

三次元 Delaunay 分割を用いた 地下トンネル三次元有限要素分割モデルの作成

Mesh Generation of Three-dimensional Underground Tunnels Based on the Three-Dimensional
Delaunay Tetrahedration

野島和也*・川原陸人**

Kazuya NOJIMA and Mutsuto KAWHARA

*学生会員 中央大学大学院 理工学研究科 土木工学専攻 (〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27)

**正会員 工博 中央大学教授 理工学部土木工学科 (〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27)

This paper presents a mesh generation technique for underground tunnels based on the 3-D Delaunay triangulation. It is a rather difficult task to make the mesh generation of tunnels because it is not easy to obtain the shape of the edge at a point where some tunnels cross each other. Thus the method which can obtain the models without calculating the edge is required. In this paper, such a method is presented. This is suggested by shield tunneling method which is used in civil engineering field. In this method, the Boolean operation is performed by using the tunneling shield module. This method depends on 3-D Delaunay triangulation. The 3-D Delaunay triangulation is useful to divide a domain because it can make the tetrahedra only using the nodes which are distributed arbitrarily. This modeling process consists of two parts. The first is nodal distribution part. The second is Delaunay triangulation part. This paper gives some applications of this method to the complicated tunnel models.

Key Words : *Delaunay Triangulation, Shield Modeling, Boolean Operators*

1. はじめに

ここ数年来、コンピュータの性能の飛躍的な向上と高性能なハードウェアの低価格化によるパーソナル・コンピュータの普及に伴い、コンピュータによる三次元解析がより身近なものになってきた。しかし、その一方で、解析の対象はより大規模かつ複雑になっている。これゆえ、三次元の有限要素メッシュを人間の手で作成することはほぼ不可能であり、三次元領域に対してのモデル生成は、依然労力の必要となる作業である。本研究で扱う三次元の地下トンネルモデル作成もそのうちの一つである。たとえば、図-1のような三本の直線のトンネルが交差している場合でも、その壁面の形状は非常に複雑なものであり、モデルの作成は容易ではない。

複雑化する解析対象に対して、有限要素メッシュ作成の自動化が進められてきている。二次元領域に対する自動要素分割法として、Delaunay 三角分割法や Advancing front 法等が広く使われている。Delaunay 三角分割法は任意分布する節点を利用して領域を三角分割する手法である。この手法は、任意に配置された節点から有限要素解析のための要素メッシュを作成することが可能である。また、谷口の修正デローニー三角分割法¹⁾では、Delaunay 三角分割法を二次元非凸領域に対応させており、これを利用する事で、二次元領域ではほとんどの場合要素分割を行うことができる。し

かしながら、これらの手法は与えられたモデルの境界データから、有限要素の生成を行うものであるため、実際に解析を行うためのメッシュを作成するには、あらかじめ形状を定義する必要がある。三次元トンネルのモデルおよび有限要素メッシュの生成にあたって問題となるのは、三次元トンネルの形状データ作成自体が困難であること、修正デローニー三角分割法の非凸領域対処方法は三次元に拡張することが出来ず、三次元 Delaunay 分割法は、凸領域にしか適応できないことである。そこで本研究では、任意に分配された節点群から要素生成が可能な Delaunay 分割法の利点を生かし、ソリッドモデリング²⁾等で用いられるブーリアン演算を節点をベースに行うことにより、CAD 等を用いることなく、地下トンネルのモデル作成、及び有限要素の作成を同時に行う手法を提案する。また、三次元要素生成の基礎的アプローチとして、二次元 Delaunay 三角分割法の三次元への拡張をおこなう。この手法によるモデル作成例を示した後、生成された有限要素メッシュの有効性を示すために、簡単な計算を行う。

