

## 土質材料における変形の多価性とせん断帯の形態

## Multiplicity of Deformation and Shear Band Mode in Soil

守 時 一<sup>1</sup>・及 川 洋<sup>2</sup>・荻 野 俊 寛<sup>3</sup>

Hitoshi MORITOKI, Hiroshi OIKAWA and Toshihiro OGINO

<sup>1</sup>非会員 工博 秋田大学名誉教授 自宅 (〒010-0442 秋田県南秋田郡大湯村東三丁目4-15)<sup>2</sup>正会員 工博 秋田大学教授 土木環境工学科 (〒010-8502 秋田市手形学園町1-1)<sup>3</sup>正会員 工修 秋田大学助手 土木環境工学科 (〒010-8502 秋田市手形学園町1-1)

The volumetric change accompanying with plastic shear deformation causes the dependency of  $q$  on  $p$  where  $p$  and  $q$  respectively represent the hydrostatic pressure and equivalent deviatoric stress in yielding. Their dependency is called yield curve or yield function. For predicting yield curve the following assumptions are set up. Yield curves expand similarly in shape with plastic deformation and yield function plays as a plastic potential. Basic yield curve is determined which gives a basic shape in similar expansion of yield curve. Using experimental results obtained under plane strain compression tests, we predict the basic yield curves. The basic yield curve has a limit over which yield curve cannot expand in  $(p, q)$  space. We call it expanding limit. First, it is examined whether plastic instability arises or not in plane strain compression tests, but its occurrence is denied consequently. Next, we show that multiple deformation rate can exist at the expanding limit. Hence, the onset of bifurcation is predicted at the expanding limit and the mode of shear plane is determined based on the concept of a characteristic plane. These predictions agree reasonably well with reported experimental observations.

**Key Words:** soil, multiplicity, shear band inclination, plastic instability, critical state, plane strain compression, yield curve, hardening characteristics

## 1. 緒 言

土質材料は塑性変形の過程で体積変化を伴い、圧縮応力場において変形初期に圧縮特性を示していても限界状態に近づくとも膨張特性に転ずることが知られている。とくに、膨張特性を示す過程においては必ずみ軟化の概念がこれまで組み込まれてきた。これは、硬化特性を圧縮体積ひずみのみの関数として表現することを土質塑性力学では公理的に仮定していたことに起因している。しかし、この塑性変形下における軟化は弾性除荷との間の区別が概念的に明確ではなく、またその判定規準そのものにも疑義があった。そこで、このような理論構造上懸念された多くの不具合を解消することを目的に、筆者の一人は硬化因子として圧縮体積ひずみ速度に相当偏差ひずみ速度を加味することを提案した<sup>1)</sup>。

このような理論体系に基づき、観察された変形挙動から降伏曲線（相当偏差応力  $q$  の静水圧応力  $p$  への依存性を表す関係）と硬化特性を同定する手法<sup>2)</sup>を、また逆に降伏曲線と硬化特性が与えられたとき設定された変形拘束下における変形挙動を予見する方法<sup>3)</sup>を提案した。

等方圧密状態に近い塑性変形下では破壊を招くことは稀であるが、この圧密状態から隔たった塑性負荷の下ではある変形段階で亀裂が発生し、変形の限界を迎える。土質材料が構造物として使用されるとき、このような変形限界は災害の発生とも関連し、これを予測する研究が実験、解析両面からこれまで精力的になされてきた。

亀裂発生を予測する解析的手法の一つに多価解発生<sup>4)</sup>の規準に準拠する方法がある。塑性不安定はその代表的なものであるが、歴史的にはこれは金属塑性におけるくびれ問題に端を発している。金属材料で作られた薄板の引張り試験では最大荷重時に拡散くびれが大域的に発生し、それがさらに進展すると塑性変形域が、板表面から見ると、線状に縮退した局所くびれが現れる。この変形領域ではその後塑性変形の集中が急速に進み、近い将来亀裂へと発展する。これらのくびれ現象は解の多価問題<sup>4)</sup>、変形速度場の不連続問題<sup>5)</sup>として考察されたが、亀裂予測に関する研究の主流は局所くびれに関するものであり、せん断帯解析はこの流れに沿っている<sup>6)</sup>。せん断帯解析では土質材料を対象とした解析も行われている<sup>7)</sup>。

これらのせん断帯解析では不連続面を境にその両側で

異なった解の存在できる条件が模索された。不連続面で隔てられた領域で発生する多価解は、解は異なっている、同一の境界条件の下になければならない。しかし、提案された解析手法ではこの制約が一部無視されており、これを配慮すると多価解の存在が否定される結果となった<sup>8), 9)</sup>。したがって、このような解析手法によってはせん断帯の発生を合理的に予測することは期待できそうにない。

これに対して、拡散くびれに対応する塑性不安定は多価状態の存在可能性を与えるものであり<sup>10)</sup>、固有状態<sup>11), 12)</sup>とも同一の数理構造にある<sup>13)</sup>。筆者の一人は塑性不安定を土質材料に対して考察し、公称応力速度差が零となる状態において多価の応力速度が存在可能となる条件を検討した。そこでは塑性係数 $h$ が零でなければならないことが示された<sup>14)</sup>。これに続いてさらに一般的な塑性不安定を速度型境界条件の下で検討し、これに基づいて多価解の存在条件を求めた<sup>15)</sup>。

これまで筆者の一人は、このようにせん断帯など亀裂の発生が何らかの形で塑性不安定と関連していることを前提として論を進めてきた。しかし、土質材料においては塑性変形過程は圧縮応力状態にあることが多く、このような応力場において果たして前提としている塑性不安定状態の出現が可能であるか否かについて疑問が残る。そこで、本論文ではまず最初に、平面ひずみ圧縮変形を例に塑性不安定の出現可能性について考察を試みた。

降伏曲線は基本降伏曲線と相似形を維持し膨脹することを仮定しているが、素材の変形挙動に従って基本降伏曲線を同定<sup>2)</sup>する際、基本降伏曲線に限界状態が現れる。これは降伏曲線が相似膨脹できる領域の限界を表し、特異な状態にある。本論文では、降伏曲線のこの膨脹限界が解の多価性と密接に関係していることを示し、これに基づいて平面ひずみ圧縮変形についてせん断帯発生とその形態の予測を行った。

## 2. 基礎関係式

### 2. 1 構成関係式

応力、ひずみ成分はそれぞれ引張り、伸びを正值にとる。静水圧応力と圧縮体積ひずみ速度は

$$p \equiv -\frac{1}{3}\sigma_{kk} \quad (1a)$$

$$\dot{\epsilon}_p \equiv -\dot{\epsilon}_{kk} \quad (1b)$$

である。偏差応力と偏差ひずみ速度は

$$\sigma'_{ij} \equiv \sigma_{ij} + p\delta_{ij}, \quad \dot{\epsilon}'_{ij} \equiv \dot{\epsilon}_{ij} + \frac{1}{3}\dot{\epsilon}_p\delta_{ij} \quad (2)$$

であり、相当偏差応力と相当偏差ひずみ速度は

$$q \equiv \sqrt{\frac{3}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}} \quad (3a)$$

$$\dot{\epsilon}_q \equiv \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\epsilon}'_{ij}\dot{\epsilon}'_{ij}} \quad (3b)$$

で定義される。土質材料は圧力依存性を示す点に特徴があり、いま、 $p, q$ の依存関係を降伏関数あるいは降伏曲線と呼び、

$$f(p, q, p_y) = 0 \quad (4)$$

で表す。ここで、 $p_y$ は、土質材料の塑性変形に伴う硬化の状態を表す変数であり、硬化相当圧力と呼ぶことにする。対象とする土質材料は剛塑性体とし、等方性を維持しているものと仮定する。降伏関数 $f$ を時間微分すると

$$\dot{f} = N_{ij}\dot{\sigma}'_{ij} + M_y\dot{p}_y = 0 \quad (5)$$

の関係にある。ここで、

$$N_{ij} \equiv f_p \frac{\partial p}{\partial \sigma'_{ij}} + f_q \frac{\partial q}{\partial \sigma'_{ij}} \quad (6a)$$

$$M_y \equiv \frac{\partial f}{\partial p_y} \quad (6b)$$

$$\dot{\sigma}'_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \sigma_{ik}\omega_{kj} - \sigma_{kj}\omega_{ki} \quad (6c)$$

であり、

$$f_p \equiv \frac{\partial f}{\partial p}, \quad f_q \equiv \frac{\partial f}{\partial q} \quad (7a)$$

$$\omega_{ij} \equiv \frac{1}{2}(\dot{v}_{ji} - \dot{v}_{ji}) \quad (7b)$$

と置いている。 $\dot{\sigma}'_{ij}$ はJaumannの応力速度であり、 $\dot{v}_i$ は変位速度成分を表す。降伏関数 $f$ を塑性ポテンシャルとするとき、構成式は $\dot{\Lambda}$ をひずみ速度比例係数として

