式が得られる。

$$\{\dot{\epsilon}_\alpha^p\} = [C_{\alpha\beta}] \{\dot{\sigma}_\beta\}; (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, 6) \quad (10)$$

$$[C_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} [C_{NN}] & [C_{NS}] \\ [C_{SN}] & [C_{SS}] \end{bmatrix} \\ [C_{NN}] = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} + B_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} + B_{33} \end{bmatrix}, \\ [C_{SS}] = \begin{bmatrix} B_{23} & 0 & 0 \\ 0 & B_{31} & 0 \\ 0 & 0 & B_{12} \end{bmatrix}, [C_{NS}] = [C_{SN}] = [0]$$

マトリックス表示の下添え字Nは垂直成分に関わる量(1,2,3)であることを表現し、Sはせん断成分に関する量(4,5,6)であることを示している。修正応力の主軸を座標系に選んだ場合には、マトリックス分割を行った $[C_{NN}]$ と $[C_{SS}]$ の部分のみが0でない成分をもち、その他の項は0となり、垂直応力速度 $\dot{\sigma}_{11}$, $\dot{\sigma}_{22}$, $\dot{\sigma}_{33}$ とせん断応力速度 $\dot{\sigma}_{23}$, $\dot{\sigma}_{31}$, $\dot{\sigma}_{12}$ が独立した式となっている。

構造テンソルの主軸と応力主軸が一致しない場合には、

応力主軸を座標系に選んだときのマトリックス表現はこのような簡単な形式にはならず、0のみを成分とした $[C_{NS}]$ と $[C_{SN}]$ にも、0でない成分が存在することになる。このとき応力主軸方向に応力速度を与えた場合(すなわち、 $\dot{\sigma}_{11}$, $\dot{\sigma}_{22}$, $\dot{\sigma}_{33}$ 以外の応力速度はない場合)であっても、せん断塑性ひずみ速度、 $\dot{\epsilon}_{23}^p$, $\dot{\epsilon}_{31}^p$, $\dot{\epsilon}_{12}^p$ は0とならないことになる。すなわち、塑性ひずみ速度と応力の主軸が一致しないという非共軸性が、構造テンソルと応力の主軸が一致しないという条件では、増分線形モデルの範囲内で表現できることになる。これは応力ばかりでなく構造テンソル(異方性テンソル)にも依存する塑性ポテンシャルを考え、応力と構造テンソルの主軸が異なる場合に、非共軸性が表現できることを説明している。このように、非共軸性と増分非線形性は異なる現象を示す用語であることが理解できる。

負荷関数 f と塑性ポテンシャル g という2つのスカラー関数を用いる古典的弾塑性モデルの数学的構造を議論する。応力の不変量とスカラー硬化変数のみで定義される等硬化モデルを考える。塑性ひずみ速度は、比例係数 Λ と塑性ポテンシャルの法線テンソル m_{ij} を用いて、次式の様に表現される。

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \Lambda m_{ij}; m_{ij} = (\partial g / \partial \sigma_{ij}) \\ m_{ij} = a_1 \delta_{ij} + a_2 \sigma_{ij} + a_3 \sigma_{ik} \sigma_{kj} \quad (11)$$

比例係数 Λ は、次式の様に与えられる。

$$\Lambda = (1/H^p) n_k \dot{\sigma}_k; n_k = (\partial f / \partial \sigma_k) \\ n_k = b_1 \delta_{kk} + b_2 \sigma_{kk} + b_3 \sigma_{kp} \sigma_{kp} \quad (12)$$

Λ の表現を塑性ひずみ速度を与える式に代入して、 $h_1 \text{tr}(\dot{\sigma}) + h_2 \text{tr}(T\dot{\sigma}) + h_3 \text{tr}(T^2\dot{\sigma})$ の項を取りまとめ、 $h_1 = a_1 b_1$, $h_2 = a_1 b_2$, ..., $h_4 = a_2 b_1$, $h_5 = a_2 b_2$, ... と置き、主応力軸を座標系に選んで整理すると、そのマトリックス形式は増分線形モデルの $[C_{NN}]$ に相当することが理解できる。すなわち、古典的弾塑性モデルの塑性ひずみ速度は、増分線形モデルの特殊な形式となっており、主応力軸を座標系に選んだ場合には、どのような応力速度の変化に対しても主塑性ひずみ速度のみが生じる共軸モデルである。いわゆる非共軸性を表現するモデル、例えば、Rudnicki and Rice(1975)¹⁰⁾, Yatomi et al.(1987)¹¹⁾ はこのような古典的弾塑性モデルに非共軸項として増分線形の項を取り入れたものであるから、塑性ひずみ速度の表現としては、増分線形モデルの範疇に属することになる。

2.3 増分非線形性を与える数学的方法

増分線形モデルを与えるための強い制約条件を緩める

ことにより、増分非線形モデルが得られる。以下では、便宜的に制約条件を緩める方法として、次の二つの方法を考えてみる。

- 1) 増分線形式の係数となるスカラー関数を与える不変量に応力速度の高次の項を取り入れる方法
- 2) 既約な表現である生成元に増分非線形性を取り入れる方法

もちろん、これらの方法は増分非線形を与える特殊な方法であり、両者が同時に取り入れられても数学的には何ら問題はない。しかし、実用的な速度形式の構成モデルを考える上では、これらの二つの特殊な場合をそれぞれ検討することで議論は尽くされているように思われる。

(1) 不変量に応力速度の2次の項を導入する方法

増分線形を表す式 (7) の係数 h_α ($\alpha=1,2,\dots,12$) が修正応力の不変量のみの関数であるという制約条件を緩めて、 $\text{tr}(\dot{\sigma}^2)$, $\text{tr}(\mathbf{T}\dot{\sigma}^2)$, $\text{tr}(\mathbf{T}^2\dot{\sigma}^2)$ のような応力速度に依存する不変量の関数でもありうるとして、増分非線形関係式を与えることができる。このとき、得られた関係式が非時間依存性を満足するために、応力速度の代わりに、応力速度の方向のみを表現する不変量として定式化する必要がある。例えば、 $\text{tr}(\mathbf{T}\dot{\sigma}^2)/\text{tr}(\dot{\sigma}^2)$ の様に表現される不変量は時間依存性を持たない。しかし、全ての生成元の係数に同じように入れてしまうと、それは大きさのみを変える増分非線形となり、塑性ひずみ速度の方向の依存性は表現しなくなる。これは、例えば塑性係数 H_p を応力増分方向に依存させる定式化を行った場合に相当する。塑性ひずみ速度の方向までも変化させる増分非線形関係式とするためには、項を選んで、不均等に導入することになる。具体的な議論はここでは省略する。第3章に議論する亜塑性モデルは、この範疇に属するモデルである。

(2) 非線形を表現する生成元を導入する方法

増分線形関係式では無視した非線形な関係を与える $\dot{\sigma}^2$, $\mathbf{T}\dot{\sigma}^2 + \dot{\sigma}^2\mathbf{T}$ の生成元を陽に含む表現を考える。得られる関係式に時間依存性を与えないために、 $l_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} / \|\dot{\sigma}\| = \dot{\sigma}_{ij} / \sqrt{\text{tr}(\dot{\sigma}^2)}$ と表現し、 l_{ij} を応力速度の方向テンソルとして定義する。非線形関係を与える生成元のみ(式 (5) の a_5, a_7 の項)を取り出して、その表現を求める。

増分線形関係を求めたときのように、修正応力の主軸方向に座標系を選択する。指標表示を行い、各成分について、等長変換を利用してマトリックスの各成分を求める。指標表示による構成テンソルは次式になる。