2. Shield Modelling

地下トンネルのモデルは、ブーリアン演算的な処理を行うことで求めることができる。つまり、トンネルまわりの地盤のモデルは、地盤とトンネル群との差で表

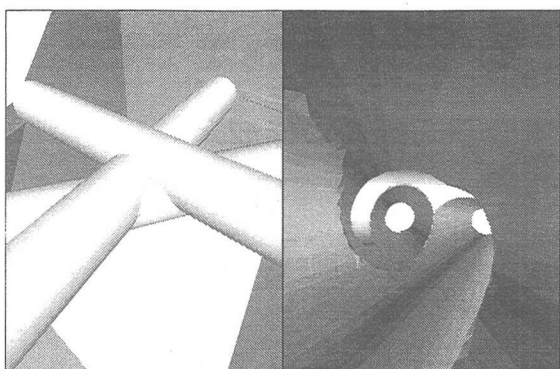


図-1 Three Tunnels Cross at a Point

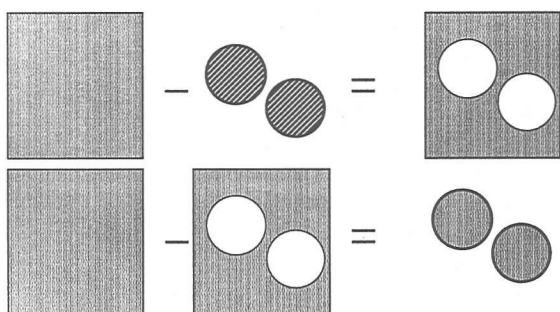


図-2 差の演算

することができ、トンネル内部のモデルはトンネルそれぞれの和、または、地盤と地盤周りのモデルの差で表すことができる(図-2)。ここで、提案する地下トンネルのモデル作成方法は、非常に簡単な方法でブーリアン演算的操作を行い、地下トンネルのモデルを作成するものである。

操作は大きく、「節点の分配によるトンネル形状の作成」と「Delaunay 分割法による要素分割」、「地盤の有限要素とトンネルの要素の分離」に分かれている。また、この手法では、トンネルの始端と中間、終端の座標と、各トンネルの径といった、少ない入力データからモデル作成を行うことが可能である(図-3)。

地盤領域とトンネルの「差」の操作は、図-4に描かれるように地盤を掘り進めるようにして行う。この手法では、地盤領域に何らかの方法で節点を配置した後、シールドを用いてトンネル内の節点を取り除くことで「差」を表現する。実際の操作に関しては、以下に説明する。トンネル形状を求める操作は、複数のトンネルが存在し、それぞれが交差する場合も考慮に入れている。トンネルが非直線である場合にも対応している。

2.1 節点の分配によるトンネル形状の作成

この方法では、図-5に示されるシールドを用いてトンネルの形状の生成を行う。このような厚みの無いシールド状の判定モジュールを用いることにより、曲線部

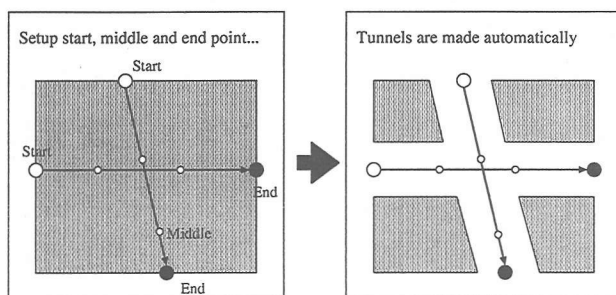


図-3 最小の入力データでのモデリング

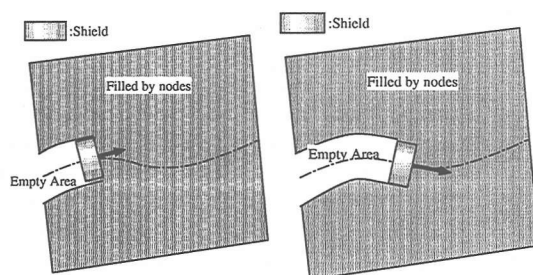


図-4 シールドモデリング概略図

を持つトンネルの形状生成が可能になる。図-6に示されるように、シールドはトンネルの始端から終端まで、毎ステップ ds づつ軸に沿って動く。図中の ds はトンネル壁面のメッシュ幅である。シールドは ds 動くごとに、領域上のすべての節点に対して判定を行い、シールド内に含まれると判断した場合、その節点を取り除く(図-7)。この節点のシールド内外の判定は、代数を用いた凸多面体の内外判定計算³⁾⁴⁾⁵⁾によりシールドを構成する全ての多面体に対して節点が含まれるかどうかで判断される。シールド作動後には、トンネル内に存在した節点すべてが取り除かれる。シールド幅の $d = 2ds$ は、トンネル内部に節点を残さず、曲線部でシールドが大きくなり出さないような値をとった。初期の節点配置によっては、トンネル内の節点を取り除いただけの節点分布状態で要素分割を行うと、トンネル壁面が滑らかにならない。そこで、スムージングのために壁面に節点を分配する(図-8)。得られた節点群に Delaunay 分割法を用いると、四面体要素メッシュを生成することができる。トンネルが複数あり互いに交差する場合がある場合、壁面においた節点がある他のトンネルの中に残る(図-9)。これを除去するために、図-10に示すようにトンネルの径に対して β だけ小さな径を持ったシールドを用いる。以上の操作で、トンネルの形状が節点により表される