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\Lambda}N_{ij} \quad (8)$$

で表される。式(1a)、(3a)より

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma'_{ij}} = -\frac{1}{3}\delta_{ij}, \quad \frac{\partial q}{\partial \sigma'_{ij}} = \frac{3}{2q}\sigma'_{ij} \quad (9)$$

であるので、式(6a)は

$$N_{ij} = -\frac{1}{3}f_p\delta_{ij} + \frac{3}{2q}f_q\sigma'_{ij} \quad (10)$$

と表される。式(10)より

$$f_p = -N_{kk}, \quad f_q = Q \quad (11)$$

となる。ここで、

$$Q \equiv \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{N_{rs}N_{rs} - \frac{1}{3}N_{rr}N_{ss}} \quad (12)$$

と置いている。これらを用いて

$$\dot{\epsilon}_p = \dot{\Lambda}f_p, \quad \dot{\epsilon}_q = \dot{\Lambda}f_q \quad (13)$$

と表すことができる。式(5)の表現を変え

$$\dot{f} = \dot{\sigma}'_f - \dot{\Lambda}h = 0 \quad (14)$$

と表す。 $\dot{\sigma}'_f$ を全相当応力速度、 $h$ を塑性係数と呼ぶ。ここで

$$\dot{\sigma}'_f \equiv N_{ij}\dot{\sigma}'_{ij} \quad (15a)$$

$$M_y\dot{p}_y \equiv -\dot{\Lambda}h \quad (15b)$$

の関係にある。

### 2. 2 硬化特性

硬化に寄与する塑性ひずみ速度を $\dot{\varepsilon}_y$ で表し、その時間積分値を $\varepsilon_y$ とする。これらをそれぞれ硬化ひずみ速度、硬化ひずみと呼ぶことにする。これにより、硬化相当圧力は

$$p_y = g(\varepsilon_y^T) \quad (16a)$$

$$\bar{p}_y = \frac{p_y}{p_0} = \bar{g}(\varepsilon_{y0}, \varepsilon_y) \quad (16b)$$

$$\varepsilon_y^T = \varepsilon_{y0} + \varepsilon_y, \quad \varepsilon_y \equiv \int d\varepsilon_y, \quad \bar{p}_y = \frac{d\bar{g}}{d\varepsilon_y} \dot{\varepsilon}_y \quad (16c)$$

で表されるものとする。ここで、上符合 $\bar{\phantom{x}}$ と $p_0$ について説明する。試験片は最初、応力零の状態から初期設定圧力 $p_0$ まで各方向に一樣に圧密変形を受け、しかる後設定された変形様式に従って負荷（偏差負荷と呼ぶ）されるものとする。このとき、 $p_0$ は応力関連成分の基準値となる。応力関連成分を $p_0$ で規格化し、無次元量とした諸量に上符合 $\bar{\phantom{x}}$ を付した。 $\varepsilon_{y0}$ は圧密変形における硬化ひずみを、 $\varepsilon_y$ はその後の硬化ひずみを表し、これらの和を $\varepsilon_y^T$ と置いている。 $\bar{p}_y$ は式(16b)におけるように $\varepsilon_{y0}$ にも依存している。従来の土質力学では $\dot{\varepsilon}_y$ を $\dot{\varepsilon}_p$ と等置していた。これに対して金属塑性では体積変化がなく $\dot{\varepsilon}_y$ に $\dot{\varepsilon}_q$ を当てている。土質力学において塑性軟化と弾性除荷の判定が不明確であったことを回避する目的で、以前に筆者らは硬化ひずみ速度を $\dot{\varepsilon}_y = a\dot{\varepsilon}_q + b\dot{\varepsilon}_p$ で定義した<sup>1)</sup>。しかし、金属塑性、土質塑性に対して包括的に表現できることを配慮して硬化ひずみ速度を

$$\dot{\varepsilon}_y = a\dot{\varepsilon}_q + b\dot{\varepsilon}_p \quad (17)$$

で表すことにした。 $a, b$ を硬化比率定数と呼ぶことにする。塑性変形の過程では $\dot{\varepsilon}_y > 0$ であることが必要である。これを満足するように、硬化比率係数は

$$a + b = 1 \quad (a \geq 0, b \geq 0) \quad (18)$$

の限定した範囲内で正值として設定することにした。これらの設定においては硬化特性が素材に固有なものとして可能な限り負荷様式に依存しないような数値が選ばるべきである。式(17)は式(13)により

$$\dot{\varepsilon}_y = \lambda(a f_q + b f_p) \quad (19)$$

である。塑性係数は式(15b)より

$$\bar{h} = -M_y \frac{d\bar{g}}{d\varepsilon_y} (a f_q + b f_p) \quad (20)$$

となる。式(16b)の硬化関数 $\bar{g}$ は $\varepsilon_y$ に対して単調増加の関係にあり、 $d\bar{g}/d\varepsilon_y$ は本質的に零にはならない。さらに、 $a f_q + b f_p > 0$ でなければならないので、 $\bar{h} = 0$ は常に $M_y = 0$ と対応している。これまで、降伏関数と限界状態は別個に論じられることが多く、これらの間の関連、とくに限界状態における $M_y = 0$ の要請については筆者の一人

を除いてこれまで論じられてはいないようである<sup>1)</sup>。

## 2. 3 基本降伏曲線

2.2節で応力関連成分に関して $p_0$ で規格化した場合上符合 $\bar{\phantom{x}}$ を付したが、以下の記述では特別に断わる場合を除き規格化した量を上符合 $\bar{\phantom{x}}$ を付すことなく表示することにする。このような表示において式(4)に相当する降伏曲線を考える。横軸に $p$ 、縦軸に $q$ を採る降伏曲線は原点に相似の中心を持ち、 $p_y$ の増大に伴って相似形を維持して膨張するものと仮定する。偏差負荷の開始では $p_y = 1$ である。このときの降伏曲線は膨張する降伏曲線の基本形状を与えるものであり、基本降伏曲線と名付ける。基本降伏曲線に関する諸量に上付記号 $\sim$ を付して表す。これを図-1に示す。偏差負荷開始時には基本降伏曲線上の応力点は点 $S(1,0)$ に位置している。

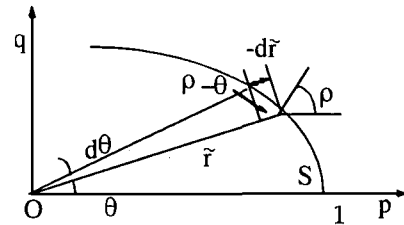


図-1 基本降伏曲線

塑性変形に伴って降伏曲線が膨張し、 $p$ 軸との交点が $p_y$ となった降伏曲線上に応力点が移動し、現時点においてこれは応力空間上の点 $p, q$ に位置しているものとする。このときの応力点と原点を結ぶ動径を $r$ 、動径が $p$ 軸となす偏角を $\theta$ で表すと

$$r = \sqrt{p^2 + q^2}, \quad \theta \equiv \tan^{-1} \frac{q}{p} \quad (21a)$$

$$p = r \cos \theta, \quad q = r \sin \theta \quad (21b)$$

の関係にある。この応力点に対して同一の偏角 $\theta$ を与える基本降伏曲線上の点が基本対応点 $(\bar{p}, \bar{q})$ である。この基本対応点における動径 $\bar{r}$ と偏角 $\theta$ は

$$\bar{r} = \sqrt{\bar{p}^2 + \bar{q}^2}, \quad \theta \equiv \tan^{-1} \frac{\bar{q}}{\bar{p}} \quad (22)$$

$$\bar{p} = \bar{r} \cos \theta, \quad \bar{q} = \bar{r} \sin \theta$$

である。ここで、基本降伏曲線の形状を

$$\bar{r} = k(\theta) \quad (23)$$

で表す。降伏曲線における相似膨張の仮定から硬化相当圧力は

$$p_y = \frac{r}{\bar{r}} \quad (24)$$

の関係にある。一般に、素材の硬化特性は式(16)で与えられている。基本対応点における基本降伏曲線の法線が $p$ 軸となす角度を $\rho$ とすると

$$f_r = \frac{1}{\tan \rho} \quad (25)$$

の関係にある。ここで、

$$f_r \equiv \frac{f_p}{f_q} \quad (26)$$

と置いている。動径の時間変化は図-1を参照して

$$\dot{r} = \bar{r} \tan(\theta - \rho) \dot{\theta} \quad (27)$$

の関係にある。式(21)より応力点の動径と偏角の変化は

$$\dot{r} = \frac{1}{r}(p\dot{p} + q\dot{q}), \quad \dot{\theta} = \frac{1}{r^2}(p\dot{q} - q\dot{p}) \quad (28)$$

