

複合材料の巨視的降伏および流れ則の予測

Prediction of Overall Yielding and Flow Rule of Composites

岩崎智昭*・岩熊哲夫**・小山茂***

Tomoaki IWASAKI, Tetsuo IWAKUMA and Shigeru KOYAMA

*正会員 修(工) 仙台市下水道局建設部河川課 (〒980-8671 仙台市青葉区国分町三丁目7-1)

**正会員 PhD 東北大学大学院教授 工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉06)

***正会員 博(工) 信州大学助手 工学部社会開発工学科 (〒380-8553 長野市若里4-17-1)

The overall yielding behavior of anisotropic composites is affected by the hydrostatic pressure. A method to predict the overall elasto-plastic behavior of composites based on the Mori-Tanaka theory is expanded to examine the normality or the associativeness of the overall flow rule of composites quantitatively. A phenomenological constitutive model is used to evaluate approximately but quantitatively the hydrostatic-pressure effect on the subsequent yielding, and the results are compared with experimental data.

Key Words : *composites, overall flow rule, overall yield surface, overall plastic strain rate, non-associativeness, Mori-Tanaka theory*

1. はじめに

現在産業界の幅広い分野で数多くの複合材料が用いられているが、土木工学分野もその例外ではなく、繊維補強材料等の新材料の普及も進んでいる。その時、どのような材料をどの程度混合するかについて網羅的に実験や数値解析をするのは無駄が多いため、材料配合比率の範囲等のある程度絞り込むための簡易な解析的予測手法があると便利である。実際に電子材料等の開発では、簡易予測手法によって材料を絞り込んだ上で実験を行うという手法が採られ成功(例えば¹⁾)している。

複合材料の平均化手法はいくつかあるが、森・田中理論²⁾は Eshelby テンソルを通して介在物形状も考慮することができ、その形状を回転楕円体に限定すれば比較的簡単な計算で巨視的挙動予測が可能である。しかも構成材料のうち母材をどれに選ぶかによって異なる解が得られ、弾性の場合にはその解が Hashin-Shtrikman の上下界に一致することから、上下界の数値モデルも簡単に作ることができる。

この手法を弾塑性挙動まで拡張した研究も多く、例えば文献³⁾は Hill の接線係数的な考え⁴⁾に近いものであるが、この場合は一般に比較体の剛性が塑性変形による異方性を持つために近似的な接線ポアソン比を求める等の調整を行わないと簡便な取り扱いができない。それに対して Tandon と Weng⁵⁾は全応力・全ひずみ関係に対して、等方な割線係数を近似として用いることによって塑性変形を含んだ接線係数に存在する異方性の介入を避ける方法を提案しているが、あくまでも近似である上に、流れ則が考慮されていない。

本研究では基本に立ち戻って、森・田中の手法を増分

理論に適用した平均化の定式化を示す。その手法では複合材料の比較体の剛性として母材の等方弾性部分のみを用いるため、異方性による困難は避けられる。考え方は Budiansky と Wu の self-consistent 法⁶⁾に近いが、平均場の考え方は本手法の方が厳密である。本定式化と同じ陽な表現は今のところ他の論文には見出せていない。

Ju と Sun⁷⁾は森・田中理論における介在物同士の相互作用をもう少し厳密に扱う手法を提案しているが、不思議なことに、最初から巨視的な流れ則として関連流れ則を仮定して巨視的な塑性ひずみを算定しており、各相内の平均塑性ひずみの何らかの平均化によっては巨視的な塑性ひずみを求めている。本研究では、微視的な流れ則が巨視的にはどのように見えるかを検討するために、ほぼ解析的に解を求められる森・田中理論の拡張を試みる。

そうした上で、巨視的降伏への巨視的応力の第1不変量(静水圧)依存性や流れ則の降伏曲面上での非線形等の性質を定量的に明らかにする。また材料開発には有用な森・田中理論も、複雑なマイクロ構造を持つ境界値問題への直接の適用は簡単ではないことを踏まえて、本研究では森・田中の予測を現象論的なモデルで近似し、塑性ポテンシャルや降伏関数の新しい提案に結び付ける。

2. 増分型の森・田中理論の定式化

2.1 2相弾塑性問題の森・田中理論

森・田中によって提案された複合材料の巨視的挙動予測手法は多くの文献で定式化されているため、2相複合材料の巨視的な弾塑性挙動予測手法について増分型の支配方程式に適応させた基本式のみを陽な形で示す。

ここで考える森・田中理論の2相問題では、無限体と捉えた母材の中に、ただ1種類の形状と向きを持つ無数の回転楕円体介在物が同じ方向を向いて不規則に分布しているものとする。また母材と介在物とはともに弾性は等方で、その弾性係数テンソルをそれぞれ C_M 、 C_I とする。以下添え字の M 、 I はそれぞれ母材・介在物での量を表す。複合材料の巨視的挙動を予測する際に重要なのは、材料同士の相互作用を適切に評価することである。その点を考慮して森・田中は、母材と介在物各相の増分応力・ひずみ関係を直角座標系 (x_1, x_2, x_3) において

$$\dot{\sigma}_M = C_M (\dot{\epsilon}_D - \dot{\epsilon}_M^p), \quad \dot{\sigma}_I = C_I (\dot{\epsilon}_I - \dot{\epsilon}_I^p) \quad (1)$$

としている。ここに $\dot{\sigma}_M$ 、 $\dot{\epsilon}_D$ は母材部分の応力増分・ひずみ増分の体積平均量を表し、 $\dot{\sigma}_I$ 、 $\dot{\epsilon}_I$ は介在物内部の応力増分・ひずみ増分の体積平均量である。また $\dot{\epsilon}_M^p$ 、 $\dot{\epsilon}_I^p$ は母材部分・介在物内部の塑性ひずみ増分の体積平均量を表す。ここで母材部分の平均ひずみ増分の添え字が 'D' となっているのは、多数の介在物の存在による乱れを含んでいることを示すためであるが、文献⁷⁾ではこれを低次の近似に過ぎないとしている。

介在物部分のひずみ増分は母材のひずみ増分にさらに乱れが付加された形で

$$\dot{\epsilon}_I = \dot{\epsilon}_D + \dot{\gamma} \quad (2)$$

となる。Eshelby によると等方弾性体中の介在物の形状が回転楕円形であれば、乱れ成分 $\dot{\gamma}$ は介在物領域内で一定である⁸⁾ことが分かっている。

これに対して等価介在物法⁸⁾を適用すると

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_I &= C_I (\dot{\epsilon}_D + \dot{\gamma} - \dot{\epsilon}_I^p) \\ &= C_M \{ \dot{\epsilon}_D + \dot{\gamma} - (\dot{\epsilon}_I^p + \dot{\epsilon}^*) \} \end{aligned} \quad (3)$$

と置ける。ここに $\dot{\epsilon}^*$ は増分 eigen ひずみである。また乱れ成分 $\dot{\gamma}$ は領域に発生する非適合ひずみの定数倍で

$$\dot{\gamma} = S \{ (\dot{\epsilon}_I^p - \dot{\epsilon}_M^p) + \dot{\epsilon}^* \} \quad (4)$$

と書ける。ここに S が Eshelby テンソルで、介在物が1個のみ存在する場合のつり合い式と境界条件式の支配方程式を解くことによって求まり、特に等方弾性体の母材内部に回転楕円形の介在物が存在するような問題では、母材のポアソン比と介在物形状寸法比のみで決まる定数パラメータ⁸⁾になる。

これより巨視的な応力増分・ひずみ増分はそれぞれの体積比率重み平均によって

$$\dot{\bar{\sigma}} = (1-f)\dot{\sigma}_M + f\dot{\sigma}_I, \quad \dot{\bar{\epsilon}} = (1-f)\dot{\epsilon}_D + f\dot{\epsilon}_I \quad (5)$$