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= \{C_i(l_{ik}\delta_{jl} + l_{il}\delta_{jk}) + C_j(\delta_{il}l_{ij} + \delta_{il}l_{ij})\}/2 \\ C_i &= a_5/2 + a_7t_i \end{aligned} \quad (13)$$

マトリックス表現は次のようになる。

$$\{\dot{\epsilon}_\alpha^p\} = [C_{\alpha\beta}]\{\dot{\sigma}_\beta\}, [C_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} [C_{NN}] & [C_{NS}] \\ [C_{SN}] & [C_{SS}] \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} [C_{NN}] &= \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & 0 \\ 0 & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix}, [C_{NS}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & C_{15} & C_{16} \\ C_{24} & 0 & C_{26} \\ C_{34} & C_{35} & 0 \end{bmatrix} \\ [C_{SN}] &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & C_{34} & C_{24} \\ C_{35} & 0 & C_{15} \\ C_{26} & C_{16} & 0 \end{bmatrix}, [C_{SS}] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} C_{44} & C_{26} & C_{35} \\ C_{16} & C_{55} & C_{34} \\ C_{15} & C_{24} & C_{66} \end{bmatrix} \\ C_{44} &= \sqrt{2}\{C_{22} + C_{33}\}, \\ C_{55} &= \sqrt{2}\{C_{33} + C_{11}\} \\ C_{66} &= \sqrt{2}\{C_{11} + C_{22}\} \end{aligned}$$

ここで、 l_α ($\alpha=1,\dots,6$) は等長変換を用いた表現である。

一般的には、分割した全てのマトリックスに 0 でない要素が入りこむことになり、明らかに増分線形関係式とは異なったマトリックス構造となっている。この表現において、もし応力増分が修正応力の主軸方向に生じるとしたとき、 l_α ($\alpha=4,5,6$) は全て消えることになり、マトリックスの対角項のみが 0 でない値を持つことになる。これはマトリックスの形としては、増分線形モデルと同様の構造となるが、各項が応力増分の方向 l_1, l_2, l_3 で重みがつくことになり、塑性ひずみ速度の方向は応力速度の方向に依存することになる。

以上は、塑性ひずみ速度を単独の式で与える場合の増分非線形形式に関する議論である。増分非線形性を与えるモデルとしてはこれ以外に、要素の中にバネやすべりなど多くの方向性を有するメカニズムを考えるマルチメカニズムモデルがある。4.1 で議論する多重すべりモデルもマルチメカニズムの1種である。その数学的特徴は第3章で議論する。

3. 既往の増分非線形モデルの数学的構造

既往の構成モデルにおいて、増分非線形性を積極的に取り入れたモデルは、亜塑性 (Hypo-plasticity) モデルである^{12),13)}。ほぼ同様のモデルで CloE モデルとも呼ばれる¹⁴⁾。応力速度と変形速度の非線形な関係を表示定理から出発して、そのいくつかの項を取り上げることにより、増分非線形構成モデルを得ている。亜塑性モデルは有限変形を対象として定式化されている。しかし、本論文では、微小ひずみ理論の範囲内で議論しているので、応力速度の客観性の問題や、変形速度 D_{ij} とひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}$ の区別は発生しない。以下の議論では、応力速度を $\dot{\sigma}_{ij}$ と表現し、ひずみ速度を $\dot{\epsilon}_{ij}$ と表現する。

ひずみ速度を弾性、塑性と区別することなく、直接応力速度とひずみ速度を関係づけている。応力速度 $\dot{\sigma}_{ij}$ は、応力 σ_{ij} とひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}$ を2つの独立変数とする関数によって与えられる。

$$\dot{\sigma}_{ij} = f_{ij}(\sigma_{ij}, \dot{\epsilon}_{ij}) \quad (15)$$

この式に対する既約な表現は、式(5)と同様の式となる。Kolymbus and Wu(1993)¹²⁾は、具体的な構成モデルとして、例えば次式を詳細に検討している。

$$\dot{\sigma} = C_1(\sigma\dot{\epsilon} + \dot{\epsilon}\sigma) + C_2 \text{tr}(\sigma\dot{\epsilon})I + C_3 \sigma \sqrt{\text{tr}(\dot{\epsilon}^2)} + C_4 \frac{\sigma^2}{\text{tr}(\sigma)} \sqrt{\text{tr}(\dot{\epsilon}^2)} \quad (16)$$

この式より理解できることは、亜塑性モデルの増分非線形は、スカラー係数の中の不変量を通して増分非線形性を取り入れているということである。

この式をマトリックス表現で書き表すために、次の関係式を利用する。

$$\|\dot{\epsilon}\| = \sqrt{\text{tr}(\dot{\epsilon}^2)} = \sqrt{\dot{\epsilon}_k \dot{\epsilon}_k} = A_k \dot{\epsilon}_k; A_k = \|\dot{\epsilon}\| \dot{\epsilon}_k^{-1} \quad (17)$$

この表現を用いて、マトリックス表現を試みると、次式のようなマトリックスとなる。

$$\{\dot{\sigma}_\alpha\} = [E_{\alpha\beta}] \{\dot{\epsilon}_\beta\}, [E_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} [E_{NN}] & [E_{NS}] \\ [E_{SN}] & [E_{SS}] \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$[E_{NN}] = \begin{bmatrix} (2C_1 + C_2)\sigma_1 + E_1 A_1 & C_2 \sigma_2 + E_1 A_2 & C_2 \sigma_3 + E_1 A_3 \\ C_2 \sigma_1 + E_2 A_1 & (2C_1 + C_2)\sigma_2 + E_2 A_2 & C_2 \sigma_3 + E_2 A_3 \\ C_2 \sigma_1 + E_3 A_1 & C_2 \sigma_2 + E_3 A_2 & (2C_1 + C_2)\sigma_3 + E_3 A_3 \end{bmatrix}$$

$$[E_{SN}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, [E_{NS}] = \begin{bmatrix} E_1 A_4 & E_1 A_5 & E_1 A_6 \\ E_2 A_4 & E_2 A_5 & E_2 A_6 \\ E_3 A_4 & E_3 A_5 & E_3 A_6 \end{bmatrix}, [E_{SS}] = \begin{bmatrix} C_1(\sigma_2 + \sigma_3) & 0 & 0 \\ 0 & C_1(\sigma_3 + \sigma_1) & 0 \\ 0 & 0 & C_1(\sigma_1 + \sigma_2) \end{bmatrix}$$

ここに、 $E_\alpha = C_3 \sigma_\alpha + C_4 \sigma_\alpha^2$ ($\alpha = 1, 2, 3$) と置き換えている。 $C_4^* = C_4 / \text{tr}(\sigma)$ 、 σ_α は応力の主値、 A_α は等長変換後の量である。

増分線形モデルの場合(式(10))と比較して、 $[E_{NS}]$ の成分のみに0でない項が付け加えられたものとなっている。得られた構成マトリックスは、極めて非対称性の強いものとなっている。これは、係数のみに非線形性を取り入れた結果である。この亜塑性モデルは、内部構造の変化の影響を含むように、あるいは繰返し塑性挙動の表現が可能のように拡張されている¹³⁾。

移動硬化モデルの背応力の発展則として、次式で与えられる非線形硬化モデルが利用されることがある^{9,7)}

$$\dot{X}_{ij} = C \dot{\epsilon}_{ij}^p - \gamma X_{ij} \dot{\rho}; \dot{\rho} = \sqrt{\dot{\epsilon}_k^p \dot{\epsilon}_k^p} \quad (19)$$