である。

## 2. 4 降伏曲線の具体的表現

降伏曲線は式(4)におけるように $p, q, p_y$ の間の依存関係を表す。式(24)を

$$f \equiv r - p_y \bar{r} = 0 \quad (29)$$

と置くと、式(21a), (23)の関係より式(29)は $p, q, p_y$ の間の関係を与えているので、式(29)は降伏曲線としての資質を備えている。式(21a)より

$$\frac{\partial r}{\partial p} = \cos \theta, \quad \frac{\partial r}{\partial q} = \sin \theta \quad (30)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial p} = -\frac{\sin \theta}{r}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial q} = \frac{\cos \theta}{r}$$

であるので、式(23)を考慮して

$$f_p = \cos \theta + \frac{p_y}{r} k' \sin \theta \quad (31)$$

$$f_q = \sin \theta - \frac{p_y}{r} k' \cos \theta$$

を得る。ここで $k'$ は $k$ の導関数を表す。式(26)の定義より

$$f_r = \frac{k \cos \theta + k' \sin \theta}{k \sin \theta - k' \cos \theta} \quad (32)$$

が求められる。これは当然のことではあるが、式(25), (27)の関係を整合している。

式(29)に基づくとき、式(6b)の定義より

$$M_y = -\bar{r} \quad (33)$$

の関係にある。したがって、塑性係数は式(20)により

$$h = \bar{r} \frac{dg}{d\varepsilon_y} (af_q + bf_p) \quad (34)$$

となる。

## 2. 5 降伏曲線の膨脹限界

偏差負荷において降伏曲線は膨脹し、応力点 $(p, q)$ は $\theta=0$ から $\theta$ を増大しつつ移動し、ついには偏角 $\theta$ の増加が停止する $\dot{\theta}=0$ の状態に到達する。この状態は降伏曲線の、膨脹できる限界を表し、これを越えては降伏曲線の存在はあり得ないので、これを膨脹限界と呼ぶことにする。膨脹限界における状態の表示には添字 $c$ を付して表す。膨脹限界は $(p, q)$ 空間において原点を通り、 $p$ 軸と $\theta_c$ の角度をな

す直線で表される。これを膨脹限界直線と呼ぶことにする。

これまで土質力学では、内部摩擦の概念に基づくモール・クーロンの破壊規準がせん断破壊と関連づけられきた。モール・クーロンの破壊規準は、最大摩擦の観点からモールの応力空間において、原点を通りモールの応力円に接する直線で表されている。しかし、これを $(p, q)$ 空間において考えるとき、八面体せん断応力と関連づけることはできるが、最大摩擦との関係は明瞭ではなくなる。このように一般論で考察するとき、モール・クーロンの破壊規準は概念的にも明確ではない。モール・クーロンの破壊規準と上記の膨脹限界とは応力空間において直線で表現される点においては幾何学的に酷似しているが、概念的には全く異なっている。

$(p, q)$ 空間において応力点に対応する基本降伏曲線の動径 $k (= \bar{r})$ は初期の値 $k=1$ から通常は減少するが、膨脹限界においても負値になることはない(図-5参照)。これまで筆者らが考察してきた平面ひずみ圧縮変形においては、多くの場合膨脹限界近傍では $\theta$ の増加に伴って $\bar{r}$ は減少する傾向にある。このような限界状態において通常は

$$\dot{\theta}_c \Rightarrow 0 \quad (35a)$$

$$k'_c \Rightarrow -\infty \quad (35b)$$

である<sup>3)</sup>。それゆえ $\theta_c$ は数値的に求められるが、 $k_c$ は数理的に確定することはできない。他方、限界状態においては、2. 2節で説明したように

$$h_c = 0 \Leftrightarrow \bar{r}_c = 0 \quad (36)$$

の対応が要請されている。そこで、以上の論理的経緯から式(35)の状況において確定できない $k_c$ を $k_c (= \bar{r}_c) = 0$ と見なし、式(36)の要請に応えることにした。

ここで、数値実験で常用されている降伏曲線モデルについて膨脹限界における要請条件、 $M_y = 0$ の成立を参考までに検討しておく。カムクレイモデルの降伏曲線は $M$ を定数として

$$f = q + M p \ln \left( \frac{p}{p_y} \right) = 0 \quad (37)$$

で与えられる。このとき、式(33)を考慮して

$$\bar{r} = \frac{M p}{p_y} \quad (38)$$

であり、限界状態が $(p, q)$ 平面の $q$ 軸に対応していなければ式(36)の要請条件に応えることはできない。しかし、モール・クーロンの限界状態の設定においてカムクレイモデルではこのことへの配慮はこれまでなされていない。これに対して、円形を降伏曲線の基本形状とするキャップモデルではこれらの包絡線は膨脹限界の要請条件を満たしている<sup>1)</sup>。

### 3. 塑性不安定

物体が変形状態にあるときその表面には力あるいは変位が境界条件として指定されている。土質塑性では構成関係が非線形であるので、変形は増分的に追跡され、物体表面  $S$  では速度型境界条件として表面力速度  $\dot{F}$ 、変位速度  $v$  が付与されている状態にある。表面における負荷速度はこのように指定されているので、たとえ、物体内部  $V$  で多価の解が発生したとしても、これらは同一の境界条件の下にあり、したがって、

$$\int_S \Delta \dot{F} \cdot \Delta v \, dS = 0 \quad (39)$$

は常に満足されていなければならない。  $\Delta$  は多価解を任意に二つ選び、これらに関する差を表わす。表面力速度の差は

$$\Delta \dot{F} = n \cdot \Delta \dot{S} \quad (40)$$

で表わされる。ここで、  $\dot{S}$  は公称応力速度テンソル、  $n$  は表面要素の単位法線ベクトルである。式 (40) を用いて、式 (39) は

$$\begin{aligned} \int_S n \cdot \Delta \dot{S} \cdot \Delta v \, dS &= \int_V \nabla \cdot (\Delta \dot{S} \cdot \Delta v) \, dV \\ &= \int_V \left\{ \nabla \cdot \Delta \dot{S} \cdot \Delta v + e_i \cdot \Delta \dot{S} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} (\Delta v) \right\} dV \end{aligned} \quad (41)$$

に変換される。ここで、  $e_i$  は、任意に採られた直交座標軸  $x_i$  方向の単位ベクトルである。応力速度の平衡条件から

$$\nabla \cdot \dot{S} = 0, \quad \nabla \cdot \Delta \dot{S} = 0 \quad (42)$$

が成り立っているので、式 (41) の関係に従って式 (39) は

$$\int_V e_i \cdot \Delta \dot{S} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} (\Delta v) \, dV = \int_V \Delta \dot{s}_{ij} \Delta v_{j,i} \, dV = 0 \quad (43)$$

となる<sup>10)</sup>。ここで、  $\dot{s}_{ij}$  は公称応力速度成分である。物体内部の変形状態は各点各点で通常は異なっている。したがって、新しく表面力速度と変位速度が付与された段階で物体内部で延性がなくなり、多価解発生条件を最初に満足するようになる物体点は非常に小さな領域に限られている。この多価領域を領域  $B$  と呼ぶことにする。これ以外の領域では、唯一解が保証されているので、式 (43) の被積分関数は唯一解の差を表わし、恒等的に零である。そこで、これらの領域を除外すると、式 (43) の積分領域は領域  $B$  に限られ、これはときには点領域である。それゆえ、式 (43) は領域  $B$  の被積分関数が零になることを要請している。したがって

$$\Delta \dot{s}_{ij} \Delta v_{j,i} = 0 \quad (44)$$

と置くことができる。これが、多価解が存在したとした場合に、これら多価解の間で少なくとも満足していなければ

ならない必要条件であり、解の多価性を議論する上で検討しなければならない基本条件を与えている。剛体回転速度は式 (7b) で、ひずみ速度は

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (v_{j,i} + v_{i,j}) \quad (45)$$

の関係にあるので、これらを用いて式 (44) は

$$\Delta \dot{s}_{ij} \Delta \dot{\varepsilon}_{ij} + \Delta \dot{s}_{ij} \Delta \omega_{ij} = 0 \quad (46)$$

と表わされる。領域  $B$  の剛体回転速度はその周辺の領域の速度勾配に依存したある値を採らなければならない。このような環境にあるので、領域  $B$  の多価解は

$$\Delta \omega_{ij} = 0 \quad (47)$$

として論ずることができる。このとき、基本式、式 (44) は

$$\Delta \dot{s}_{ij} \Delta \dot{\varepsilon}_{ij} = 0 \quad (48)$$

と書き換えることができる。

公称応力速度成分は Cauchy の応力速度と

$$\dot{s}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \sigma_{kj} v_{i,k} + \sigma_{ij} v_{k,k} \quad (49)$$

の関係にある。式 (6c) の Jaumann の応力速度を用いて式 (49) は

$$\dot{s}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij}^J - \sigma_{kj} \dot{\varepsilon}_{ik} + \sigma_{ik} \omega_{kj} + \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{kk} \quad (50)$$