と定義する。ここに f は介在物の体積比率である。以上の式を連立することで各増分量を求めることができ、その陽な表現は後述する。

2.2 母材部分・介在物内部の降伏

本研究では材料の降伏を、母材部分あるいは介在物内部のそれぞれの平均応力がそれぞれの降伏応力に達し

た時点で定義し、ここでは母材部分・介在物内部ともに von Mises の降伏条件に従うものとして、降伏関数を

$$f_M \equiv \sqrt{(J_2)_M} - F_M(\epsilon_M^p), \quad f_I \equiv \sqrt{(J_2)_I} - F_I(\epsilon_I^p) \quad (6)$$

と定義する。ここに ϵ_M^p 、 ϵ_I^p は母材部分・介在物内部の平均塑性ひずみである。既存の研究結果との比較を念頭に置いて、硬化関数はよく用いられるべき乗則の等方硬化則に従うものとして

$$F_M(\epsilon_M^p) = \frac{1}{\sqrt{3}} \{ \sigma_M^Y + h_M (\epsilon_M^{eq})^{n_M} \} \quad (7a)$$

$$F_I(\epsilon_I^p) = \frac{1}{\sqrt{3}} \{ \sigma_I^Y + h_I (\epsilon_I^{eq})^{n_I} \} \quad (7b)$$

と仮定する。ここに σ_M^Y 、 σ_I^Y はそれぞれ母材部分・介在物内部の単軸引張り降伏応力、 h_M 、 h_I 、 n_M 、 n_I は硬化パラメータを表し、各材料単体での簡単な単軸引張り実験等から求められるものとする。また各相の相当応力・相当塑性ひずみは

$$\begin{aligned} \sqrt{(J_2)_M} &\equiv \sqrt{\frac{1}{2} \sigma'_M : \sigma'_M}, \quad \sqrt{(J_2)_I} \equiv \sqrt{\frac{1}{2} \sigma'_I : \sigma'_I} \quad (8) \\ \epsilon_M^{eq} &\equiv \sqrt{2\epsilon_M^p : \epsilon_M^p}, \quad \epsilon_I^{eq} \equiv \sqrt{2\epsilon_I^p : \epsilon_I^p} \quad (9) \end{aligned}$$

と定義した。' : ' は2階のテンソルの内積を表す。各相の硬化係数 H_M 、 H_I は例えば文献⁹⁾にも定義されてされているように、式(6)の応力および塑性ひずみに関する微係数テンソルで与えられるので、式(7)を用いて

$$H_M = \frac{2^{(n_M/2)-1} n_M h_M}{\sqrt{3} (J_2)_M} (\epsilon_M^p : \epsilon_M^p)^{(n_M/2)-1} (\sigma'_M : \epsilon_M^p) \quad (10a)$$

$$H_I = \frac{2^{(n_I/2)-1} n_I h_I}{\sqrt{3} (J_2)_I} (\epsilon_I^p : \epsilon_I^p)^{(n_I/2)-1} (\sigma'_I : \epsilon_I^p) \quad (10b)$$

と、その具体的表現を求めることができる。

2.3 母材部分・介在物内部の流れ則

母材部分および介在物内部の平均塑性ひずみ増分は、一般的な Prandtl-Reuss 流の関連流れ則⁹⁾で式(6)に対応して

$$\dot{\epsilon}_M^p = \frac{1}{H_M} \frac{\sigma'_M \otimes \sigma'_M}{4(J_2)_M} \dot{\sigma}_M, \quad \dot{\epsilon}_I^p = \frac{1}{H_I} \frac{\sigma'_I \otimes \sigma'_I}{4(J_2)_I} \dot{\sigma}_I \quad (11)$$

で与えられるものとする。' $\otimes$ ' はテンソル積を表す。

2.4 各増分量の表現

以上を踏まえて各応力・ひずみ増分量のテンソル表現を、母材・介在物が弾性的の場合と塑性した場合とに分けて、煩雑ではあるが整理して列挙する。ここでは巨視的応力増分を与えた場合のそれぞれの増分量を表現する。

(1) 母材・介在物ともに弾性的の場合

母材部分の応力増分 $\dot{\sigma}_M$ 、介在物内部の応力増分 $\dot{\sigma}_I$ 、巨視的ひずみ増分 $\dot{\bar{\epsilon}}$ はそれぞれ弾性部分のみで

$$\dot{\sigma}_M = A \dot{\bar{\sigma}}, \quad \dot{\sigma}_I = B \dot{\bar{\sigma}}, \quad \dot{\bar{\epsilon}} = \bar{C}^{-1} \dot{\bar{\sigma}} \quad (12)$$

となる。ここに A 、 B が増分応力集中係数で、 $\bar{C}$ は複合材料全体の巨視的接線弾性係数テンソル、 $\bar{C}^{-1}$ は巨

視的接線弾性コンプライアンスであり

$$A = \left[I + f C_M (S - I) \{ C_M - (C_M - C_I) S \}^{-1} \right. \\ \left. \times (C_M - C_I) C_M^{-1} \right]^{-1} \quad (13)$$

$$B = \left[I + C_M (S - I) \{ C_M - (C_M - C_I) S \}^{-1} \right. \\ \left. \times (C_M - C_I) C_M^{-1} \right] \\ \times \left[I + f C_M (S - I) \{ C_M - (C_M - C_I) S \}^{-1} \right. \\ \left. \times (C_M - C_I) C_M^{-1} \right]^{-1} \quad (14)$$

$$\bar{C}^{-1} = \left[I + f S \{ C_M - (C_M - C_I) S \}^{-1} (C_M - C_I) \right] \\ \times \left[C_M + f C_M (S - I) \{ C_M - (C_M - C_I) S \}^{-1} \right. \\ \left. \times (C_M - C_I) \right]^{-1} \quad (15)$$

と表される。ここに I は 4 階の単位テンソルであり、記号 '×' は式が連続することを明示するだけで特別な積ではない。この $\bar{C}$ はもちろん、全ひずみ理論や弾性範囲のみを扱った既存の多くの研究で求まっている巨視的弾性係数の表現に一致している。

ここで求められた母材部分・介在物内部の応力増分 $\dot{\sigma}_M, \dot{\sigma}_I$ を式 (1) に代入することで、母材部分・介在物内部のひずみ増分も求めることができる。

(2) 母材のみ降伏している場合

母材が降伏した場合は母材部分に塑性ひずみ増分が発生するため、各増分量にはその塑性部分が付加されることになる。すると母材・介在物の平均応力増分および巨視的ひずみ増分は

$$\dot{\sigma}_M = A \dot{\bar{\sigma}} + D \dot{\epsilon}_M^P \quad (16a)$$

$$\dot{\sigma}_I = B \dot{\bar{\sigma}} - E \dot{\epsilon}_M^P \quad (16b)$$

$$\dot{\bar{\epsilon}} = \bar{C}^{-1} \dot{\bar{\sigma}} + F \dot{\epsilon}_M^P \quad (16c)$$

となる。 D, E, F は

$$D = \left[I + f C_M (S - I) \{ C_M - (C_M - C_I) S \}^{-1} \right. \\ \left. \times (C_M - C_I) C_M^{-1} \right]^{-1} \quad (17)$$

$$\times \left[f C_M (S - I) \{ C_M - (C_M - C_I) S \}^{-1} C_I \right] \\ E = \left[C_M (S - I) \{ C_M - (C_M - C_I) S \}^{-1} C_I \right] \\ - \left[I + C_M (S - I) \{ C_M - (C_M - C_I) S \}^{-1} \right. \\ \left. \times (C_M - C_I) C_M^{-1} \right] \\ \times \left[I + f C_M (S - I) \{ C_M - (C_M - C_I) S \}^{-1} \right. \\ \left. \times (C_M - C_I) C_M^{-1} \right]^{-1} \quad (18)$$

$$\times \left[f C_M (S - I) \{ C_M - (C_M - C_I) S \}^{-1} C_I \right] \\ F = I - \left[f S \{ C_M - (C_M - C_I) S \}^{-1} C_I \right] \\ + \left[I + f S \{ C_M - (C_M - C_I) S \}^{-1} (C_M - C_I) \right]$$

$$\times \left[C_M + f C_M (S - I) \{ C_M - (C_M - C_I) S \}^{-1} \right. \\ \left. \times (C_M - C_I) \right]^{-1} \quad (19) \\ \times \left[f C_M (S - I) \{ C_M - (C_M - C_I) S \}^{-1} C_I \right]$$