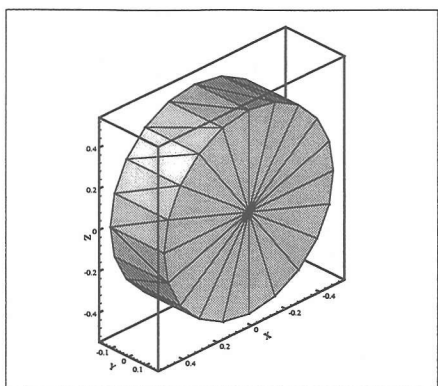


図-5 トンネル形成のためのシールド

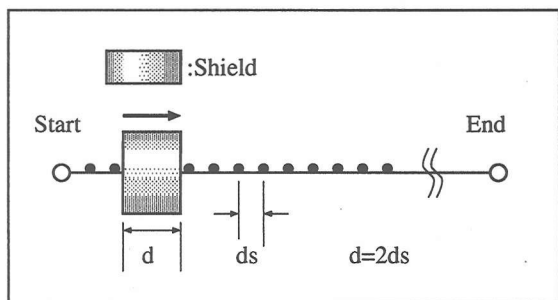


図-6 シールドの軌跡

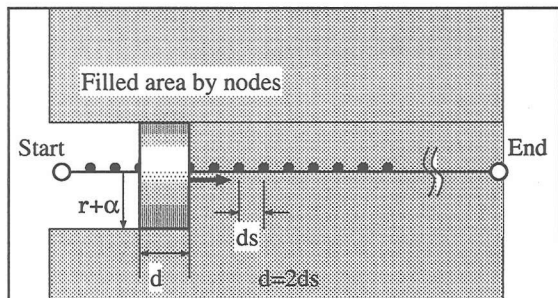


図-7 シールドによる節点の除去

2.2 地盤の有限要素とトンネルの要素の分離

2.1 節で作成した節点分布に、三次元 Delaunay 分割法を適用すると、四面体要素群が得られる。しかし、三次元 Delaunay 分割法は非凸領域を扱うことが出来ないため、領域外であるトンネル内部も四面体要素で満たされることになる。Delaunay 分割法を適用した時点では各要素が領域外であるか領域内であるか区別できない。モデルを完成させるためには、要素が領域外か領域内か判断し、領域外の要素を取り除く必要がある。この節では、2.1 節で作成した節点分布に、三次元 Delaunay 分割法を適用して、作成した四面体群に、一時的な仮節点を導入することで、領域外に生成された要素を分離する方法について述べる。以下に手順を示