さらに、ひずみ速度に式 (8) を適用し、式 (49) は

$$\dot{s}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij}^J - \left( \sigma_{kj} N_{ik} - \sigma_{ij} N_{kk} \right) \dot{\lambda} + \sigma_{ik} \omega_{kj} \quad (51)$$

となる。

式 (48) の検討に先立ち、最初に  $\dot{s}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}$  について考察する。式 (51) に式 (8) を演算し、式 (14) を考慮して

$$\begin{aligned} \dot{s}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} &= \left\{ h - N_{ij} \left( \sigma_{kj} N_{ik} - \sigma_{ij} N_{kk} \right) \right\} \dot{\lambda}^2 \\ &\quad + N_{ij} \sigma_{ik} \omega_{kj} \dot{\lambda} \end{aligned} \quad (52)$$

を得る。式 (52) の右辺第2項を  $A \dot{\lambda}$  と置くと

$$A = \left\{ -\frac{1}{3} f_p \sigma_{jk} + \frac{3}{2q} f_q \left( \sigma_{ik} \sigma_{ij} + p \sigma_{jk} \right) \right\} \omega_{kj} \quad (53)$$

となる。  $\omega_{ij}$  は式 (7b) の定義から反対称テンソルであり、  $\sigma_{ij}$  は対称テンソルあるので、式 (53) の右辺は全て零となり、恒等的に

$$A = 0 \quad (54)$$

である<sup>19)</sup>。したがって、式 (52) より

$$\dot{\lambda}^2 = \frac{\dot{s}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}}{h - y_0} \quad (55a)$$

$$y_0 \equiv N_{ij} \left( \sigma_{kj} N_{ik} - \sigma_{ij} N_{kk} \right) \quad (55b)$$

となる。多価解の差に関しても式 (55a) と類似な

$$(\Delta \dot{\lambda})^2 = \frac{\Delta \dot{s}_{ij} \Delta \dot{\varepsilon}_{ij}}{h - y_0} \quad (56)$$

の関係を得る<sup>10)</sup>。多価状態が発生するとひずみ速度比例係

数 $\dot{\Lambda}$ は一般に多価で、このときこれの差 $\Delta\dot{\Lambda}$ も当然多価となる。多価解存在においては基本条件、式(48)を満足しているので、式(56)の右辺分子は零でなければならない。式(56)の左辺、ひずみ速度比例係数の差 $\Delta\dot{\Lambda}$ が多価解を持つためには、式(56)の右辺分母を $y$ と置き、これが零

$$y \equiv h - y_0 = 0 \quad (57)$$

でなければならない。このときは、式(55a)の右辺分母も零となる。ひずみ速度比例係数 $\dot{\Lambda}$ は多価であるので、式(55a)の右辺分子

$$z' \equiv \dot{s}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} = 0 \quad (58)$$

も零でなければならない。これより式(8)を考慮して

$$z \equiv \dot{s}_{ij} N_{ij} = 0 \quad (59)$$

が要請される。式(57)、(59)は塑性不安定発生の必要条件である。

式(55b)の右辺の各項は

$$N_{ij} \sigma_{kj} N_{ik} = -\frac{1}{3} p f_p^2 - \frac{2}{3} q f_p f_q + \left( \frac{27}{4q^2} J_3 - \frac{3}{2} p \right) f_q^2 \quad (60)$$

$$N_{ij} \sigma_{ij} N_{kk} = -p f_p^2 - q f_p f_q$$

に変換できる。ここで、 $J_3$ は偏差応力の3次の不変量を表し

$$J_3 = \frac{1}{3} \sigma'_{ij} \sigma'_{jk} \sigma'_{ki} \quad (61)$$

である。したがって、式(55b)は

$$y_0 = f_q^2 \left( \frac{2}{3} p f_r^2 + \frac{1}{3} q f_r + \frac{27}{4q^2} J_3 - \frac{3}{2} p \right) \quad (62)$$

として表される。

式(8)を考慮して式(55a)より

$$\dot{\Lambda} = \frac{z}{y} \quad (63)$$

を得る。これは塑性変形下では常に成り立つ関係である。

式(59)の $\dot{s}_{ij}$ に式(50)を適用し、式(60)の演算を参照すると

$$z = \dot{\sigma}_f' - \dot{\Lambda} y_0 \quad (64)$$

の関係にある。これより式(63)は式(14)と整合していることが分かる。

塑性不安定では $y=0$ と $z=0$ が両立するが、多くの場合 $z=0$ を満足しても $y=0$ とは限らない。それよりも通常は $y>0$ である。このときには、この時点で除荷過程へと遷移する。

本章で概説した塑性不安定は式(39)を出発点とし、負荷状態との係わりにおいて発生しているところに特徴がある。このように、塑性不安定による多価性は負荷条件に関連する外的な多価性を表している。

#### 4. 膨脹限界における多価性

膨脹限界では $\theta=0$ の状態にあり、降伏曲線の膨脹域の限界を表している。これを多価性の観点から考察する。基本降伏曲線が図-1に模式的に示されているが、 $\theta=0$ を起点に $\theta$ の増大に伴って動径 $r$ が変化し、ある変形段階 $\theta_c$ で $\theta=0$ の状態に遭遇する(図-5参照)。  $0 \leq \theta \leq \theta_c$ の範囲内では降伏曲線は基本降伏曲線と相似形を維持し膨脹することができる。しかし、この $\theta_c$ を越えた領域では降伏曲線は存在することはできない。原点を通る $\theta=\theta_c$ の直線が膨脹限界となっている。降伏曲線の膨脹の状況を図-2に示す。

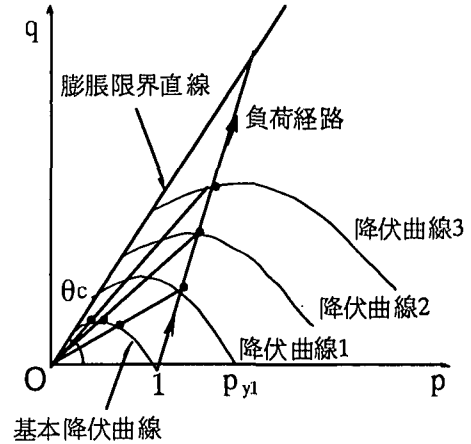


図-2 基本降伏曲線と降伏曲線の膨脹

応力速度ベクトル $\dot{\sigma}_{ij}$ (テンソル成分を6次元のベクトル空間で見ると)は降伏曲線上に始点を持ち、塑性変形の過程では降伏曲線の外側に向いている。応力速度ベクトルの終点は膨脹後の降伏曲線上にある。しかし、降伏曲線がその膨脹の限界である膨脹限界直線に接すると、その状態点ではそれを越えて外側への膨脹はできないことから、膨脹限界直線の外側に向う応力速度ベクトル $\dot{\sigma}_{ij}$ は存在し得ない。それゆえ、限界直線上では塑性変形の過程で $\dot{\sigma}_{ij}$ は限界直線に沿う方向に向いている。これに対して $N_{ij}$ は限界直線に垂直な向きにある。したがって、限界直線上では、塑性変形あるいは中立状態であるときには、言い換えると、除荷が発生するのでなければ、

$$N_{ij} \dot{\sigma}_{ij} = 0 \quad (65)$$

を満足している。さらに、限界状態にあるので式(36)から

$$h_c = 0 \quad (66)$$

である。塑性変形の過程では状態点が仮え限界直線上であっても式(14)の関係

$$\dot{\Lambda} = \frac{N_{ij} \dot{\sigma}_{ij}}{h} \quad (67)$$

を維持しているので、限界直線上では $\dot{\Lambda}$ は不定となる。したがって、膨脹限界では塑性多価状態と中立状態の共存が

可能な状態にある。

膨張限界状態は素材の変形特性そのものに起因するものであり、負荷条件などの外的な拘束とは無関係である。それゆえ、膨張限界状態に基づく多価性を内的な多価性と呼ぶことにする。

## 5. 平面ひずみ圧縮負荷

試験片は初期設定圧力  $p_0$  ( $p = 1$ ) まで一様に圧密され、しかる後偏差負荷として平面ひずみ圧縮の変形が課せられるものとする。主応力下で解析し、座標軸 1 の方向に圧縮する。偏差負荷において  $\alpha_1$  に関して  $\kappa$  を、さらに  $\alpha_2, \alpha_3$  に関して応力比因子  $\alpha, \beta$  を導入して偏差負荷における応力値を

$$\sigma_1 = -(1 + \kappa), \quad \sigma_2 = -(1 + \alpha\kappa) \quad (68)$$

$$\sigma = -(1 + \beta\kappa)$$

で表すことにする。偏差応力、静水圧応力、相当偏差応力はそれぞれ

$$\sigma'_1 = \frac{1}{3}(-2 + \alpha + \beta)\kappa \quad (69a)$$

$$\sigma'_2 = \frac{1}{3}(1 - 2\alpha + \beta)\kappa \quad (69b)$$

$$\sigma'_3 = \frac{1}{3}(1 + \alpha - 2\beta)\kappa \quad (69c)$$

$$p = 1 + \frac{1}{3}(1 + \alpha + \beta)\kappa \quad (69d)$$

$$q = \kappa q^*, \quad q^* \equiv \sqrt{1 - \alpha - \beta + \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2} \quad (69e)$$