この式は、背応力の変化速度と塑性ひずみ速度の関係式であり、等長変換によりマトリックス表現を行うと、亜塑性モデルと同様の数学的構造をもつ非線形モデルであることが理解できる。これまで実験事実の表現を目的として提案された非線形モデルのほとんどが非線形性を取り入れる方法として、一般式(5)のスカラー関数への導入を行っている。

多重すべりモデルは、個々のすべり面は古典的弾塑性モデルの範疇に属するものの、応力速度の方向により、個々のすべり面の活性度が異なるために、増分非線形をもたらしものになっている。多重すべりモデルの塑性ひずみ速度は次式で与えられる^{15,16)}。

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \sum_{\alpha=1}^N P_{ij}^{(\alpha)} \dot{\gamma}^{(\alpha)} = \sum_{\alpha=1}^N P_{ij}^{(\alpha)} \left(\frac{1}{H_p^{(\alpha)}} Q_k^{(\alpha)} \dot{\sigma}_k \right) \quad (20)$$

応力速度の方向が異なると、この比例係数 $\dot{\gamma}^{(\alpha)}$ の重みが異なってくるために、塑性ひずみ速度の大きさ、方向共に応力速度に影響されることになる。

多重すべりモデルによる増分非線形性の表現も、荷重基準に関するスカラー関数により与えられており、その意味では亜塑性モデルと相通ずるものがある。

4. 具体的な増分非線形モデルの定式化

具体的な増分非線形構成モデルとして、多重すべりモデルと、応力増分方向の影響を取り入れた弾塑性修正モデルについて定式化を行う。対象とする材料としては、摩擦特性、ダイレイタンシー特性を有する砂のような粒状体を考える。多重すべりモデルについては、既に定式化と基本的な検討を行っている^{3,15,16)}、簡潔な記述に留め、弾塑性修正モデルを中心に、定式化を記述する。

2つのモデルを取り上げた理由は次の通りである。多重すべりモデルが増分非線形挙動をかなりの精度で表現することはよく知られており、また実際に生じるであろう微視的メカニズムを反映したモデルであることから、様々な現象論的モデルの基本モデルと考えることができる。このため、まず多重すべりモデルによる計算結果を求め、その結果を参考にして、様々なモデルに増分非線形を取り入れる修正を行うことができるものと考えられる。本論文でも、弾塑性修正モデルの定式化に当たって、多重すべりモデルの計算結果を参考にしている。本論文では、2つのモデル共に簡単のために2次元変形問題を対象に定式化する。3次元問題への拡張は、重ね合わせの方法や演算は複雑になり容易ではないが、数学的な処理は同一である。

4.1 多重すべりモデルの定式化

図-1に示すように、応力変化を受けたときに供試体の内部では、様々な方向にすべりが生じ、その総和として塑性ひずみ速度がえられるものとする。各すべり面における硬化現象は相互に影響を及ぼすはずである(Nemat-Nasser)¹⁵⁾。しかし、そのような相互作用の定式化を行うだけの微視的メカニズムに対する情報はなく、最も単純な各すべり面が独立に硬化するとした定式化を考える¹⁶⁾。

法線ベクトル $\mathbf{n}$ で指定される一つの α すべり面を考える。すべり運動の方向(すなわち、 $\tau > 0$ の方向)に単位ベクトル $\mathbf{s}$ を取る。すべり面における運動として、法線方向にダイレイタンスーが発生する単純せん断変形を考える(図-2参照)。 $\tan \nu^{(\alpha)} = \dot{\gamma}^{(\alpha)} / \dot{\gamma}^{(\alpha)}$ と定義し、この変形に対して、基準座標系への座標変換を行い、その結果を α すべり面の $\mathbf{n}$ と $\mathbf{s}$ で整理すると

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{p(\alpha)} = P_{ij}^{(\alpha)} \dot{\gamma}^{(\alpha)}$$

$$P_{ij}^{(\alpha)} = \frac{1}{2} (n_i^{(\alpha)} s_j^{(\alpha)} + s_i^{(\alpha)} n_j^{(\alpha)} + 2 \tan \nu^{(\alpha)} n_i^{(\alpha)} n_j^{(\alpha)}) \quad (21)$$

のように表現することができる。

各すべり面のせん断ひずみ速度 $\dot{\gamma}^{(\alpha)}$ はその面に作用している応力比とその変化速度に支配されるものとする。各すべり面の負荷基準は、すべり面 α の活動を支配する負荷関数 $f^{(\alpha)}$ を考えて、次のように与える。

$$f^{(\alpha)} = 0, \quad Q_{ij}^{(\alpha)} \dot{\sigma}_{ij} > 0 \quad (22)$$

負荷関数として、もっとも単純な摩擦則を採用する。

$$f^{(\alpha)} = \tau^{(\alpha)} - \eta^{(\alpha)} \sigma^{(\alpha)} = 0 \quad (23)$$

$$\text{ここに、} Q_{ij}^{(\alpha)} = n_i^{(\alpha)} s_j^{(\alpha)} + \eta^{(\alpha)} n_i^{(\alpha)} n_j^{(\alpha)},$$

$$\tau^{(\alpha)} = \sigma_{ji} n_j^{(\alpha)} s_i^{(\alpha)} \quad \sigma^{(\alpha)} = -\sigma_{ji} n_j^{(\alpha)} n_i^{(\alpha)}, \quad \text{と表現される。}$$

応力比 $\eta^{(\alpha)}$ 、ダイレイタンスー角度 $\nu^{(\alpha)}$ は粒子間固有摩擦角： ϕ_μ を用いて、(24)、(25)式により与えられる。

$$\eta^{(\alpha)} = \tau^{(\alpha)} / \sigma^{(\alpha)} \quad (24)$$

$$\nu^{(\alpha)} = \phi^{(\alpha)} - \phi_\mu \quad (25)$$

各すべり面でのひずみ硬化特性は、双曲線関係を仮定し、全てのすべり面に共通に次式で与える。

$$\eta^{(\alpha)} = f(\dot{\gamma}^{(\alpha)}) = \frac{\dot{\gamma}^{(\alpha)}}{a + b \dot{\gamma}^{(\alpha)}} \quad (26)$$

各すべり面のせん断ひずみ速度は、式(22)、(26)より次式

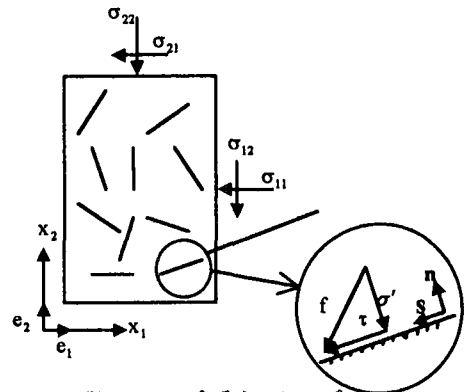


図-1： 多重すべりモデル

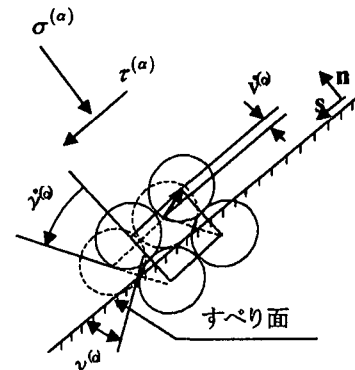


図-2： すべり面 α 上の運動

で与えられる。

$$\dot{\gamma}^{(\alpha)} = \frac{1}{h^{(\alpha)}} Q_{kl}^{(\alpha)} \dot{\sigma}_{kl} \quad (27)$$