と表される。注意すべき点は、母材のみの降伏にも拘わらず、介在物中の応力増分にも母材の塑性ひずみ増分が関与してくることである。これは式 (4) で、母材と介在物の塑性ひずみの差が乱れになるからである。

一方母材部分の式 (11) 第 1 式と式 (16a) を連立すれば、母材部分の塑性ひずみ増分が

$$\dot{\epsilon}_M^P = \left\{ I - \frac{1}{H_M} \frac{\sigma'_M \otimes \sigma'_M}{4(J_2)_M} D \right\}^{-1} \frac{1}{H_M} \frac{\sigma'_M \otimes \sigma'_M}{4(J_2)_M} A \dot{\bar{\sigma}} \quad (20)$$

と求まる。これを式 (16) に代入することにより、母材部分の応力増分や介在物内部の応力増分、巨視的なひずみ増分も求めることができる。また式 (16c) の右辺第 1 項が Hooke の法則に従う巨視的弾性ひずみ増分であることから、巨視的な塑性ひずみ増分 $\dot{\bar{\epsilon}}^P$ は巨視的全ひずみ増分と巨視的弾性ひずみ増分との差で

$$\dot{\bar{\epsilon}}^P \equiv \dot{\bar{\epsilon}} - \bar{C}^{-1} \dot{\bar{\sigma}} = F \dot{\epsilon}_M^P \quad (21)$$

と定義できる。つまり巨視的塑性ひずみ増分は、各相の塑性ひずみ増分の重み平均 $\dot{\bar{\epsilon}} = (1 - f) \dot{\epsilon}_M$ にはならない。このことは全応力・全ひずみ関係で論じられた文献⁵⁾でも指摘されている。

(3) 介在物のみ降伏している場合

介在物のみ降伏している場合も同様に、母材部分・介在物内部の応力増分、巨視的ひずみ増分は

$$\dot{\sigma}_M = A \dot{\bar{\sigma}} - D \dot{\epsilon}_I^P \quad (22a)$$

$$\dot{\sigma}_I = B \dot{\bar{\sigma}} + E \dot{\epsilon}_I^P \quad (22b)$$

$$\dot{\bar{\epsilon}} = \bar{C}^{-1} \dot{\bar{\sigma}} + G \dot{\epsilon}_I^P \quad (22c)$$

と書ける。 G は

$$G = \left[f S \{ C_M - (C_M - C_I) S \}^{-1} C_I \right] \\ - \left[I + f S \{ C_M - (C_M - C_I) S \}^{-1} (C_M - C_I) \right] \\ \times \left[C_M + f C_M (S - I) \{ C_M - (C_M - C_I) S \}^{-1} \right. \\ \left. \times (C_M - C_I) \right]^{-1} \quad (23) \\ \times \left[f C_M (S - I) \{ C_M - (C_M - C_I) S \}^{-1} C_I \right]$$

と表される。また式 (11) 第 2 式と式 (22b) を連立することによって介在物内部の塑性ひずみ増分が得られ

$$\dot{\epsilon}_I^P = \left\{ I - \frac{1}{H_I} \frac{\sigma'_I \otimes \sigma'_I}{4(J_2)_I} E \right\}^{-1} \frac{1}{H_I} \frac{\sigma'_I \otimes \sigma'_I}{4(J_2)_I} B \dot{\bar{\sigma}} \quad (24)$$

となる。これを式 (22) に代入することで母材部分・介在物内部の平均応力増分と巨視的ひずみ増分が求められる。またこの場合の巨視的塑性ひずみ増分は

$$\dot{\bar{\epsilon}}^P = G \dot{\epsilon}_I^P \quad (25)$$

と定義できる。

(4) 母材・介在物ともに降伏している場合

母材・介在物が両方とも降伏している場合の母材部分・介在物内部の応力増分，巨視的ひずみ増分は

$$\dot{\sigma}_M = A \dot{\bar{\sigma}} + D \dot{\epsilon}_M^p - D \dot{\epsilon}_I^p \quad (26a)$$

$$\dot{\sigma}_I = B \dot{\bar{\sigma}} - E \dot{\epsilon}_M^p + E \dot{\epsilon}_I^p \quad (26b)$$

$$\dot{\bar{\epsilon}} = \bar{C}^{-1} \dot{\bar{\sigma}} + F \dot{\epsilon}_M^p + G \dot{\epsilon}_I^p \quad (26c)$$

となる．式(11)第1式に式(26a)を，式(11)第2式に式(26b)を代入し，それを連立することで

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_M^p = & \left[\left\{ I - \frac{1}{H_M} \frac{\sigma'_M \otimes \sigma'_M}{4(J_2)_M} D \right\} - \frac{1}{H_M} \frac{\sigma'_M \otimes \sigma'_M}{4(J_2)_M} D \right. \\ & \times \left\{ I - \frac{1}{H_I} \frac{\sigma'_I \otimes \sigma'_I}{4(J_2)_I} E \right\}^{-1} \frac{1}{H_I} \frac{\sigma'_I \otimes \sigma'_I}{4(J_2)_I} E \left. \right]^{-1} \\ & \times \left[\frac{1}{H_M} \frac{\sigma'_M \otimes \sigma'_M}{4(J_2)_M} A - \frac{1}{H_M} \frac{\sigma'_M \otimes \sigma'_M}{4(J_2)_M} D \right. \end{aligned} \quad (27a)$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ I - \frac{1}{H_I} \frac{\sigma'_I \otimes \sigma'_I}{4(J_2)_I} E \right\}^{-1} \frac{1}{H_I} \frac{\sigma'_I \otimes \sigma'_I}{4(J_2)_I} B \left. \right] \dot{\bar{\sigma}} \\ \dot{\epsilon}_I^p = & \left[\left\{ I - \frac{1}{H_I} \frac{\sigma'_I \otimes \sigma'_I}{4(J_2)_I} E \right\} - \frac{1}{H_I} \frac{\sigma'_I \otimes \sigma'_I}{4(J_2)_I} E \right. \\ & \times \left\{ I - \frac{1}{H_M} \frac{\sigma'_M \otimes \sigma'_M}{4(J_2)_M} D \right\}^{-1} \frac{1}{H_M} \frac{\sigma'_M \otimes \sigma'_M}{4(J_2)_M} D \left. \right]^{-1} \\ & \times \left[\frac{1}{H_I} \frac{\sigma'_I \otimes \sigma'_I}{4(J_2)_I} B - \frac{1}{H_I} \frac{\sigma'_I \otimes \sigma'_I}{4(J_2)_I} E \right. \end{aligned} \quad (27b)$$

となる．このように，母材と介在物中の塑性ひずみはそれぞれの内部の応力のみならず，複雑に作用しあっていることが陽に分かる．これを式(26)に代入することによって，母材部分・介在物内部の平均応力増分と巨視的ひずみ増分を求めることができる．また巨視的塑性ひずみ増分は

$$\dot{\bar{\epsilon}}^p = F \dot{\epsilon}_M^p + G \dot{\epsilon}_I^p \quad (28)$$

と定義できる．当然ながら，巨視的な塑性ひずみ増分が各相の重み平均の $\dot{\bar{\epsilon}}^p = (1-f)\dot{\epsilon}_M^p + f\dot{\epsilon}_I^p$ にはならないのは，前述の結果と同様である．

以上の関係を用いれば，例えば巨視的応力増分 $\dot{\bar{\sigma}}$ が作用した時の母材部分・介在物内部のそれぞれの相の平均応力・ひずみ増分，ならびに巨視的なひずみ増分等をすべて求めることができる．こうして求まる増分量を時々刻々計算して累計することによって，微小変形理論の枠組の中での複合材料の巨視的弾塑性挙動を追跡することができる．

なおテンソル計算の実行では，介在物が球形の場合に限ってそのせん断成分と体積成分の独立した係数のスカラー計算で解析的に算定できる．それ以外の回転楕円体形状の場合には，文献¹⁰⁾にある手法を用いてテンソルを