となる。ひずみ速度を規定する  $N_i$  は式 (10) より

$$N_i = -\frac{1}{3}f_q \left( f_r - \frac{9}{2q} \sigma'_i \right) \quad (70)$$

不変量  $J_3$  は

$$J_3 = \frac{1}{3}\sigma'_1\sigma'_2\sigma'_3 \quad (71)$$

で表される。ひずみ速度比

$$\gamma \equiv \frac{\dot{\varepsilon}_2}{\dot{\varepsilon}_1} \quad (72)$$

を定義する。偏差負荷において座標軸 3 方向に

$$\dot{\varepsilon}_3 = 0 \quad (73)$$

の平面ひずみ拘束を課すものとする。これらに構成式 (8) を適用し

$$\gamma = \frac{N_2}{N_1}, \quad N_3 = 0 \quad (74)$$

である。式 (73) を考慮して式 (1b), (3b) より

$$\dot{\varepsilon}_v = -\dot{\varepsilon}_p = \dot{\varepsilon}_1(1 + \gamma), \quad \dot{\varepsilon}_q = \frac{2}{3}|\dot{\varepsilon}_1|\sqrt{1 - \gamma + \gamma^2} \quad (75)$$

を得る。式 (69d,e) より  $p, q$  の時間微分は

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \frac{1}{3} \left\{ (1 + \alpha + \beta)\dot{\kappa} + \kappa(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \right\} \\ \dot{q} &= \kappa \dot{q}^* \end{aligned} \quad (76)$$

$$+ \frac{\kappa}{2q^*} \left\{ (-1 + 2\alpha - \beta)\dot{\alpha} + (-1 - \alpha + 2\beta)\dot{\beta} \right\}$$

である。式 (74) に式 (70) を適用し、これらに式 (69) を代入して

$$f_q^* = \frac{3}{2} \frac{1 - 2\alpha + \beta - (-2 + \alpha + \beta)\gamma}{(1 - \gamma)} \quad (77a)$$

$$f_q^* = \frac{3}{2} (1 + \alpha - 2\beta) \quad (77b)$$

さらに、これから

$$\gamma = \frac{\alpha - \beta}{1 - \beta} \quad (78)$$

を得る。

## 6. せん断帯の形態

塑性多価状態と中立状態が共存するようになると、剛性域と塑性域との境界に剛塑境界面が形成される。せん断帯は多価状態発生における剛塑境界面とその近傍領域であり、せん断帯の形態とそこでの剛塑境界面の形態は同じである。剛塑境界面上では塑性域は剛性域との整合性から変形の拘束を受けており、その拘束はいわゆる特性曲面におけるそれと等価である<sup>17)</sup>。

本章では応力状態と剛塑境界面の形態との関連について論ずる。負荷設定の座標を基準に剛塑境界面の相対的な方位関係を剛塑境界面の形態と呼ぶ。これは塑性変形場における特性曲面の形態でもある。負荷状態は 5 章で設定したように主方向に関して表現している。主方向の座標系を  $x_i$  で表す。これに対して、剛塑境界面に関する座標系  $x_i^S$  を導入する。 $x_i^S$  は  $x_i$  に対して下記のように設定する。剛塑境界面の法線方向に座標軸  $x_3^S$  を採る。座標軸  $x_1^S$  は、座標面  $x_1x_2$  と剛塑境界面との交線の方に、座標軸  $x_2^S$  は、他の  $x_i^S$  と右手系をなすように設定する。座標軸  $x_3^S$  が座標面  $x_1x_2$  となす角度を  $\phi$ 、軸  $x_3^S$  の座標面  $x_1x_2$  への正射影と座標軸  $x_1$  のなす角度を  $\psi$  で表す。以下の議論で、上添字  $S$  は座標系  $x_i^S$  に関する成分であることを表す。

剛塑境界面では剛塑各領域の変形整合性から

$$\dot{\varepsilon}_{11}^S = 0, \quad \dot{\varepsilon}_{22}^S = 0, \quad \dot{\varepsilon}_{12}^S = 0 \quad (79)$$

が要請される<sup>18), 19)</sup>。圧密変形を除いて  $f_q > 0$  であるので、式 (8), (10) の関係を考慮して式 (79) より剛塑境界面は

$$\begin{aligned} f_r - \frac{9}{2q} \sigma_{11}^S &= 0 \\ f_r - \frac{9}{2q} \sigma_{22}^S &= 0 \end{aligned} \quad (80)$$

$$\frac{1}{q} \sigma_{12}^S = 0$$

で条件付けられる。式 (80) に含まれている  $x_i^S$  系にお

る偏差応力 $\sigma_{ij}^S$ は $x_i$ 系における主応力成分 $\sigma_i$ を用いて

$$\sigma_{11}^S = \frac{1}{3} \left\{ (3\sin^2 \psi - 1)\sigma_1 + (3\cos^2 \psi - 1)\sigma_2 - \sigma_3 \right\}$$

$$\sigma_{22}^S = \frac{1}{3} \left\{ (3\sin^2 \phi \cos^2 \psi - 1)\sigma_1 \right. \quad (81)$$

$$\left. + (3\sin^2 \phi \sin^2 \psi - 1)\sigma_2 + (3\cos^2 \phi - 1)\sigma_3 \right\}$$

$$\sigma_{12}^S = \sin \phi \sin \psi \cos \psi (\sigma_1 - \sigma_2)$$

で表される<sup>18)</sup>。さらに、式(68)の関係を代入して

$$\sigma_{11}^S = -\kappa \left\{ \sin^2 \psi - \frac{1}{3} + \left( \cos^2 \psi - \frac{1}{3} \right) \alpha - \frac{1}{3} \beta \right\}$$

$$\sigma_{22}^S = -\kappa \left\{ \left( \sin^2 \phi \cos^2 \psi - \frac{1}{3} \right) \right. \quad (82)$$

$$\left. + \left( \sin^2 \phi \sin^2 \psi - \frac{1}{3} \right) \alpha + \left( \cos^2 \phi - \frac{1}{3} \right) \beta \right\}$$

$$\sigma_{12}^S = -\kappa (1 - \alpha) \sin \phi \sin \psi \cos \psi$$

となる。これらを式(80)に代入して

$$\frac{2}{9} f, q^* + \left\{ \sin^2 \psi - \frac{1}{3} + \left( \cos^2 \psi - \frac{1}{3} \right) \alpha - \frac{1}{3} \beta \right\} = 0 \quad (83a)$$

$$\frac{2}{9} f, q^* + \left\{ \sin^2 \phi \cos^2 \psi - \frac{1}{3} \right. \\ \left. + \left( \sin^2 \phi \sin^2 \psi - \frac{1}{3} \right) \alpha + \left( \cos^2 \phi - \frac{1}{3} \right) \beta \right\} = 0 \quad (83b)$$

$$(1 - \alpha) \sin \phi \sin \psi \cos \psi = 0 \quad (83c)$$

を得る。式(83)が形態決定のための条件である。剛塑境界面の形態は式(83c)より

$$\phi = 0 \text{ or } \psi = 0 \quad (84)$$

を満足しなければならない<sup>18)</sup>。 $\phi = 0$ では $x_3$ 軸に関する平面ひずみ条件下にあり、 $\psi = 0$ では $x_2$ 軸に関する平面ひずみ条件下にある。5章で設定した平面ひずみ変形は式(73)で条件付けているので、前者の

$$\phi = 0 \quad (85)$$

が考察の対象となる。このとき式(83b)は式(77b)と等価となり、残る式(83a)から形態決定の条件

$$\psi = \sin^{-1} \sqrt{\frac{1}{3(1-\alpha)} \left( 1 - 2\alpha + \beta - \frac{2}{3} f, q^* \right)} \quad (86)$$