ここに、 $h^{(\alpha)} = \sigma^{(\alpha)} \partial \eta^{(\alpha)} / \partial \dot{\gamma}^{(\alpha)}$ である。

等方弾性関係を2次元問題に対して $\epsilon_{ij}^o = C_{ijkl}^o \sigma_{kl}^o$ で与え、 $C_{ijkl}^o = (1/2G) \delta_{ik} \delta_{jl} - (K - G/4KG) \delta_{ij} \delta_{kl}$ とする。 G はせん断弾性定数、 K は体積弾性係数である。塑性ひずみ速度は、各すべり面の運動の単純和として与えられるものとする、ひずみ速度は次式で与えられることになる。

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \left[C_{ijkl}^o + \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{h^{(\alpha)}} P_{ij}^{(\alpha)} Q_{kl}^{(\alpha)} \right] \dot{\sigma}_{kl} \quad (28)$$

4.2 弾塑性修正モデルの定式化

単調載荷時、主応力軸回転を含まない繰返し載荷、主応力軸回転を含む場合の増分非線形挙動を表現するモデルへの拡張と順を追って定式化する。

(1) 単調載荷時の構成モデルの定式化

主応力軸が固定された繰返し載荷時の挙動は、塑性ポテンシャル、降伏関数を用いた従来の弾塑性構成モデルを用いることによって表現することができる。本論文では、非関連流動則に基づいた弾塑性モデル(Tobita and Yoshida)¹⁷⁾を用いて計算を行った。降伏曲面はDrucker-

Prager の降伏条件を適用し、摩擦特性を考慮して次のように表す。

$$f = \sigma_e - \kappa p' = 0 \quad (29)$$

ここに、 σ_e は $\sigma_e = \sqrt{(1/2)S_{ij}S_{ij}}$ と定義された相当応力、 $S_{ij} = \sigma_{ij} - (1/2)\text{tr}(\sigma)\delta_{ij}$ と定義される偏差応力である。 p' は $p' = -(1/2)\sigma_{kk}$ と定義された平均有効応力、 κ は硬化パラメータであり、応力比を表現する。

偏差塑性ひずみ速度： $\dot{e}_{ij}^p = \dot{\epsilon}_{ij}^p - (1/2)\dot{\epsilon}_{kk}^p\delta_{ij}$ は、降伏曲面の偏差成分の法線方向と同じ向きをもつとし、流れ則を利用して、次のように表される。

$$\dot{e}_{ij}^p = \Lambda n_{ij}^d \quad (30)$$

ここに、 n_{ij}^d は法線方向 $n_{ij} = (\partial f / \partial \sigma_{ij})$ の偏差成分である。

ダイレイタンシー速度を決定するために、ここでは、エネルギー散逸式に基づいて一般化された応力ダイレイタンシー式を取り入れる。応力ダイレイタンシー関係式は次のように定義される。

$$\dot{v}_d = \beta \Lambda ; \beta = \sqrt{2M} - \frac{S_{pq}}{p'} n_{pq}^d \quad (31)$$

ここに、 M は材料定数である。また、相当塑性ひずみ速度は $\dot{\gamma}^p = \sqrt{2\dot{e}_{ij}^p\dot{e}_{ij}^p} = \Lambda\sqrt{2n_{ij}^dn_{ij}^d} = \sqrt{2}\Lambda$ より定められる。 $\dot{v}_d = -\dot{\epsilon}_{kk}^p$ であり、圧縮を正としている。この応力ダイレイタンシー関係を用いた定式化は、塑性ポテンシャルとして、 $g = \sigma_e + \beta p' = C$ を採用したことに等しい。

硬化パラメータ κ と $\dot{\gamma}^p$ のひずみ硬化関係は、実験結果を良好に近似できる双曲線を用いる。

$$\kappa = \frac{\gamma^p}{A + B\gamma^p} ; \gamma^p = \int \dot{\gamma}^p dt \quad (32)$$

ここに、 A と B は材料定数である。 A は初期の塑性係数の逆数、 B は破壊時応力比の逆数として与えられる。適合条件 $\dot{f} = 0$ より比例係数 Λ を求めると次式を得る。

$$\Lambda = \frac{n_{kl}\dot{\sigma}_{kl}}{H_p} ; H_p = \sqrt{2}p' \frac{\partial \kappa}{\partial \gamma^p} \quad (33)$$

H_p で定義される量を塑性係数と呼ぶ。

最終的な応力速度ひずみ速度の関係は以下になる。

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}\dot{\epsilon}_{kl} : E_{ijkl} = E_{ijkl}^e - \frac{E_{ijmn}^e m_{mn} n_{pq} E_{pqkl}^e}{H_p + n_{mn} E_{mnst}^e m_{st}} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} E_{ijkl}^e &= 2G\delta_{ik}\delta_{jl} + (K - G)\delta_{ij}\delta_{kl} \\ m_{ij} &= (S_{ij}/2\sigma_e) - (1/2)\beta\delta_{ij} \\ n_{kl} &= (S_{kl}/2\sigma_e) + (1/2)\kappa\delta_{kl} \end{aligned} \quad (35)$$

この単調载荷時に定義される降伏関数式(29)で、応力空間に定義される曲面は、繰返し塑性挙動の定式化では、正規降伏曲面と呼ぶことにする。繰返し塑性を定式化する上での境界曲面としての役割を果たすことになる。

(2) 主応力軸回転がない場合の繰返し载荷時の構成モデルの定式化

繰返し载荷時の挙動を表現するために、応力空間上の特徴的な応力点：応力反転点、現在の応力点、共役応力点を用いる。 α_{ij} 、 η_{ij} 、 $\bar{\eta}_{ij}$ はそれぞれ3つの応力点を示すのに用いられる。共役応力点は、応力反転点を始点とし、現在の応力点を通る線分の延長線が正規降伏曲面と交わる点として定義する。

$$\alpha_{ij} = \frac{S_{ij}^d}{p'}, \eta_{ij} = \frac{S_{ij}}{p'}, \bar{\eta}_{ij} = \frac{\bar{S}_{ij}}{p'} \quad (36)$$

ここに、 S_{ij}^d は応力反転点の偏差応力、 S_{ij} は現在の偏差応力、 $\bar{S}_{ij}$ は共役応力である。

応力空間の3つの応力点を使って、2つの距離を定義する。

$$\begin{aligned} \rho &= |\eta_{ij} - \alpha_{ij}| = \sqrt{(\eta_{ij} - \alpha_{ij})(\eta_{ij} - \alpha_{ij})} \\ \bar{\rho} &= |\bar{\eta}_{ij} - \alpha_{ij}| = \sqrt{(\bar{\eta}_{ij} - \alpha_{ij})(\bar{\eta}_{ij} - \alpha_{ij})} \end{aligned} \quad (37)$$

繰返し载荷における現在の応力点の塑性係数は、距離を表す式(37)を取り入れることによって与えられる。ここで、多くの研究で使われている次の関数を用いる。

$$H_p = H_R - (H_R - H_p^*) \left(\frac{\rho}{\bar{\rho}} \right)^m \quad (38)$$

ここで、 m は実験により決められる材料定数である、 H_p^* は、正規降伏曲面内（履歴の中で最大の応力比となる）で繰返し载荷が行われている限り変わることのない正規降伏曲面における塑性係数である。 H_R は繰返し载荷により累積した塑性ひずみの関数であり、次のように定義される。

$$H_R = H_{R0} \exp(a\xi^p) ; a > 0 \quad (39)$$

ここに、 $\xi^p = \int (2\dot{e}_{ij}^p\dot{e}_{ij}^p)^{(1/2)} dt$ 、 H_{R0} 、 a は材料定数である。