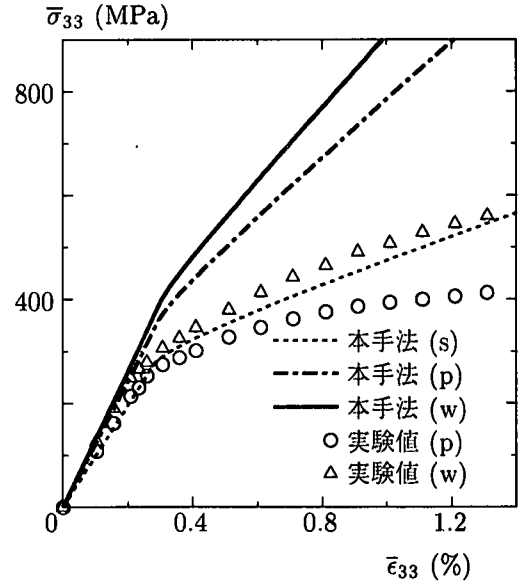


図-1 Al-SiC 複合材料の応力・ひずみ関係の実験値との比較

行列表現することにより，数値的に近似無く求めることができる．本研究でもこの文献の方法で解析している．

3. 応力・ひずみ関係の実験値との整合性

ここではこの理論の適用性を示すために，1方向への整列性を有した介在物を含む複合材料に対して，その整列した介在物の長軸方向あるいはその直交方向に単軸引張りした場合の応力・ひずみ関係について，実験値との比較例を示す．なお，例えば文献^{3),5)}にもあるように，同様のモデルによる結果と実験値との比較は多く示され，そのどれもがここで示す程度の合致度である．本モデルは特にこの二つの文献の結果よりも剛な応答を予測する可能性が大きいので，その点に焦点を絞った比較をしている．

図-1は，5456Al弾塑性母材に弾性のSiC粒子あるいはSiCウイスカ（欠陥のない細長い単結晶）が介在する複合材料の，介在物の長軸方向（ x_3 方向）に単軸引張りした場合の応力・ひずみ関係である．介在物は x_1 - x_2 面内が真円で x_3 方向に細長いラグビーボールのような回転楕円体形状とする．実験値と材料定数は文献¹¹⁾より引用したものであり，アルミニウムの材料定数はヤング率 $E_M = 73$ GPa，ポアソン比 $\nu_M = 0.33$ ，単軸引張り降伏応力 $\sigma_M^Y = 230$ MPa，硬化パラメータ $h_M = 410$ MPa， $n_M = 0.4$ ，SiCウイスカは $E_I = 485$ GPa， $\nu_I = 0.2$ ，体積比率 $f = 20\%$ である．また，粒子補強材（p）とウイスカ補強材（w）の x_1 - x_2 面内の半径に対する x_3 方向の半径比は4.1程度と報告されている．ただし，ウイスカには角があることから厳密な回転楕円体ではないが，半径比を1.5倍程度にすることで回転楕円体で近似することができる¹¹⁾とされているため，ここでも粒子（p）の場合は半径比を4.1，ウイスカ（w）の場合はその1.5倍の6.15として計算した．図には

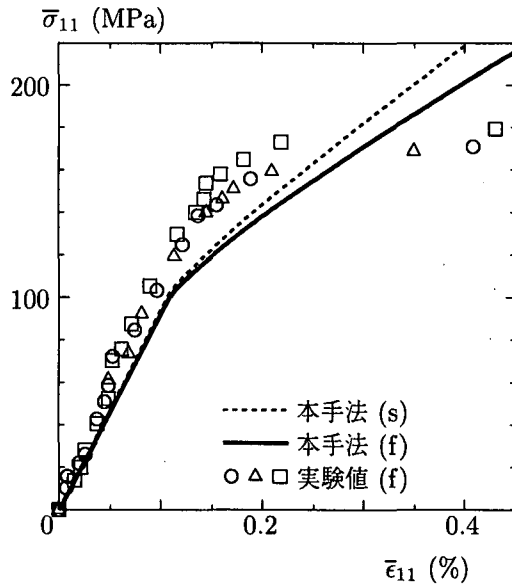


図-2 Al-B 複合材料の応力・ひずみ関係の実験値との比較

参考のために介在物が球形 (s) の場合の本手法による予測値も示した。

このように介在物の半径比が大きい場合には巨視的なひずみ硬化が極端に大きくなり、実験値と比較しても過大評価になっている。しかも弾性でさえ実験値と良い整合を示しているのは球の場合であることから、介在物の半径比が大きい場合には森・田中理論の予測に限界があるのかもしれない。ただし、弾性における差異から判断して、実験試験片の介在物がそれほど整列していなかった可能性や、文献に示された材料パラメータが正確ではなかった可能性もあるが、確かめられていない。

もうひとつの例として、2024Al 弾塑性母材に弾性のボロン繊維を含んだ複合材料について、その繊維長軸の直交方向 (x_1 方向) に単軸引張りした場合の応力・ひずみ関係を図-2 に示した。実験値と材料定数は文献¹²⁾ から引用したものであり、アルミニウムの材料定数はヤング率 $E_M = 55.85$ GPa, ポアソン比 $\nu_M = 0.32$, 単軸引張り降伏応力 $\sigma_M^Y = 79.29$ MPa, 硬化パラメータ $h_M = 827.4$ MPa, $n_M = 0.6$, ボロンは $E_I = 379.23$ GPa, $\nu_I = 0.2$, 体積比率 $f = 34$ % である。長繊維であるため x_3 方向に無限に長い円柱としてある。図には本手法の予測値として繊維 (f) と球 (s) の場合の計算値を示した。このように、介在物の無限長軸に直交する方向の挙動に関しては本手法は比較的实验と定性的に良い整合を示している。

4. 初期降伏特性

4.1 巨視的降伏曲面

x_1 - x_2 面内に円断面を持ち、 x_3 方向に無限に長い弾性円柱介在物のみを含む複合材料を代表的な例として対象とする。弾性補強材を対象として材料パラメータは次のように設定したが、しよせん本理論は弾性なら実測値

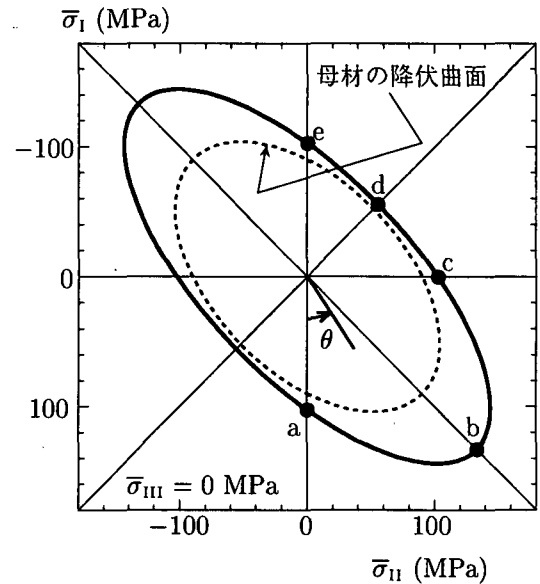


図-3 円柱介在物を含む複合材料の σ_I - σ_{II} 面内の初期降伏曲面

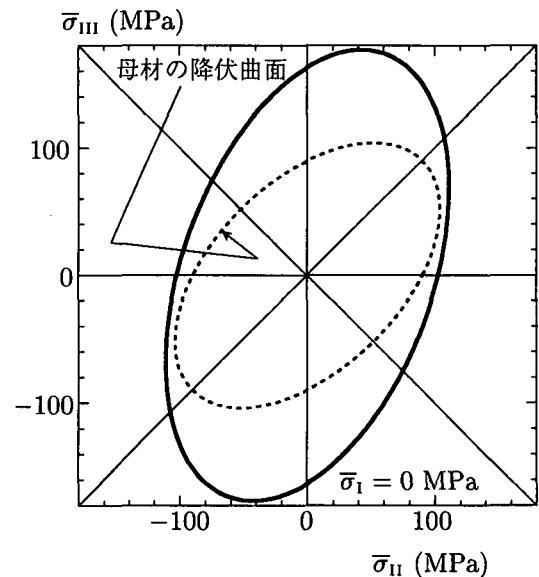


図-4 円柱介在物を含む複合材料の σ_{II} - σ_{III} 面内の初期降伏曲面

の上下境界程度の予測であることもわかっており、特殊な材料や極端な形状を選ばない限り結果にも大きな影響は無いので、このように設定した。母材はヤング率 $E_M = 60$ GPa, ポアソン比 $\nu_M = 0.32$, 初期降伏応力 $\sigma_M^Y = 90$ MPa, 硬化パラメータは $h_M = 970$ MPa, $n_M = 0.55$ であり、介在物は $E_I = 380$ GPa, $\nu_I = 0.2$, 体積比率を 15 % とした。