が与えられる。上式より、圧縮負荷方向が剛塑境界面の法線となす角度が決まる。圧縮負荷(座標軸1)方向と剛塑境界面のなす角度 $\psi'$ は

$$\psi' = \frac{\pi}{2} - \psi \quad (87)$$

の関係にある。

## 7. 塑性不安定の検討

土質材料における塑性不安定は式(57)、(59)に従って $y=0$ ,  $z=0$ で条件付けられている。これらの成立可能性を、平面ひずみ圧縮試験に関して詳細な実験観察を行った Viggiani らの実験<sup>20)</sup>と Desrues らの実験<sup>21)</sup>に基づいて検討することにする。参照する実験をそれぞれ実験A、実験Bと呼ぶことにする。これらの実験において初期圧密時の負荷は、実験Aでは $p_0=0.2\text{MPa}$ 、実験Bでは $p_0=0.3\text{MPa}$ である。彼等は平面ひずみ圧縮試験において圧縮負荷応力と体積ひずみの経過を求めている。それらを図-3、図-4に示す。ここで示されたひずみ値は全て塑性成分として処理した。これらの間の顕著な特徴は、実験Aでは圧縮応力が最大となる変形段階まで体積ひずみ速度がほぼ圧縮過程にあるが、実験Bでは圧縮応力が最大となる変形段階より相当以前に体積ひずみ速度が圧縮過程から膨脹過程へと遷移していることである。このような体積ひずみ速度の、圧縮から膨脹への遷移段階と圧縮応力が最大となる変形段階との間の前後関係が降伏曲線形状に少なからぬ影響を及ぼしている<sup>2), 3)</sup>。筆者は降伏曲面の相似膨脹と関連則を前提としてこれらの変形挙動から基本降伏曲線形状を同定する手法を提案した<sup>2)</sup>。この手法に従って求めた、式(23)による降伏関数を図-5に示す。硬化比率定数に関しては、実験A、Bにおける変形過程において $\dot{\epsilon}_y > 0$ の

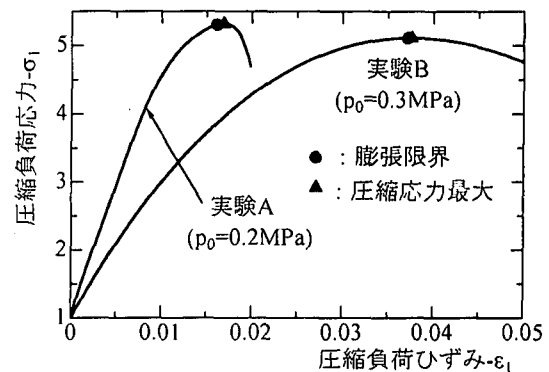


図-3 圧縮負荷応力の経過

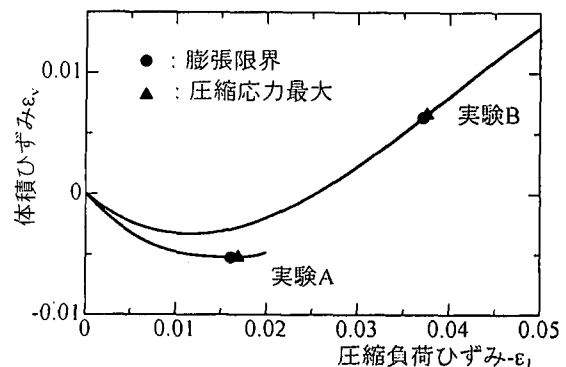


図-4 体積ひずみの経過



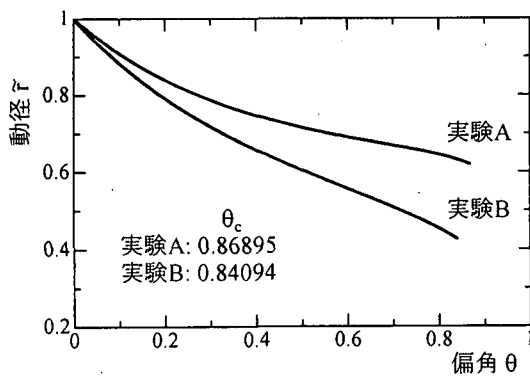


図-5 基本降伏関数  $k(\theta)$

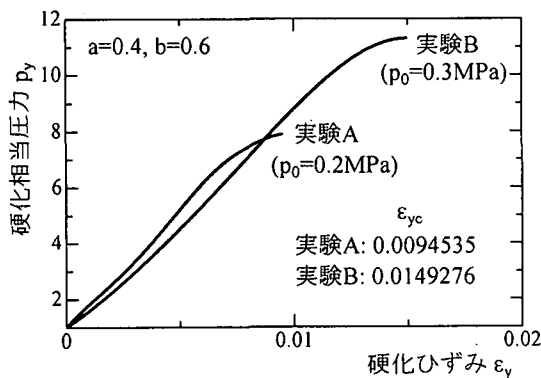


図-6 硬化特性

状態を維持することのできる数値としてひとまず  $a=0.4$ ,  $b=0.6$  を設定した。このときの硬化特性を図-6 に示す。

図-6 における硬化相当圧力が実験終期には減少に転じ始めようとする傾向が、とくに実験Bで見られる。これらの実験の終期には、9章で説明するように、一様変形の保証が得られない変形段階が到来している。それゆえ、この変形段階以降では、試験片全体が一様変形であるとして算出された応力値、ひずみ値は正しい値ではないので、このような変形段階における実験結果は採用されるべきではない。したがって、このような変形終期の状態をもって  $p_y$  の  $\varepsilon_y$  に対する依存性が単調増加ではなくなると判断すべきではない。降伏関数と硬化特性が同定されていると、任意に課された変形拘束に対してその材料の変形挙動を予測することができる。

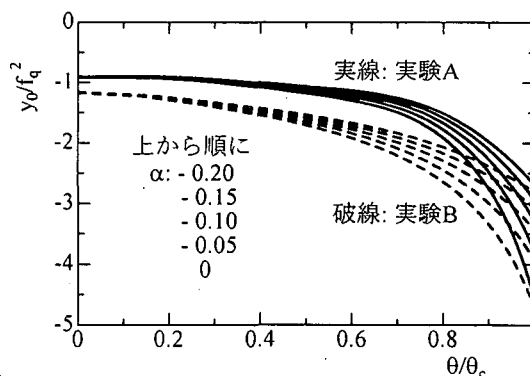


図-7  $y_0/f_q^2$  の経過

式 (57), (59) における  $y, z$  の評価に関して、 $y$  は不定性の引き金となる因子であるので、ここではこれについて検討した。図-5 において横軸  $\theta$  には上限  $\theta_c$  が存在している。図からは明瞭ではないが、そこでは式 (34b) におけるように  $df/d\theta$  は負値の無限大である<sup>3)</sup>。この限界は降伏曲線の膨脹限界を表している。限界状態においては塑性係数  $h$  は2。4節で論じたように零として処理している。しかし、それ以外では正值である。それゆえ、式 (56) で  $y_0$  は少なくとも負値でないことが求められる。 $f_q$  は圧密変形を除いて常に正值であるので、 $y_0$  の符合を調査する上からは  $y_0/f_q^2$  について調べることで十分である。図-5 で見るように  $\theta$  は零から増大し、限界で  $\theta_c$  となるので、ここでは秤量として  $\theta/\theta_c$  を採用した。この変域は零から1までであり、限界状態は常に  $\theta/\theta_c = 1$  に対応している。図-5, 図-6 で示された降伏関数、硬化特性に基づいて平面ひずみ変形における  $y_0/f_q^2$  の経過を図-7 に示す。実線が実験Aに、破線が実験Bに関する結果である。図-7 で示された  $y_0/f_q^2$  は全域にわたって負値を示している。これにより式 (56a) を満足するには塑性係数  $h$  は負値でなければならない。しかし、これは塑性係数としての適正を欠いている。したがって、参照した平面ひずみ圧縮変形においては塑性不安定の発生可能性は否定される結果となった。

## 8. 変形挙動の考察

図-5, 図-6 で示した素材の基本特性（降伏曲線と硬化特性）は座標軸2方向の拘束圧力を一定とした  $\alpha=0$  の場合の結果である。これらの基本特性が与えられると任意の負荷に対してこれら素材が呈する変形挙動を予測することができる。ここで得られた基本特性の適用限界はその根底となった実験における膨脹限界状態までであり、これを越えた変形に対しては変形の一様性が保証されていないことから基本特性の算出には適用すべきでない。応力比因子  $\alpha$  を正值として付与すると延性が増大するため基本特性

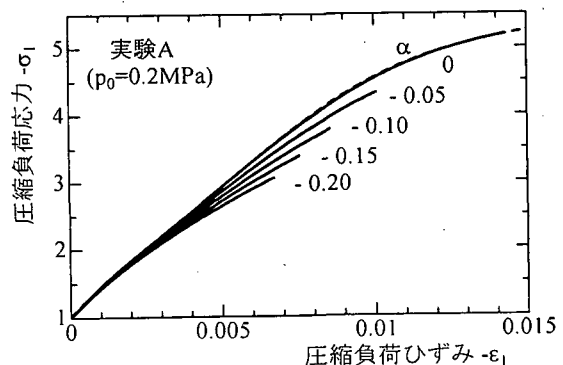


図-8a 圧縮負荷応力の経過 (実験A)