流れ則は、式(30)を用いるが、法線方向は共役点における法線方向を利用する点だけが異なっている。また、ダイレイタンシーの表現は、式(31)を利用する。応力除荷時に式(31)₂の右辺第2項が負の値を持つために、大きな負のダイレイタンシーを表現することになる。

ここまでの定式化では、応力空間の距離の決定：式(37)や共役点の決定に応力増分の影響はなく、全て状態量だ

けで決定されている。このため、このモデルでは増分非線形挙動を表現することはできない。

(3) 速度方向依存性を表現する弾塑性モデルへの修正
多次元応力状態での主応力軸回転が生じた場合の挙動を表現するために、(2)で定式化した弾塑性モデルを修正する。法線方向(n_y)が応力増分方向($l_y = \dot{\sigma}_y / \|\dot{\sigma}_y\|$)に引きずられる様に、塑性ひずみ速度の方向と負荷条件を修正する。

まず、次のノルム1となるテンソルを塑性ポテンシャル、負荷関数の法線テンソルに対して定義する。

$$\mu_y = \frac{m_y}{\|m_y\|}, \quad v_y = \frac{n_y}{\|n_y\|} \quad (40)$$

ここに、 $m_y = (\partial g / \partial \sigma_y)$ 、 $n_y = (\partial f / \partial \sigma_y)$ である。これらの偏差成分(μ_y^d および v_y^d)を用いて定式化をする。

法線方向と応力増分方向テンソルの線形和を定義する

$$n_y^{*d} = (1 - \bar{\beta})l_y^{*d} + \bar{\beta}v_y^{*d} \quad (41)$$

$$\bar{\beta} = (x(\theta))^\alpha, \quad \alpha = \alpha_0 \ln(\kappa / \kappa_f)$$

$$x = (\sin \theta / 2); 0 \leq \theta \leq \pi/2, x = 1 - (\sin \theta / 2); \pi/2 \leq \theta \leq \pi \quad (42)$$

ここに、 l_y^{*d} と v_y^{*d} はそれぞれ l_y および v_y の偏差成分を正規化した量であり、 θ は現在の応力状態からの応力増分方向のずれ角： $\cos \theta = l_y^{*d} v_y^{*d}$ で定義される。 κ は現在の応力比、 κ_f は破壊時の応力比である。 $\bar{\beta}$ は破壊に近くなるほど、負荷曲面の法線方向の影響が大きくなることを表現するために導入したパラメータである。

主応力軸の回転がない場合に(2)で展開したモデルに帰着させるために、次の式で定義される方向テンソルにより塑性ひずみ速度の方向を決定する。

$$v_y^{*d} = \frac{\|v_y^{*d}\|}{\|n_y^{*d}\|} n_y^{*d}; \quad n_y^{*d} = \frac{n_y^{*d}}{\|n_y^{*d}\|} \quad (43)$$

塑性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_y^p$ のうち、偏差成分については、(43)式で定義される方向に発生するものとして、次式で与える。

$$\dot{\epsilon}_y^p = \Lambda^* v_y^{*d} \quad (44)$$

ここに、 $\Lambda^* = (1/H^*)(v_y^{*d} \dot{\sigma}_y)$ 、 H^* は修正した塑性係数である。 Λ^* の定義に、拘束圧依存性の影響も加味して次式で定義される v_y^* を導入していることより、負荷条件も修正していることになる。

$$v_y^* = v_y^{*d} + (1/2)\kappa \delta_y \quad (45)$$

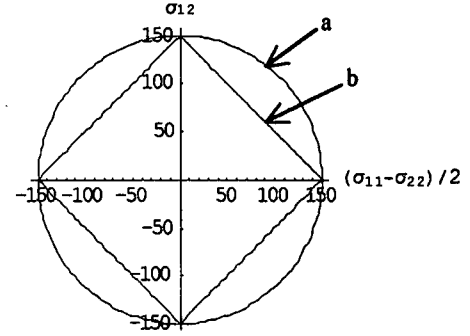


図-3 モデルの検証に用いた応力経路

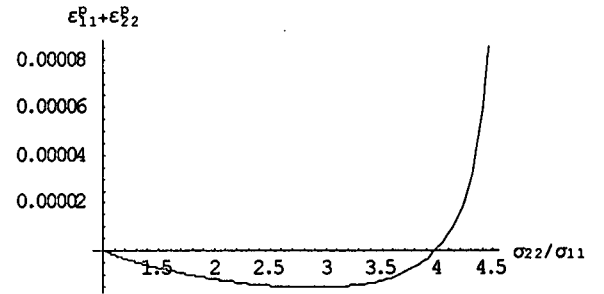


図-4 応力比-ダイレイタンシー関係：多重すべり

エネルギー散逸よりダイレイタンシー速度を導く、ダイレイタンシー速度は次のようになる。

$$\dot{\nu}_d = \beta_d \Lambda^*; \quad \beta_d = \sqrt{2M} \frac{\|v_y^{*d}\|}{p'} v_y^{*d} \quad (46)$$

ここに、 β_d はダイレイタンシー係数である。式(46)は、応力と応力増分それぞれの方向のずれが大きいくほど、ダイレイタンシーは圧縮傾向が大きくなることを表現している。塑性ひずみ速度は、式(40),(46)より次のように求まる。

$$\dot{\epsilon}_y^p = \Lambda^* \mu_y^*; \quad \mu_y^* = v_y^{*d} - \frac{1}{2} \beta_d \delta_y \quad (47)$$

主応力軸回転のみが生じる応力経路(図-3の経路a)における塑性係数 H_{p*} を、現在の状態からの応力増分方向のずれ角 θ を用いて式(48)のように定義する。また、応力経路が内側を通る場合(図-3の経路b)の塑性係数 H_p を式(49)に定義する。

$$H_{p*} = H_{p0} + A \theta^{m1} \quad (48)$$

$$H_p = H_{p*} + (H_{p0} - H_{p*}) \left(\frac{\rho}{\bar{\rho}} \right)^{m2} \quad (49)$$

ここに、 H_{p0} は降伏曲面上の塑性係数、 ρ と $\bar{\rho}$ は応力空間内の距離(式(37))、 A と $m1$ と $m2$ は係数である。式(48)、(49)は塑性係数 H_p が応力増分方向に影響を受け

る定式化であることを示している。

以上まとめると、最終的な応力速度・ひずみ速度の関係は以下ようになる。

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}^{ep} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (50)$$

$$E_{ijkl}^{ep} = E_{ijkl}^e - E_{ijkl}^p \quad (51)$$

$$E_{ijkl}^p = \frac{E_{ijkl}^e \mu_{st}^* \dot{v}_{uv}^* E_{uwkl}^e}{H^* + \dot{v}_{mn}^* E_{mnpq}^e \mu_{pq}^*} \quad (52)$$

見かけ上、古典的な弾塑性モデルと同様の数学的構造を示す結果となるが、式(52)は強い増分非線形性をもつ。増分非線形性は、3つのステップで取り入れられている

1) 偏差応力空間において、法線テンソルに応力増分の影響を取り入れ、偏差塑性ひずみ速度の方向、負荷基準両者に増分非線形性が入る

2) ダイレイタンスー係数：式(46)に応力増分の影響が入る

3) 塑性係数の決定：式(48)，(49)に応力増分の影響が入る。

このように、かなり複雑に増分非線形性の影響が取り込まれている。このため、マトリックスによる表現はかなり複雑なものとなる。その結果は、付録-2として収録する。

5. 2つのモデルの検証

2つのモデルを主応力軸が回転する経路に対する適用性を中心に検討する。定量的に満足できる段階には至っていないので、塑性ひずみ速度の方向などの基本的性質について定性的観点から計算結果を検討する。