母材が降伏する場合の初期降伏曲面を求めるだけの場合には、母材内の平均応力増分と巨視的応力増分の関係式 (16a) のドットを取り去った関係式 $\sigma_M = A\bar{\sigma}$ を、母材の降伏条件式 (6) 第 1 式に代入し、この $f_M = 0$ となる関係を $\bar{\sigma}$ について求めればよい。図-3 は巨視的な主応力空間に描いた巨視的初期降伏曲面の、巨視的主応力 $\sigma_{III} = 0$ での断面図である。縦軸下向きが正なのは、

表-1 単純引張り状態（a点）での巨視的降伏曲面の法線成分と巨視的塑性ひずみ増分成分

成分	球形介在物の場合		円柱介在物の場合	
	$\partial f/\partial \bar{\sigma}$	$\dot{\bar{\epsilon}}^p$	$\partial f/\partial \bar{\sigma}$	$\dot{\bar{\epsilon}}^p$
11	8.165×10^{-1}	8.165×10^{-1}	8.265×10^{-1}	8.024×10^{-1}
22	-4.082×10^{-1}	-4.082×10^{-1}	-4.575×10^{-1}	-5.642×10^{-1}
33	-4.082×10^{-1}	-4.082×10^{-1}	-3.280×10^{-1}	-1.945×10^{-1}

この図を平面（断面）図に考えて次の図-4を立面（断面）図に対応させるためである。図中のa点は単軸引張りによる降伏状態を表し、b点は2軸引張り、d点はせん断による降伏状態である。破線が母材そのものの初期降伏曲面で、よく報告されているように弾性介在物による補強効果によって若干半径が大きくなる。降伏曲面が大きくなるひとつの理由は、内部に微視構造を有することによって巨視的応力の静水圧¹成分 $\bar{\sigma}_{kk}$ が降伏に関与するためである。したがって、巨視的な静水圧成分が無いd点のようなせん断状態での半径の拡がり方は、b点の2軸引張り状態のそれに比べて小さくなっている。

一方図-4は、上述の図-3の求め方と同様な方法で描いた、巨視的主応力 $\bar{\sigma}_{II} = 0$ での降伏曲面の断面図である。円柱介在物の長手方向が x_3 軸方向であり、3次元巨視的には複合材料は横等方性材料になっている。そのため、 x_3 方向に関する応力成分を含む降伏曲面には異方性が生じている。このため、同図の太い実線で示した巨視的な降伏曲面は、破線で示した母材の降伏曲面とは異なり、長軸方向が $\bar{\sigma}_{II} = \bar{\sigma}_{III}$ 方向からずれて傾いている。また半径の拡大効果も異方的で、かつ図-3と比べて明らかなように、その影響も大きくなっている。

4.2 巨視的塑性ひずみ増分の法線性と体積ひずみ成分

巨視的な流れ則の法線性の有無を確認するため、初期降伏状態での巨視的初期降伏曲面の法線方向と巨視的塑性ひずみ増分の向きを比較する。与える増分量は、いくつかの大きさの増分を試行錯誤で与え、数値的に差が顕著でなくなるまで小さくした。前節で描いた巨視的応力が主応力状態にある初期降伏曲面上では、結果的に塑性ひずみのせん断成分も生じなかったため、それぞれのテンソルの‘11’、‘22’、‘33’成分を3次元ベクトルの3成分のように扱って正規化し、その内積の大きさで法線性を定量的に比較する。

図-5には、その各初期降伏状態における巨視的初期降伏曲面の法線方向と巨視的塑性ひずみ増分の向きとの内積を示した。この図の横軸 θ は図-3に示した降伏曲面上での $\bar{\sigma}_I$ 軸からの角度で、応力比を表している。縦

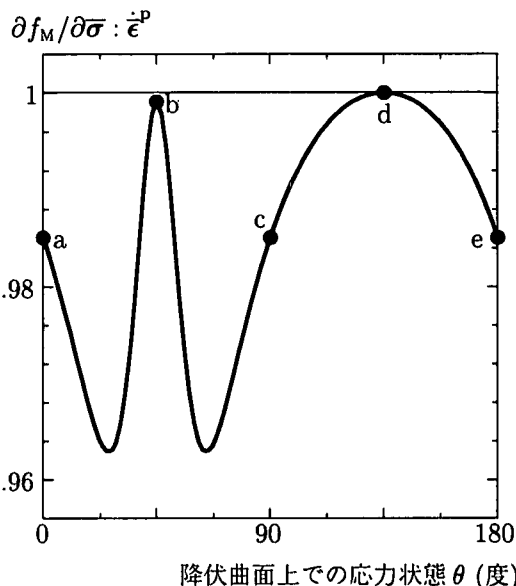


図-5 巨視的降伏曲面法線と巨視的塑性ひずみ増分との比較

軸が2つのテンソルの内積値である。この図中のaからeの記号も図-3のそれぞれの記号の応力状態に対応している。この x_1 - x_2 面内の少なくとも微視構造特性は等方的であり、降伏曲面にも異方性が現れなかったにも拘わらず、介在物形状と向きによる異方性によって静水圧の影響が含まれ、ほとんどの場合に法線則が成立していない。唯一法線則が成立するのは、静水圧成分が存在しない状態、つまり純せん断を与えたd点のみである。

もちろん球形介在物の場合には全方向に等方的なので、法線則は常に成立する。その違いを明確にするために、単純引張り状態（図-3のa点）における各テンソル成分比の値を具体的に表-1に示した。表の左半分は介在物形状が球の場合であり、2つのテンソル成分の値がすべて一致しており、法線則が成立していることを示している。これに対し、上で述べた円柱介在物の場合の各成分は表の右半分のようにになっており、微妙に法線則が成立していない。また同表より、球の場合には塑性的体積ひずみ $\dot{\bar{\epsilon}}_{kk}^p$ は生じていないが、円柱の場合には塑性的に膨張していることが分かる。ここの数値例では法線とのずれ角は3次元空間的には15度程度以下であり、体積比率や材料定数比で変化する。

¹ $\bar{\sigma}_{kk}$ で定義される巨視的応力の第1不変量は通常平均応力と呼ばれるが、「平均」という呼び方が「複合材料の平均挙動」と呼ぶ時の「平均」と紛らわしいので、この研究では静水圧と呼ぶ。正しくは負の静水圧の3倍であるが略す。

5. 初期降伏の現象論的構成モデルとの対比

x_3 方向に整列した無限に長い円柱介在物を含む場合, x_1 - x_2 の等方面内挙動にも静水圧が影響することを前節で示した. しかし, 静水圧が構成関係にどのような影響を及ぼすかについての特性を前節の方法で把握しようとしても, おおまかな傾向しか理解できない. そこでここでは, その x_1 - x_2 面内挙動について本手法の増分計算によって求めた解と, 静水圧の影響を考慮したなんらかの等方的な現象論的構成モデルとを対比することによって, 静水圧の影響特性を明確にする. 具体的には, 静水圧の影響を含んだ現象論的構成則の巨視的材料パラメータを本計算値から同定し, その影響の定量表現を試みるものである.