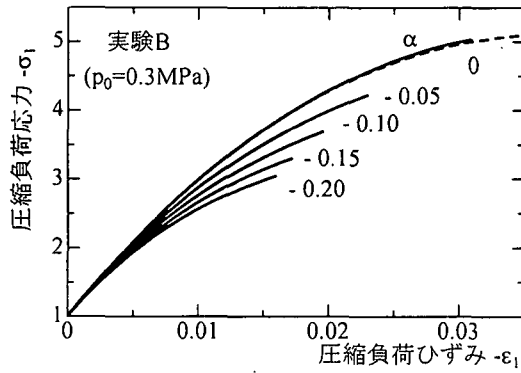


図-8b 圧縮負荷応力の経過 (実験B)

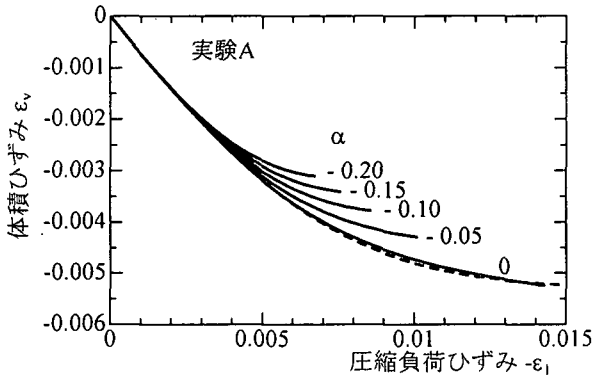


図-9a 体積ひずみの経過 (実験A)

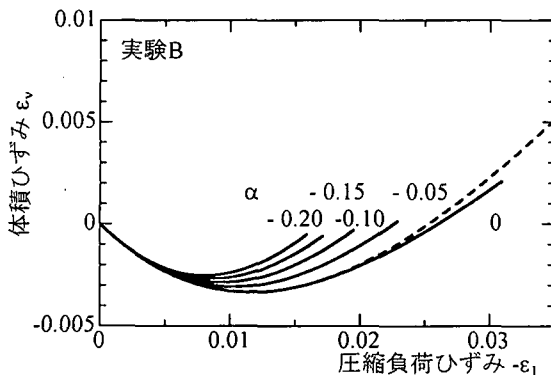


図-9b 体積ひずみの経過 (実験B)

値の適用範囲を越える変形を追跡することが必要となる。このようなことから、ここでは応力比因子  $\alpha$  として零か負値を付与することにした。図-8に圧縮負荷応力の経過を、図-9に体積ひずみの経過をそれぞれ実線で示した。基本特性に基づくこれらの算出方法は文献3)に詳述している。これらの線図における破線は素材の基本特性の算出に利用した、実験観察された  $\alpha=0$  における変形挙動を示している。逆演算の精度に関して実験Bの体積ひずみの経過が他に比べていくぶん劣っているが、全体としてはほぼ満足できる結果を与えている。

## 9. セン断帯の形態予測

実験観察された圧縮負荷応力の経過を図-3に示し、これを基に図-5における基本降伏関数を同定している。基

本降伏関数を同定する過程で降伏曲線の膨張限界が求められた。図-3の●印は膨張限界における変形段階を示している。図-3には圧縮負荷応力が最高値を示す変形段階も▲印で表している。これらの対応点は図-4にも示されている。これらの変形段階を比較すると、実験A、B共に膨張限界の方が圧縮負荷応力の最高値よりも先行している。これらの実験が圧縮過程であることを配慮すると、圧縮負荷荷重が最高値を示す変形段階は圧縮負荷応力の最高値における変形段階よりも遅れることが予測される。さらに、膨張限界以降では変形の一様性が保証されなくなるので、負荷荷重はこれ以降急速に減少することが推察される。これに加えて、これらの実験では圧縮負荷応力が最高値を示す負荷圧縮ひずみも4%程度であることから、変形に伴う、負荷荷重を支える受圧面の増大もそれほど大きくはない。これらを考え合わせると、圧縮負荷荷重が最高値を示す変形段階は負荷応力が最高値となる変形段階よりもいくぶんは遅れるものの、これらの変形段階の違いは大きくないものと推測される。したがって、参照した実験において膨張限界は負荷荷重が最高値を示す変形段階より先行していることになる。Viggiani ら<sup>20)</sup>は安定変形の限界が負荷荷重が最高値を示す変形段階より少し手前であることを実験により観察している。平面ひずみ圧縮試験では多価性をもたらすのは、これまで議論してきたように、内的な多価性に起因する膨張限界であることから、Viggiani らが観察した安定限界はこの膨張限界に対応していることへの検証と見ることができる。

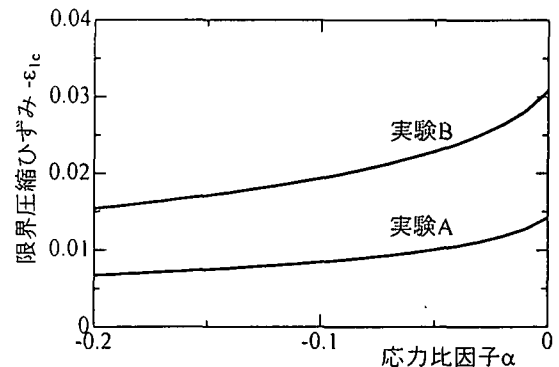


図-10 限界圧縮ひずみの  $\alpha$  依存性

そこで、本章では膨張限界に基づいてせん断帯の発生時期とその形態の予測を試みた。図-3の●印は応力比因子  $\alpha=0$  における安定変形の限界であり、そこでせん断帯の発生が促される。まず最初に、限界圧縮ひずみの応力比因子  $\alpha$  への依存性を図-10に示す。 $\alpha$  の減少が偏差負荷における静水圧力を相対的に減らすため、これによる延性低下に伴って限界圧縮ひずみが減少する傾向が見られる。

つぎに、せん断帯の形態を式(86)に従って論ずる。ここでの諸量は膨張限界に対応する値が採用される。平面ひずみ変形では式(77b)、(78)の関係にあるので、式

(86) の剛塑性境界面の形態は

$$\psi = \tan^{-1} \sqrt{-\gamma_c} \quad (88)$$

で与えられる。さらに、限界状態では式 (34b) の状態があるので、式 (32) からそこでは

$$f_{rc} = -\tan \theta_c \quad (89)$$

となる。平面ひずみ変形では式 (74) , (14) の関係より一般に

$$f_r = \frac{3}{2} \frac{1+\gamma}{\sqrt{1-\gamma+\gamma^2}} \quad (90)$$

であるので、限界状態におけるひずみ速度比  $\gamma_c$  は

$$(1-c')\gamma_c^2 + (2+c')\gamma_c + (1-c') = 0 \quad (91)$$

を満足していなければならない。ここで、

$$c' \equiv \frac{4}{9} \tan^2 \theta_c \quad (92)$$

と置いている。限界状態における偏角  $\theta_c$  が与えられると、式 (91) より限界状態における  $\gamma_c$  が求められ、式 (88) ,

(87) よりせん断帯傾斜角  $\psi'$  が決まる。このように、降伏曲線の相似膨脹の仮定の下では、応力比因子  $\alpha$  に直接依存することなくせん断帯の形態が決まることになる。実験 A, B において図-5 から求められる限界偏角  $\theta_c$  は表-1 の結果となる。これによるせん断帯傾斜角度  $\psi'$  の予測値と実測値の比較を表-1 に示した。実験 B では  $\psi'$  の予測値は実測値より約  $4^\circ$  下回っていた。残念ながら実験 A では実測値は報告されていない。

せん断帯傾斜角  $\psi'$  の限界偏角  $\theta_c$  への依存性を図-11 に、 $\tan^{-1} \sqrt{-\gamma_c}$  との直線関係を図-12 に実線で示した。図-12 では Arthur らによる実験結果<sup>22)</sup> を○印で、Vardoulakis のそれ<sup>23)</sup> を△印で表示している。これらの実験ではひずみ速度比  $\gamma_c$  に関しては

$$\sin \nu_c \equiv -\frac{1+\gamma_c}{1-\gamma_c} \quad (93)$$

により関係付けられる角度  $\nu_c$  が求められている。これらより求められる  $\gamma_c$  と実測されたせん断帯の傾斜角度を表-2, 表-3 に示した。実験観察されたせん断帯において  $\tan^{-1} \sqrt{-\gamma_c}$  と  $\psi'$  の間に平均的にはほぼ直線関係が見られたが、個々の値にはいくぶんの相違が認められた。膨張限界を越えた変形では不均一変形が起り始め、これが  $\nu_c$  の算出に誤差をもたらすことが考えられる。このことが予測値と実測値の間の相違に荷担している可能性を伺わせる。

表-1 せん断帯傾斜角度  $\psi'$  の実測値と予測値

|      | 限界偏角 $\theta_c$ (rad) | 予測値 $\psi'$ ( $^\circ$ ) | 実測値 $\psi'$ ( $^\circ$ ) |
|------|-----------------------|--------------------------|--------------------------|
| 実験 A | 0.86895               | 21.00                    | ---                      |
| 実験 B | 0.84094               | 22.97                    | 27                       |