5.1 多重すべりモデルを用いた場合の計算結果

本研究の計算では、弾性変形の大きさは無視し、すべり面での応力方向が反転した場合には、塑性ひずみは発生しないものとした。計算結果を以下に示す。パラメータは次の通りである。1/a=304000, 1/b=0.84, p'=300(kPa), $\phi_\mu=26^\circ$ すべり面は等しい角度間隔で、対称性を利用して π を36等分して、その中央に与えた。N=36としている。

(1) 主応力軸が固定された場合の挙動

図-4に示すように、応力比-ダイレイタンスー関係は、応力比の増加に伴い、まず体積の圧縮が起こり、その後膨張する挙動が表現されている。

(2) 主応力軸回転時の挙動

図-3に示すようなa, bの応力経路で、主応力軸を回転させた時の挙動を図-5, 6に示す。aの経路は主応力 $\sigma_I = 450$ (kPa), $\sigma_{II} = 150$ (kPa)と一定値に保ち、

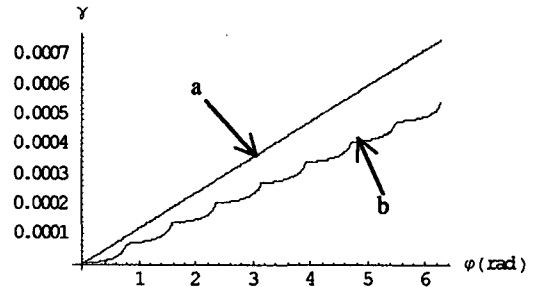


図-5 主応力軸回転時のせん断ひずみ：多重すべり

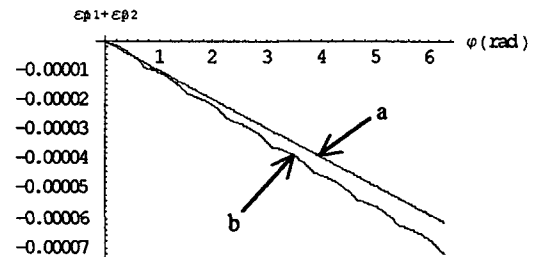


図-6 主応力軸回転時の体積ひずみ：多重すべり

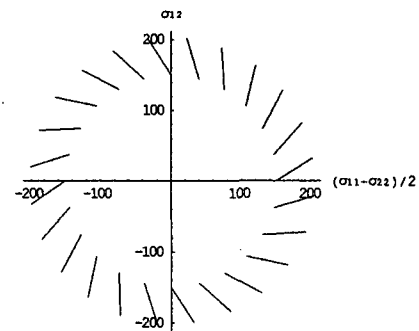


図-7 塑性ひずみ増分の方向：多重すべり

主応力軸方向のみを回転させた。一方、bの経路はaの経路の内側を通るような直線的な応力経路で主応力軸方向を回転させた。それぞれ、左回りの応力経路について計算を行い、せん断ひずみおよび塑性体積ひずみは、主応力軸の回転角度により整理した。

せん断ひずみ、塑性体積ひずみどちらも、主応力軸回転に伴い単調に累積する様子が表現されている。また、累積塑性体積ひずみはaの経路よりもbの経路の方が小さくなっている。図-7は経路aに対して回転角15°ごとの瞬間的な塑性ひずみ増分ベクトルの方向を表している。ひずみ増分ベクトルが、応力ベクトルから応力増分ベクトルの方向にずれる様子が表現されている。

5.2 弾塑性修正モデルを用いた場合の計算結果

図-3に示す応力経路で主応力軸を左回りの応力経路で回転させた時の、排水時と非排水時の計算を行った。弾塑性修正モデルを用いて、排水時は単調載荷を応力比 $\kappa = 0.45$ まで、非排水時は応力比 $\kappa = 0.2$ まで載荷した。計算に用いたパラメータは次の通りである。破壊時の応

力比 $\kappa_f = 0.73$, $A=0.0002$, $B=1/\kappa_f$, 体積弾性係数 $K=300000(\text{kPa})$, $G=150000(\text{kPa})$, 初期有効拘束圧は $p'=100(\text{kPa})$ とした。

(1) 排水時の挙動

応力経路 a , b ともに、累積せん断ひずみを、主応力軸の回転角度により整理した。図-8に示すせん断ひずみは、主応力軸の回転に伴い、多重すべりモデルを用いた時と同様にせん断ひずみを累積している。

主応力軸の回転が 10° ごとの塑性ひずみ増分ベクトルは、図-9に示すように、応力増分方向にずれる結果が表現されている。また、応力比が大きい時、塑性ひずみ増分ベクトルは降伏曲面の垂直方向に近づいている。これは、応力比が破壊に近づく、塑性ひずみ増分は負荷曲面の法線方向へのシフトが起こるという現象¹²⁾を表現するものである。

(2) 非排水時の挙動

応力比 $\kappa = 0.2$ まで載荷した後、応力経路 a で主応力軸を回転させた。この時の非排水時の挙動を計算し排水時の挙動と比較した。排水・非排水におけるせん断ひずみの累積の様子を図-10に示す。非排水時は主応力軸の回転に伴い、常に単調載荷時の負荷条件が満足され続けるという意味で正規載荷されることになる。すなわち、排水時よりも小さな塑性係数で計算されるため、排水時と比較して大きなせん断ひずみが生じることになる。また、塑性ひずみ増分ベクトルは、図-11に示すように、主応力軸が回転するにつれ応力比が増大するため、降伏曲面の法線方向に向いている。

5.3 2つのモデルの計算結果に関する考察

砂の変形挙動における増分非線形性に着目し、それを表現するモデルとして、多重すべりモデルと弾塑性修正モデルを用いて計算を行った。それぞれのモデルでの挙動は、主応力軸回転時の実験結果と同様の傾向を示している。まとめると次のようになる。

- 1) 主応力軸回転時の累積塑性せん断ひずみと累積ダイレイタンスの傾向を表現できる。
- 2) 主応力軸回転時の塑性ひずみ増分方向を精度良く表現できる
- 3) 主応力軸の回転を含むさまざまな応力変化における変形挙動の予測に適用できる可能性がある

今回の計算では弾性テンソルの平均有効応力変化や塑性ひずみの発達に伴う変化を無視しており、せん断弾性係数も一定で計算している。実際の挙動では載荷条件によりこれらのパラメータも変化するが、その量的変化は小さい。検証した二つの構成モデルは、実験結果を定性的観点からは十分に表現できていると考える。

今回議論したモデルは、基本的定式化は異なるものの、数学的簡便性および表現できる挙動の多様性という両者

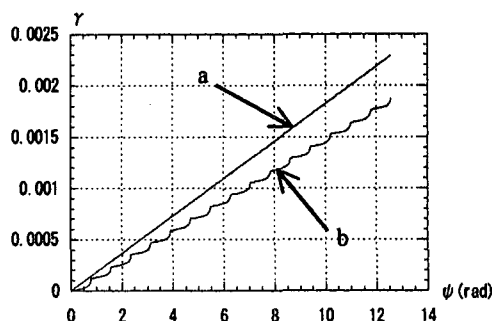


図-8 せん断ひずみの累積 (修正モデル)