5.1 静水圧の影響を考慮した非関連構成モデル

静水圧の影響を考慮した構成モデルは多数存在するが, 降伏関数と塑性ポテンシャルに平均応力 (静水圧) 依存を組み込むだけの, 物理的に理解し易く, かつ簡単な表現になっている文献¹³⁾のモデルを用いる. このモデルを巨視的な塑性ひずみ増分 $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ の表現として表すと

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \left(\frac{\sigma'_{ij}}{2\sqrt{J_2}} + \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{I}} \delta_{ij} \right) \quad (29a)$$

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{\bar{H}} \left(\frac{\sigma'_{kl}}{2\sqrt{J_2}} - \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{I}} \delta_{kl} \right) \dot{\sigma}_{kl} \quad (29b)$$

となる. ここに $\bar{H}$ は巨視的硬化係数, σ'_{ij} は巨視的な偏差応力, J_2 はその第2不変量である. また $\bar{F}$, $\bar{G}$ はそれぞれ巨視的な降伏関数・塑性ポテンシャルを表し, 巨視的静水圧 $\bar{I} \equiv \sigma_{kk}$ と巨視的体積ひずみ $\bar{e}_{kk}^p$ および式(9)と同様に定義される巨視的相当塑性ひずみ $\bar{e}^p$ の関数である. その巨視的静水圧 $\bar{I}$ に関する2つの微係数 $\partial \bar{F}/\partial \bar{I}$, $\partial \bar{G}/\partial \bar{I}$ が圧力依存係数・ダイレタンシー係数と呼ばれている. したがって $\bar{G} = -\bar{F}$ の時には関連流れ則であるが, それ以外の場合には非関連流れ則となる. 硬化係数 $\bar{H}$ は関数 $\bar{F}$, $\bar{G}$ のいくつかの微係数で定義される.

前節での初期降伏の平均計算結果から式(29)中の係数を求めるために, まず $\partial \bar{G}/\partial \bar{I}$ は式(29a)の縮約および偏差応力との内積をとり, $\dot{\lambda}$ を等置することにより

$$\frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{I}} = \frac{\dot{\epsilon}_{kk}^p \sqrt{J_2}}{3\sigma'_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p} \quad (30)$$

という関係になる. 右辺は前節での平均計算結果から求まるので, これから $\partial \bar{G}/\partial \bar{I}$ が求まる.

一方, $\partial \bar{F}/\partial \bar{I}$, $\bar{H}$ については近似をしないと同定できないので, まず $\bar{H}$ が巨視的応力増分に依存しないものと仮定する. すると, $\dot{\sigma}_{kk} = 0$ の関係を満足する応力増分を与えた場合に, 式(29)の2式から $\partial \bar{F}/\partial \bar{I}$ には関

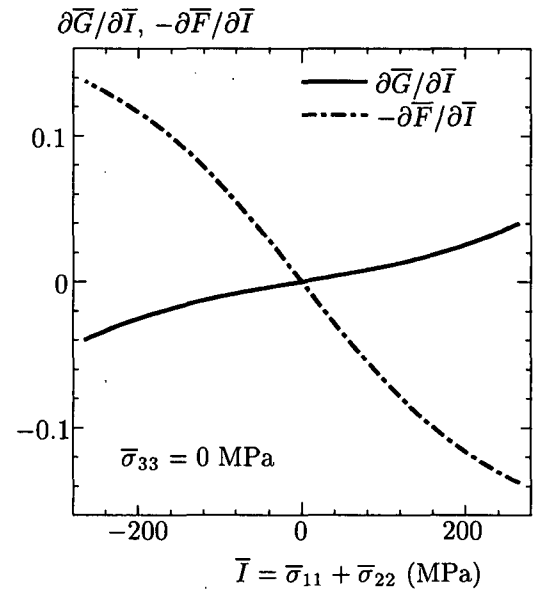


図-6 等方面内の載荷による初期降伏時の $\partial \bar{G}/\partial \bar{I}$, $\partial \bar{F}/\partial \bar{I}$

係なく $\bar{H}$ を

$$\bar{H} = \frac{\sigma'_{kl} \dot{\epsilon}_{kl}^p}{2\sigma'_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p} \quad (31)$$

と求めることができる. この右辺も前節の平均計算結果から求まる. したがって前節で求まる各降伏状態において, 数値的に $\dot{\sigma}_{kk} = 0$ となるような増分を与えれば, $\bar{H}$ をまず同定することができる.

その後, これを実際の増分計算において式(29b)に代入し, さらに $\dot{\lambda}$ を消去すれば, $\partial \bar{F}/\partial \bar{I}$ が

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{I}} = \frac{\sigma'_{ij} \dot{\sigma}_{ij}}{2\sqrt{J_2} \dot{\sigma}_{kk}} - \frac{\bar{H} \sigma'_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p}{\dot{\sigma}_{kk} \sqrt{J_2}} \quad (32)$$

から求まる. ただし, 式(32)の計算の際には $\dot{\sigma}_{kk} = 0$ になるような応力増分を与えないような注意が必要である. 以上の同定操作を, 各初期降伏状態ごとに数値的増分計算をブローブ試験のように行うことにより, 初期降伏曲面上での各パラメータの値を求めることができる.

5.2 巨視的な塑性ポテンシャルと降伏関数の関数形

図-3の種々の初期降伏状態で $\partial \bar{G}/\partial \bar{I}$ と $\partial \bar{F}/\partial \bar{I}$ を上式から求めたのが図-6である. 横軸は, 初期降伏曲面上の各応力状態での巨視的静水圧成分 $\bar{I} = \sigma_{11} + \sigma_{22}$ である. この材料の場合には, 図で明らかなように $\partial \bar{G}/\partial \bar{I}$, $-\partial \bar{F}/\partial \bar{I}$ の値が異なっているため, 巨視的には明らかに非関連流れ則になっている. すなわち, 内部に異方的な微視構造が存在する場合には, 巨視的には非関連流れ則になる. ちなみにこの図の関数形が奇関数であることから, $\bar{G}$ と $\bar{F}$ はともに $\bar{I}$ に関しては凸関数になる.

次に, 母材の物性はそのままにして, 弾性介在物のヤング率を変化させた時の $\partial \bar{G}/\partial \bar{I}$ と $\partial \bar{F}/\partial \bar{I}$ の関数形の変化を, 比較のために同じ縦軸の範囲で示したのが図-7である. $\partial \bar{G}/\partial \bar{I}$, $\partial \bar{F}/\partial \bar{I}$ のいずれも, 介在物のヤング率が小さくなるにつれてその勾配が単調ではない変化