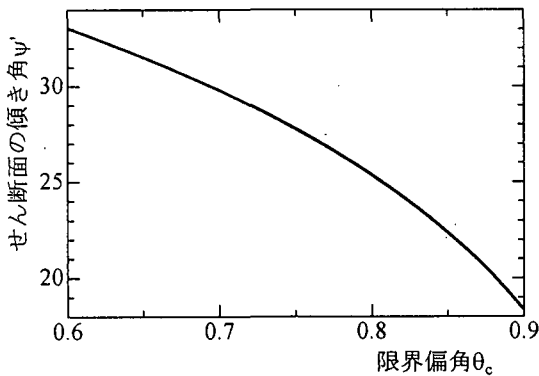


図-11 せん断帯傾斜角  $\psi'$  の限界偏角  $\theta_c$  への依存性

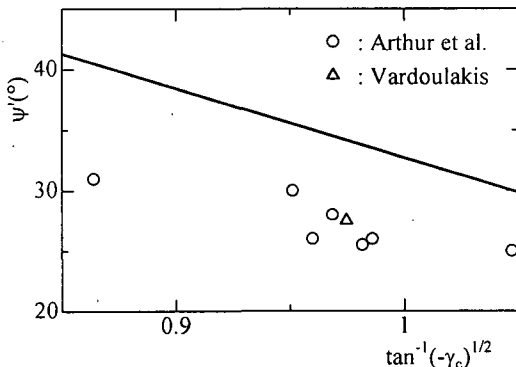


図-12 せん断帯傾斜角  $\psi'$  の  $\gamma_c$  への依存性

表-2 Arthur らによる実験結果

| $\nu_c$ ( $^\circ$ ) | $\psi'$ ( $^\circ$ ) | $\gamma_c$ |
|----------------------|----------------------|------------|
| 21                   | 28                   | -2.12      |
| 30                   | 25                   | -3.00      |
| 22.5                 | 25.5                 | -2.24      |
| 9                    | 31                   | -1.37      |
| 19                   | 30                   | -1.97      |
| 20                   | 26                   | -2.04      |
| 23                   | 26                   | -2.28      |

表-3 Vardoulakis による実験結果

| $\nu_c$ ( $^\circ$ ) | $\psi'$ ( $^\circ$ ) | $\gamma_c$ |
|----------------------|----------------------|------------|
| 21.7                 | 27.5                 | -2.17      |

## 10. 結 言

多価状態出現の可能性を平面ひずみ圧縮負荷を例に考察した。最初に、一般論で塑性不安定規準を提示し、これに従って塑性不安定の発生可能性条件を満足する変形状態が平面ひずみ圧縮負荷において実在するか否かについて検討した。塑性係数は正値か零でなければならないこと

を考慮するとそこでの塑性不安定の発生可能性は否定される結果となった。

続いて降伏曲線の膨張限界を多価性の観点から考察した。そこでは応力速度ベクトルは降伏曲線に含まれ、塑性変形と中立状態の共存が可能である。この膨張限界は負荷速度などの境界条件に依存しない内的多価性をもたらしている。これに基づいて限界変形の発生とそこでのせん断帯の形態を求めた。せん断帯は塑性領域と剛性域の間で剛塑境界面を形成し、その境界面における塑性域は剛性域から変形の拘束を受けている。剛塑境界面の形態は特性曲面の形態と等価であり、これに従って負荷方向に対するせん断帯傾斜角を予測した。

平面ひずみ負荷において座標軸 2 の方向には設定負荷圧力を課しているが、この設定負荷圧力を一定、あるいは圧縮変形に伴い減少させる数値実験を行い、その変形挙動を観察した。平面ひずみ拘束に必要な座標軸 3 方向の応力値は座標軸 2 方向の設定負荷圧力により変動するが、せん断帯の形態にはこの設定負荷圧力は全く影響を及ぼさない結果を示した。降伏曲線の相似膨張の仮定の下では、平面ひずみ変形においてはせん断帯傾斜角  $\psi'$  は限界ひずみ速度比  $\gamma_c$  のみの関数で表わされることになる。これらの間の関係を調べ、Arthur らと Vardoulakis による実験結果とを比較した。数値的には若干の相違が見られたが、よい相関関係にあることが分かった。

変形挙動が詳細に観察されている Viggiani ら (実験 A) と Desrues ら (実験 B) の 2 種類の実験結果を用いて同定した降伏関数と硬化特性に基づき数値実験を行い、これにより個々にせん断帯傾斜角を予測した。これと、せん断帯傾斜角が観察されている実験 B について比較した結果、予測値は実測値より約  $4^\circ$  下回ってはいたが、これらの間の相関は合理的な理論背景に基づいた予測としてはよい近似範囲にあったと考えられる。

## 参考文献

- 1) 守時 一, 奥山栄樹: 土質材料における塑性理論の修正, 日本機械学会論文集 A, 第 64 巻, 第 621 号, pp.1415-1421, 1998.
- 2) 守時 一, 及川 洋: 土質材料における降伏曲線形状と変形挙動の関連, 土木学会, 応用力学論文集, 第 3 巻, pp.303-312, 2000.
- 3) 守時 一, 及川 洋, 荻野俊寛: 変形挙動の降伏曲線形状への依存性, 土木学会, 応用力学論文集, 第 4 巻, pp.239-249, 2001.
- 4) Swift, H. W.: Plastic instability under plane stress, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.1, pp.1-18, 1952.
- 5) Hill, R.: On discontinuous plastic states, with special reference to localized necking in thin sheet, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.1, pp.19-30, 1952.
- 6) Hill, R. and Hutchinson, J. W.: Bifurcation phenomena in plane tension test, *J. Mech. Phys. Solids*, 23, pp.239-264, 1975.
- 7) Rudnicki, J. W. and Rice, J. R.: Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.23, pp.371-394, 1975.
- 8) 守時 一, 奥山栄樹: せん断帯解析に見られる解析構造の矛盾点, 日本機械学会論文集 A, 第 63 巻, 第 613 号, pp.1955-1962, 1997.
- 9) 守時 一, 奥山栄樹: 土質材料を対象とした Rudnicki らの局所化解析に見られる解析構造の矛盾点, 材料, 第 47 巻, 第 3 号, pp.247-252, 1998.
- 10) 守時 一, 奥山栄樹: 多価条件と塑性不安定の関連, 日本機械学会論文集 A, 第 64 巻, 第 617 号, pp.193-199, 1998.
- 11) Hill, R.: On intrinsic eigenstates in plasticity with generalized variables, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, Vol.93, pp.177-189, 1983.
- 12) Hill, R.: A general theory of plastic deformation and instability in thin-walled tubes under combined loading, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.44, pp.2041-2057, 1996.
- 13) 守時 一, 奥山栄樹: 固有状態と多価条件の関連, 日本機械学会論文集 A, 第 65 巻, 第 632 号, pp.756-762, 1999.
- 14) 守時 一, 奥山栄樹: 土質材料における塑性不安定規準, 日本機械学会論文集 A, 第 63 巻, 第 610 号, pp.1334-1339, 1997.
- 15) 守時 一, 奥山栄樹: 土質力学における限界状態と多価条件の関連, 土木学会, 応用力学論文集, 第 1 巻, pp.417-426, 1998.
- 16) Hill, R.: On the problem of uniqueness in the theory of a rigid-plastic solid -III, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.5, pp.153-161, 1957.
- 17) 守時 一, 奥山栄樹: 多価性に準拠した成形性の予測, 日本機械学会論文集 A, 第 64 巻, 第 622 号, pp.1617-1624, 1998.
- 18) 守時 一, 奥山栄樹: 土質材料におけるせん断帯の形態, 日本機械学会論文集 A, 第 62 巻, 第 603 号, pp.2553-2560, 1996.
- 19) 守時 一, 奥山栄樹: 土質材料におけるせん断帯の形態予測, 日本機械学会論文集 A, 第 63 巻, 第 611 号, pp.1561-1566, 1997.
- 20) Viggiani, G., Finno, R. J. and Harris, W. W.: Experimental observation of strain localization in plane strain compression of a stiff clay, *Localization and Bifurcation Theory for Soil and Rocks*, Chambon, R., Desrues, J. and Vardoulakis, I. (eds), Balkema, Rotterdam, pp.189-198, 1994.
- 21) Desrues, J., Lanier, J. and Stutz, P.: Localization of the deformation in tests on sand sample, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.21, pp.909-921, 1985.
- 22) Arthur, J. R. F., Dunstan, T., Al-Ani, Q. A. J. L. and Assadi, A.: Plastic deformation and failure in granular media, *Geotechnique*, Vol.27, pp.53-74, 1977.
- 23) Vardoulakis, I.: Theoretical and experimental bounds for shear-band bifurcation in biaxial tests on dry sand, *Res. Mechanics*, Vol.23, pp.239-259, 1988.

(2002 年 4 月 19 日受付)