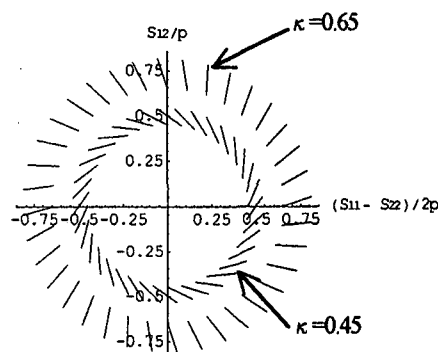


図-9 塑性ひずみ増分方向 (修正モデル)

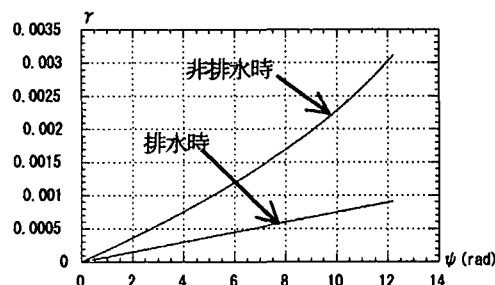


図-10 せん断ひずみの増加 (修正モデル)

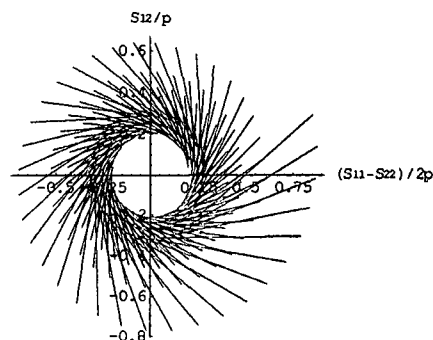


図-11 塑性ひずみ増分方向 (非排水: 修正モデル)
の観点から、数値解析への構成モデルとしての可能性は十分あると考える。より詳細な挙動の表現のためには、主応力軸回転にともない硬化することにより塑性ひずみが生じにくくなる現象を考慮した定式化、あるいは異方性を取り入れた定式化が必要である。これらの課題は比較的容易に、ここで検証した構成モデルに取り込める。

6. 結論

表示定理を利用し、等長変換を用いたマトリックス形式で表現し、増分非線形性の数学的表現に関する基本的な議論を行った。さらに、増分非線形モデルとして、古典的弾塑性モデルの延長線上にあると考えられる多重すべりモデルと弾塑性修正モデルを定式化し、その挙動を定性的に検証した。主な結論は次の通りである。

- 1) 速度型構成モデルにおける増分非線形挙動は様々な関係式に現れるが、塑性ひずみ速度の定式化を代表として議論した。増分非線形モデルとなるためには、塑性ひずみ速度と応力速度の関係を表す構成マトリックスに応力速度の方向の影響が必ず入ることになる。
- 2) 増分線形モデルのマトリックス表現を基本として、様々な増分非線形の表現を試みた。従来の増分非線形の導入は、生成元の係数であるスカラー関数を介して行われることが多い。
- 3) 多数のすべり面を考える多重すべりモデルを考え、すべり面の運動はダイレイタンシーを伴う単純せん断とした。各すべり面に独立な負荷関数を与え負荷基準を設定した。応力増分の方向により各すべり面のせん断ひずみ速度の発生が異なるために、全体の塑性ひずみ速度に対する各すべり面の寄与（重み）が異なることにより、増分非線形挙動を表現することになる。
- 4) 弾塑性モデルの法線流れ則に修正を加え、負荷基準および偏差塑性ひずみ速度の方向が、負荷関数の法線方向と応力速度の方向の線形和として定義する弾塑性修正モデルを構築した。
- 5) 2つの典型的な主応力軸回転経路に適用し、塑性ひずみ速度の方向、ダイレイタンシーの傾向など、定性的には実験事実と整合性を有し、満足すべき結果を得た。定式化したモデルに異方性の影響や様々な硬化特性を取り入れることは今後の課題であるが、大きな困難ではない。

物性挙動を精度良く表現するという観点からは、増分非線形モデルは必然的なものと思われる。また、増分非線形挙動の導入なしでは、合理的に説明できない現象がある。しかし、数値解析への応用という観点からは、新しい解析アルゴリズムの開発などの困難な問題が発生し、今後の研究の大きな課題となる。

付録－1：等長変換を満足するマトリックス表現

指標表示による構成関係式をマトリックスで表現することは、数値解析の分野で頻繁に利用されている。ここでは便宜的な方法ではなく、厳密な数学的議論を行うために、徳岡(1980)⁹⁾にならって、等長性を満足する変換を、応力速度－ひずみ速度関係式を例として、考える。ここでは、応力速度、ひずみ速度の等長性、さらにエネルギーに対する3つの等値性の条件を満足することを要求する。応力速度とひずみ速度はそれぞれ指標に対する対称

性を満足しているものとする。

$$\dot{\sigma}_i \dot{\sigma}_j = \dot{\sigma}_j \dot{\sigma}_i, \dot{\epsilon}_i \dot{\epsilon}_j = \dot{\epsilon}_j \dot{\epsilon}_i, \dot{\sigma}_i \dot{\epsilon}_j = \dot{\epsilon}_j \dot{\sigma}_i \\ (i, j = 1, 2, 3; \alpha = 1, 2, \dots, 6)$$

通常の変換では、3番目のエネルギーに関する等長性だけが満足されている。これらの等長性は、次の約束により満足することができる。

- 1) 応力速度、ひずみ速度を、6個の独立なベクトルと考える。テンソル指標を、11⇒1, 22⇒2, 33⇒3, 23⇒4, 31⇒5, 12⇒6 と変換する。それぞれのノルムにおける等長性を満足するために、4,5,6の添え字を有するものに対しては $\sqrt{2}$ を掛けた変換を行う。例えば、 $\dot{\sigma}_4 = \sqrt{2}\dot{\sigma}_{23}$ の様に定義する。このような定義により、3つの関係の等長性は満足される。
- 2) 4階のテンソルである構成テンソルをマトリックスに表現するためには次の約束を利用する（実際に2つの表現を書き下して、比較することにより、このような約束が得られる。）：4,5,6の指標がない場合は、単に添え字の変換のみを行い、4,5,6が一つだけ含まれる場合には、 $\sqrt{2}$ を掛け、2つ出てきた場合には係数2を掛ける。例えば、次のような関係式となる。

$$H_{12} = H_{1122}, H_{23} = \sqrt{2}H_{2231}, H_{45} = 2H_{2331}$$

以上の約束により、等長変換を満足する指標表示とマトリックス表現の関係が得られる。

付録－2：弾塑性修正モデルのマトリックス表現

古典的流れ則を有するモデルに応力増分の方向の影響を取り入れて、増分非線形モデルとした。塑性ひずみ速度は、次式で与えられる。

$$\dot{\epsilon}_i^p = \frac{1}{H_p} \mu_{ij}^* \dot{v}_j^* \dot{\sigma}_i = \Lambda \mu_{ij}^*$$

ここに、 μ_{ij}^* 、 v_j^* は、形式的に次のように表現できる。

$$\mu_{ij}^* = a_1 \delta_{ij} + a_2 S_{ij} + a_3 S_{ik} S_{kj} + a_1^* l_{ij} \\ v_j^* = b_1 \delta_{ij} + b_2 S_{ij} + b_3 S_{kp} S_{pj} + b_1^* l_{ij}$$