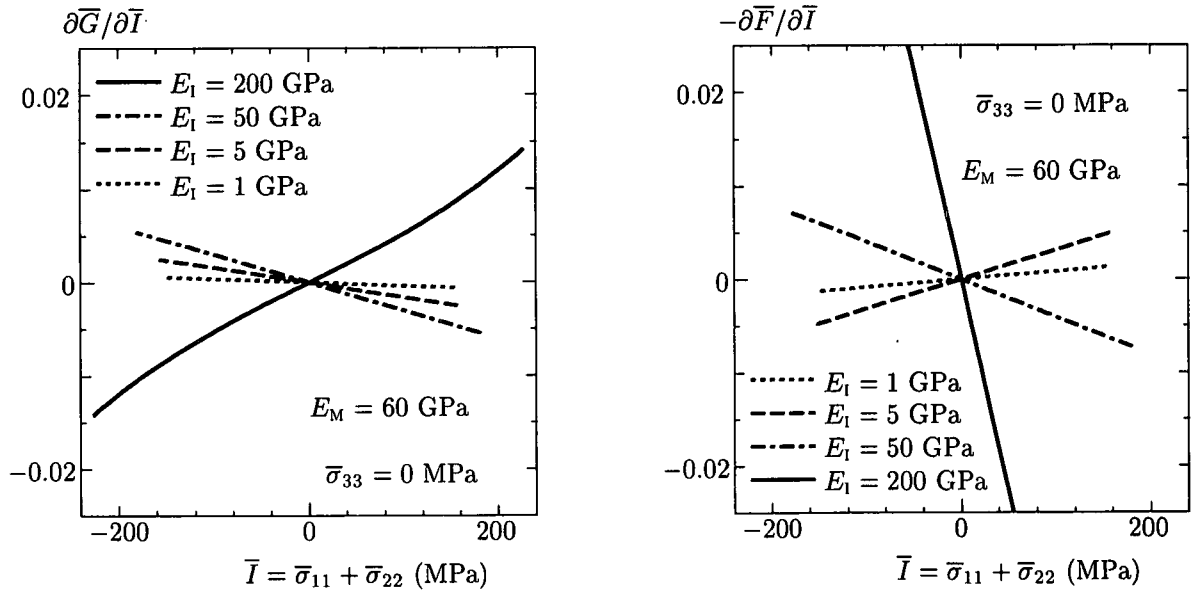


図-7 介在物のヤング率による初期降伏時の係数の変化：ポアソン比は $\nu_M = 0.32$, $\nu_I = 0.2$ に固定。

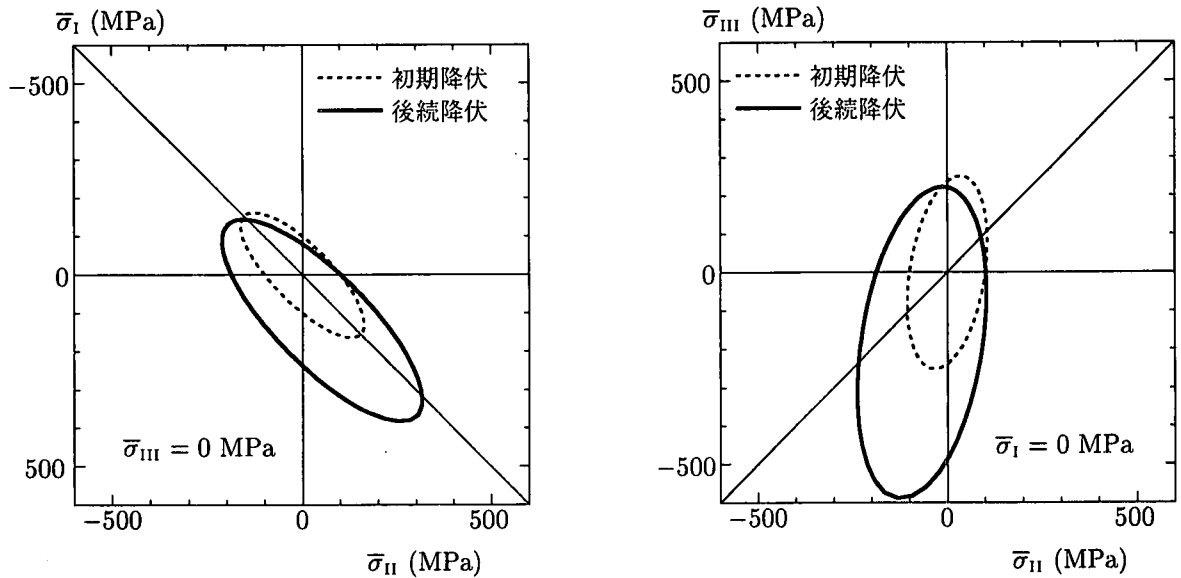


図-8 円柱介在物を含む複合材料の巨視的後続降伏曲面

をする。例えば後者が $E_I = 200$ GPaで持つ負の勾配は $E_I = 50$ GPaで小さくなり、 $E_I = 5$ GPaでは正になる。しかしさらに剛性を小さくすると、その正の勾配も小さくなり零に近づいていく。正負は逆だが前者も同様である。つまり、ヤング率が非常に小さい空隙のような介在物を含むだけの材料の塑性流動特性は、母材のみの塑性流れ則特性とほとんど違いが無く、静水圧の影響は降伏曲面にのみ及ぶことを示している。

一方で $E_I < E_M$ の場合を見ると、巨視的には圧縮状態 $\bar{I} < 0$ において、ダイラテンシー係数が $\partial\bar{G}/\partial\bar{I} > 0$ となっており、圧縮状態における塑性変形（せん断変形）で、塑性的な体積膨張が生じることを示している。つまり、母材より柔らかい介在物を含んでいる場合には、砂等と同じように非可逆の体積膨張が生じることを示唆している。砂の粒子性のようなものを一切含まない連続体複合材料でも、砂のダイラテンシーのような現象

が現れるのは興味深い。このことを材料開発という観点から利用することを考えると、例えば、ある圧縮荷状態状態で弾性的体積収縮と塑性的体積膨張が一致し、見かけ上体積変形が生じないような材料を開発するといった場面で、このモデルはその材料パラメータや介在物の体積比率の近似的な予測に使えるわけである。

当然ながら $E_I = E_M$ の場合（一点鎖線）には介在物と母材の弾性定数が近いので、 $\partial\bar{G}/\partial\bar{I}$ と $-\partial\bar{F}/\partial\bar{I}$ が非常に似ており、関連流れ則に近づいていることが分かる。もちろん $E_M = E_M$ かつ $\nu_I = \nu_M$ の場合には $\partial\bar{G}/\partial\bar{I}$, $-\partial\bar{F}/\partial\bar{I}$ ともに零になる。

6. 後続降伏とその現象論的近似構成則

6.1 巨視的後続降伏曲面

図-2で対象とした、弾性円柱介在物のボロン繊維を

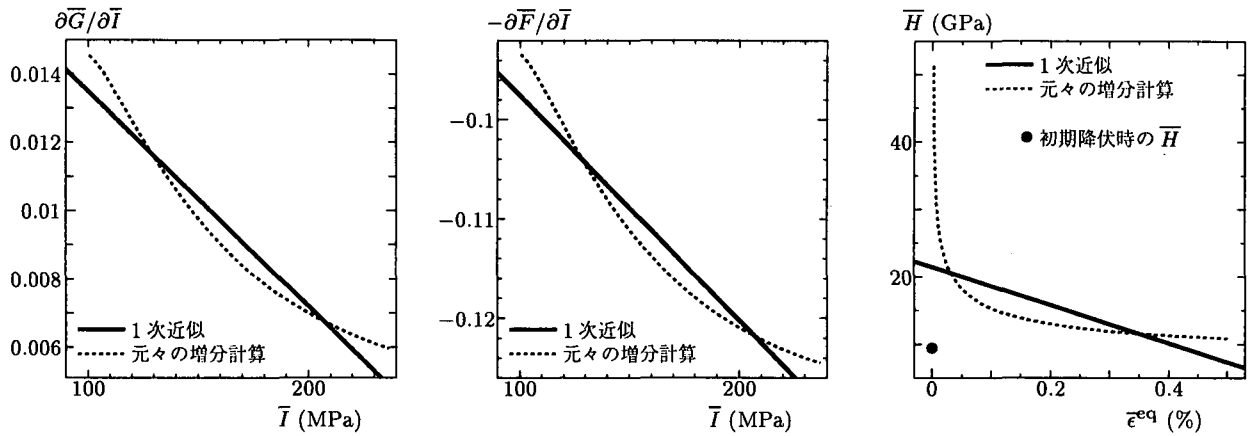


図-9 後続降伏の静水圧の影響を考慮した材料パラメータの近似

含む 2024A1 弾塑性母材の複合材料を再度対象として、初期降伏後も増分計算を繰り返していくことによって、後続降伏における特性を求める。後続降伏曲面を求めるには、ある所定の変形状態まで増分計算を継続させた後、応力空間でのブロー試験のように種々の応力比率で除荷計算をし、各比率ごとに再降伏する応力状態を求めた上でそれを曲線で結べばよい。図-8 は、 x_1 方向に単軸引張りをして巨視的相当塑性ひずみが 0.5 % に達した状態で、上述のようにして求めた巨視的後続降伏曲面である。

本手法によって求めた巨視的後続降伏曲面は、母材そのものの等方硬化によってその半径を拡大させながら、同時に移動硬化していることが分かる。このように微視的には等方硬化のみの材料設定でありながら巨視的に移動硬化する現象は、すでに文献¹⁴⁾でも指摘されているが、その原因は残留応力である。つまり、母材が降伏した時の応力増分は式 (16a) で与えられ、初期降伏後は除荷しても右辺第 2 項が残留応力として残ることになる。後続降伏に関しても降伏条件は式 (6) 第 1 式で与えられることから、巨視的には見かけ上の移動硬化が起こることが、式の表現からも明らかである。