但し、 a_1 については、ダイレイタンシー係数に応力速度の方向の影響が入ることにより、状態以外に、 $\sigma_{kl} l_{kl}$ の内積が不変量として入ることになる。それ以外の係数は、状態の不変量（応力だけである）で決定されるスカラー関数である。また塑性係数 H_p についても応力速度の方向の影響が入っており、方向に応じて塑性係数の値が異なっている。比例係数 Λ に相当する部分を書き下して、生成元ごとに整理すると、次式が得られる。

$$H_p \dot{\epsilon}^p = \left[h_1 \text{tr}(\dot{\sigma}) + h_2 \text{tr}(S\dot{\sigma}) + h_3 \text{tr}(S^2 \dot{\sigma}) + h_4^* \text{tr}(l\dot{\sigma}) \right] I \\ + \left[h_4 \text{tr}(\dot{\sigma}) + h_5 \text{tr}(S\dot{\sigma}) + h_6 \text{tr}(S^2 \dot{\sigma}) + h_7^* \text{tr}(l\dot{\sigma}) \right] S \\ + \left[h_7 \text{tr}(\dot{\sigma}) + h_8 \text{tr}(S\dot{\sigma}) + h_9 \text{tr}(S^2 \dot{\sigma}) + h_3^* \text{tr}(l\dot{\sigma}) \right] S^2 \\ + \left[h_4^* \text{tr}(\dot{\sigma}) + h_5^* \text{tr}(S\dot{\sigma}) + h_6^* \text{tr}(S^2 \dot{\sigma}) + h_7^* \text{tr}(l\dot{\sigma}) \right] l$$

これらの式を導くに当たっては、増分非線形性が偏差応力空間において導入されていることにより、応力ではなく偏差応力を用いて表現している。この式のうち、 $h_\alpha; \alpha=1,2,\dots,9$ は、増分線形モデルの $[C_{NN}]$ に相当する項である。係数に*印のついた項が増分非線形性と関係している。この式に対して、応力主軸方向を座標系に取り、応力増分方向を含む全てのテンソル量に等長変換を用いて、次の表現が得られる：

$$\{\dot{\epsilon}_\alpha^p\} = \frac{1}{H_p} [C_{\alpha\beta}] \{\dot{\sigma}_\beta\}; [C_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} [C_{NN}] & [C_{NS}] \\ [C_{SN}] & [C_{SS}] \end{bmatrix}$$

共軸項 ($h_\alpha; \alpha=1,2,\dots,9$ により表現される) は $[C_{NN}]$ にのみ現れる。 $[C_{NN}] = [C_{NN}]^C + [C_{NN}]^{NC}$ と表現して、 $[C_{NN}]^C$, $[C_{NN}]^{NC}$ は次のように表現される。

$$[C_{NN}]^C : C_{\alpha\beta} = h_1 + h_2 S_\beta + h_3 S_\beta^2 + S_\alpha (h_4 + h_5 S_\beta + h_6 S_\beta^2) \\ + S_\beta (h_7 + h_8 S_\alpha + h_9 S_\alpha^2); 1 \leq \alpha \leq 3, 1 \leq \beta \leq 3$$

$$[C_{NN}]^{NC} : C_{\alpha\beta} = (h_1^* + h_2^* S_\alpha + h_3^* S_\alpha^2) l_\beta + l_\alpha (h_4^* + h_5^* S_\beta + h_6^* S_\beta^2) \\ + h_7^* l_\alpha l_\beta; 1 \leq \alpha \leq 3, 1 \leq \beta \leq 3$$

$$[C_{NS}] : C_{\alpha\beta} = (h_1^* + h_2^* S_\alpha + h_3^* S_\alpha^2 + h_7^* l_\alpha) l_\beta; \\ 1 \leq \alpha \leq 3, 4 \leq \beta \leq 6$$

$$[C_{SN}] : C_{\alpha\beta} = l_\alpha (h_4^* + h_5^* S_\beta + h_6^* S_\beta^2 + h_7^* l_\beta); \\ 4 \leq \alpha \leq 6, 1 \leq \beta \leq 3$$

$$[C_{SS}] : C_{\alpha\beta} = h_7^* l_\alpha l_\beta; 4 \leq \alpha \leq 6, 4 \leq \beta \leq 6$$

負荷基準にのみ増分非線形を取り入れた場合には、*付き係数のうち、1,2,3,7 が0となり、 $[C_{NS}]$, $[C_{SS}]$ が0となり、塑性ひずみ速度方向にのみ増分非線形を取り入れた場合には、4,5,6,7 が0となり、 $[C_{SN}]$, $[C_{SS}]$ が0となることは容易に確認できる。

参考文献

- 1) Gutierrez, M., Ishihara, K. and Towhata, L.: Flow theory for sand during rotation of principal stress direction, *Soils and Foundations*, Vol.31(4), pp.121-132, 1991
- 2) Miura, K., S. Miura, and S. Toki: Deformation behavior of anisotropic dense sand under principal stress axes rotation, *Soils and Foundations*, Vol.26(1), pp.36-52, 1986

- 3) 飛田善雄, 吉田望: 砂の様な粒状体の増分非線形モデル: 重要性と定式化, 構造工学論文集, Vol. 39A, pp.387-398, 1993
- 4) Tobita, Y.: Fabric tensors in constitutive equations for granular materials, *Soils and Foundations*, Vol.29, No.4, pp.91-104, 1989
- 5) Tobita, Y. and Yanagisawa, E.: Modified stress tensors for anisotropic behavior of granular materials, *Soils and Foundations*, Vol.32(1), pp.85-99, 1992
- 6) Lemaitre, J. and Chaboche, J.L.: *Mechanics of solid materials*, Cambridge Univ. Press, 1990
- 7) Oka, F., Yashima, A., Shibata, T., Kato, M. and Uzuoka, R.: FEM-FDM coupled liquefaction analysis of a porous soil using an elasto-plastic model, *Applied Scientific Research*, Vol.52, pp.209-245, 1994
- 8) Boehler, J.P.(ed.): *Application of tensor functions in solid mechanics*, Springer Verlag, 1987
- 9) 徳岡(1980)、続有理連続体力学入門、機械の研究、Vol.32 pp.1211-1216 pp.1328-1334, 1980
- 10) Rudnicki, J.W. and J.R. Rice: Conditions for the localization of deformation in pressure sensitive dilatant material, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 12, pp. 371-394, 1975
- 11) Yatomi, C., Yashima, A., Izuka, A. and Sano, I.: General theory of shear bands formation by a non-coaxial Cam clay model, *Soils and Foundations*, Vol.27, No.3, pp.71-87, 1987
- 12) Kolymbas, D. and Wu, W.: Introduction to hypoplasticity, in *Modern Approaches to Plasticity* (ed, Kolymbas), Elsevier Science Publishers, pp.213-223, 1993
- 13) Bauer, E. and Wu, W.: A hypoplastic model for granular soils under cyclic loading, in *Modern Approaches to Plasticity* (ed, Kolymbas), Elsevier Science Publishers, pp.247-258, 1993
- 14) Desrues, J. and Chambon, R.: A new rate type constitutive model for geomaterials: CloE, in *Modern Approaches to Plasticity* (ed, Kolymbas), Elsevier Science Publishers, pp.309-324, 1993
- 15) Nemat-Nasser, S.: On finite plastic flow of crystalline solids and geomaterials, *J. Appl. Mech.*, Vol. 50, pp.1114-26, 1983
- 16) 飛田善雄, 加藤高之, 柳沢栄司: 砂のような粒状体の構成則としてのすべりモデルの定式化と適用性, 土木学会論文集, 第370号, pp.57-66, 1986
- 17) Tobita, Y. and Yoshida, N.: An isotropic bounding surface model for cyclic behavior of sand; Limitation and modification, *Proc. of Int. Conf. on Prefailure behavior of sands*, Sapporo, Balkema, pp.457-462, 1994

(2002年4月19日受付)