また初期降伏と同様、後続降伏においても σ_I - σ_{II} 面内での塑性硬化（等方・移動のいずれも）の程度より、 σ_{II} - σ_{III} 面内での硬化の程度が大きい。また σ_{II} - σ_{III} 面内での異方性（長軸の傾き）は、初期降伏の異方性の程度とほぼ同じであることも分かる。

6.2 複合材料の近似構成則

前節のような増分計算を、それぞれの微視構造を持つ複合材料で実施すれば、その巨視的弾塑性挙動は把握できる。しかし式 (26) から分かるように、一種類の介在物しか存在しないモデルであっても計算は非常に複雑である。実際には種々の形態・方向・物性を有する介在物が同時に分布している場合が普通であり、このような解析的な手法がどの程度まで適用できるかは検討の余地がある。またそういった解析を境界値問題に適用するには更なる困難を伴う。ここではその一種類の介在物しか

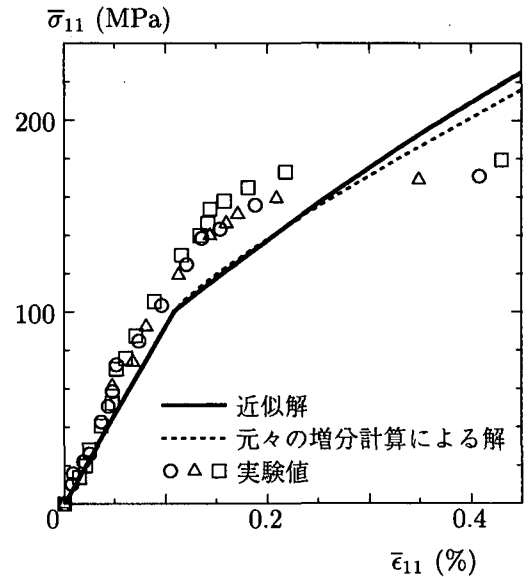


図-10 複合材料の巨視的な近似構成則の適用例

存在しない場合に限定するが、例えば境界値問題に適用し易いように、現象論的構成モデルで近似することを試みる。

上の増分計算で時々刻々求める結果から、前節で用いた現象論的構成則のパラメータ $\partial \bar{G} / \partial \bar{I}$ 、 $\partial \bar{F} / \partial \bar{I}$ 、 $\bar{H}$ を計算してみる。例えば第 3 節で引用したボロン繊維で補強された複合材料の単軸引張りを例として、このパラメータを同定した結果が図-9 の点線であり、実線がその直線近似である。前述のように、このパラメータは $\bar{I}$ のみ、あるいは $\bar{\epsilon}^p$ のみの関数ではないが、定義通りに材料パラメータを同定するのは困難であり、ここでは近似の可能性のみを示すに留めたいので、この図-9 では、 $\partial \bar{G} / \partial \bar{I}$ と $\partial \bar{F} / \partial \bar{I}$ は巨視的静水圧 $\bar{I}$ の関数とみなし、 $\bar{H}$ は巨視的相当塑性ひずみ $\bar{\epsilon}^p$ の関数とみなして値を求めた。この 3 つのパラメータを近似的ではあれ、例えば $\bar{I}$ や $\bar{\epsilon}^p$ 等の関数として陽に求めておけば、複合材料としての現象論的構成モデルを構築でき、種々の境界値問題の有限要素解析等にも使い易い。

実直線で示される近似関係の方で 3 つのパラメータ

を与えて描いた単軸引張りの履歴が、図-10の実線である。また、同図の破線が元々の増分計算による予測値で、実験値も同時に載せてある。このように、パラメータの近似は、特に硬化係数 $\bar{H}$ が非常に低次の線形近似であるにも拘わらず、巨視的挙動の近似構成則は元々の増分計算による予測値および実験値に近くなっている。同定した履歴と近似度の検討をする履歴とが同じなので、この近似度がいいのは当然ではあるが、現象論的な構成モデルで複合材料の挙動を近似する可能性を示すことはできたと考える。

ただし、ここで用いた母材の硬化則にはべき乗則を用いており、塑性ひずみが零の初期降伏状態では発生する塑性ひずみ増分が無限大になってしまつて数値的に解を得ることができないため、初期降伏でだけ計算上非常に小さな塑性ひずみを設定して近似した。図-9の初期降伏時の $\bar{H}$ の不連続な予測値が、この計算上での近似による齟齬を示している。 $\bar{H}$ の近似でのみ、この初期降伏時の値を除いて実線の回帰直線で近似している。

7. まとめ

増分型の森・田中理論に流れ則を組み込んだ手法を定式化することにより、次のような知見を得た。

- 2相問題の増分塑性理論に対して、陽な形で森・田中理論を拡張した。
- 数値的に後続降伏曲面を描き、見かけ上の移動硬化の原因が残留応力にあることを式の形でも示した。
- 巨視的な塑性ひずみ増分と巨視的初期降伏曲面の法線とを比較することで、一般に複合材料では内部の微視構造の存在によって非線形および非関連性を有することを定量的に示した。
- 現象論的モデルと比較することによって静水圧等の影響を定量的に示した。
- 現象論的な巨視的材料パラメータを用いた近似モデルの構築を試み、実験値とも比較的良い整合が見られた。

参考文献

- 1) 野瀬哲郎：超低熱膨張セラミックスの開発，東北大学－新日鉄シンポジウム「鉄と社会」，東北大学未来科学技術共同研究センター／新日鉄技術開発本部，2000。

- 2) Mori, T. and Tanaka, K.: Average stress in matrix and average energy of materials with misfitting inclusions, *Acta Metall.*, Vol. 21, pp. 571-574, 1973.
- 3) 岩熊哲夫・堀宗朗・木谷朋之・村外志夫：内部に微視構造を有する材料の平均弾塑性関係の一評価，構造工学論文集，Vol. 39A, pp. 375-380, 1993.
- 4) Hill, R.: Continuum micro-mechanics of elastoplastic polycrystals, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 13, pp. 89-101, 1965.
- 5) Tandon, G. P. and Weng, G. J.: A theory of particle-reinforced plasticity, *J. Appl. Mech., Trans. ASME*, Vol. 55, pp. 126-135, 1988.
- 6) Budiansky, B. and Wu, T. T.: Theoretical prediction of plastic strains of polycrystals, *Proc. of the 4th U.S. National Congress of Applied Mechanics*, pp. 1175-1185, 1962.
- 7) Ju, J. W. and Sun, L. Z.: Effective elastoplastic behavior of metal matrix composites containing randomly located aligned spheroidal inhomogeneities. Part I: micromechanics-based formulation, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 38, pp. 183-201, 2001.
- 8) Mura, T.: *Micromechanics of Defects in Solids*, Martinus Nijhoff Publ, 1982.
- 9) Malvern, L. E.: *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice-Hall, 1969.
- 10) Nemat-Nasser, S. and Hori, M.: *Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials*, North-Holland, 1993.
- 11) Sun, L. Z. and Ju, J. W.: Effective elastoplastic behavior of metal matrix composites containing randomly located aligned spheroidal inhomogeneities. Part II: applications, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 38, pp. 203-225, 2001.
- 12) Ju, J. W. and Zhang, X. D.: Effective elastoplastic behavior of ductile matrix composites containing randomly located aligned circular fibers, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 38, pp. 4045-4069, 2001.
- 13) Nemat-Nasser, S. and Shokooh, A.: On finite plastic flows of compressible materials with internal friction, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 16, pp. 495-514, 1980.
- 14) 松井和己・寺田賢二郎・京谷孝史・岩熊哲夫：弾塑性複合材料のミクロ構造を反映した巨視的な降伏曲面の評価，土木学会論文集，No. 682/I-56, pp. 335-346, 2001.

(2002年4月19日 受付)