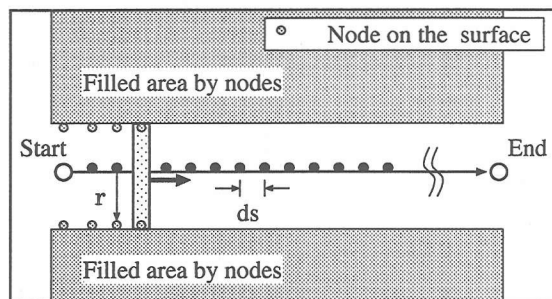


図-8 壁面節点の分配

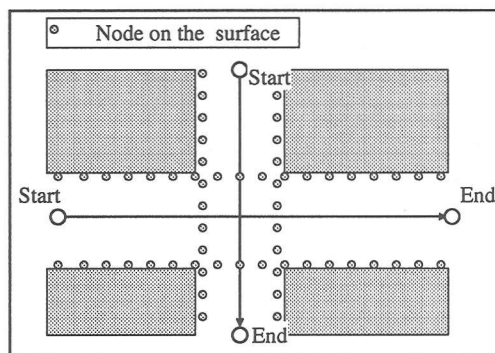


図-9 壁面節点のトンネル内への残留

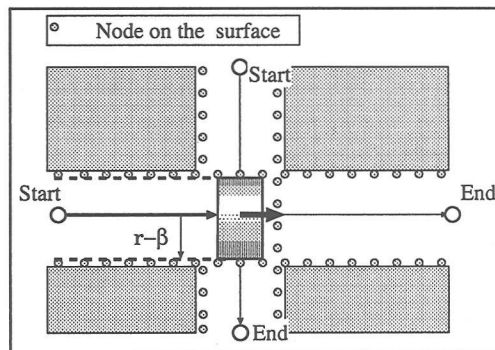


図-10 壁面節点の除去

す。簡単のため、図-11 に示すように、二次元の非凸領域を例に説明する。

1. 図-11 のモデルに対して、図-12 に示す節点の分配を行う。
2. 図-12 の節点配置に Delaunay 三角分割適用すると、図-13 に示すような要素分割が得られる。
3. 円の中心に節点を追加する (図-14)。
4. 図-14 の節点配置に再び Delaunay 三角分割適用し、トンネル内の要素を修正する。
5. 修正の結果、図-15 のようにトンネル内の要素はすべて中心の節点に接するようになり、これらの要素を領域外と判定することができる。
6. トンネル中心に置いた節点に接する要素を取り除く。

結果、トンネルの形状を表現することができ、かつ、有限要素分割も完成する。以上、トンネル形状作成およびトンネル周りの要素作成について示した。三次元に於いても、やはりトンネルの内部に仮節点を置くことで要素の領域内外を判定できる。トンネル内部の要素作成する場合は、上記の手順5で領域外と判断された要素と仮節点を保存し、領域内と判断された要素を削除する事で実現できる。このとき、仮節点をトンネル中心だけでなく、トンネル半径内に分布させることで、計算に適用可能な要素群を作成することが出来る。

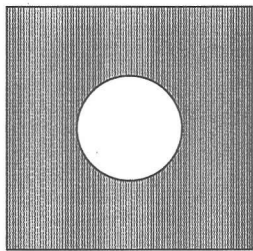


図-11 非凸領域であるトンネル断面

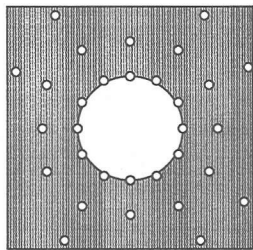


図-12 トンネル周りの節点配置

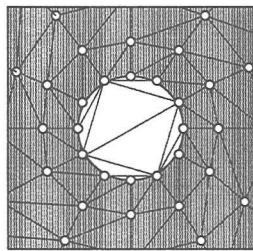


図-13 Delaunay 分割の適用

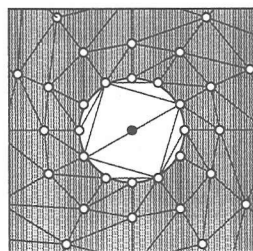


図-14 トンネル断面中心への節点の追加

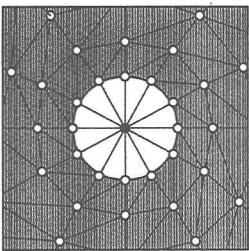


図-15 トンネル内の要素の修正

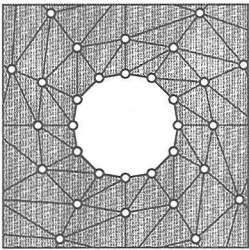


図-16 中心に置いた節点を含む要素の除去

3. Delaunay 分割法

Delaunay 三角分割法 (Delaunay Triangulation) は、与えられた節点群を幾何学的に三角形結合させる手法である。Delaunay 分割法により作成された三角形は、その外接円に他の三角形の頂点を含まないという性質がある (図-17)。この方法を用いると、三角形の辺の長さが均等になるように三角分割され、もっとも正三角形に近くなるように分割される。このことから、Delaunay 分割法は有限要素法で求められる三角形要素の幾何学形状を満たしやすい。谷口の開発した修正デローニー三角分割法¹⁾では、非凸領域で起こる問題も対処した自動要素分割方法が提案され、非常に利便性の高いものになっている。こうして、自動要素分割法として有限要素法の分野で幅広く用いられている。Delaunay 分割法の三次元拡張については、現在も研究がなされている⁶⁾⁷⁾⁸⁾。以下に、Delaunay 分割法の三次元への拡張について述べる。ここで、三次元 Delaunay 分割の過程で起こる、不適格要素の発生抑制方法を提案する。

一般に Delaunay 三角分割法を三次元に拡張する場合、二次元に於ける三角形を四面体に、外接円の概念を外接球に変更する。つまり三次元 Delaunay 分割は、外接球に他の四面体の頂点を含まない四面体群に分割することになる。図-18 に示されるように、外接球 (abcd) は点 e を含まず、外接球 (cbae) は点 d を含まない。

3.1 スーパーテトラヘドロンを用いた四面体分割

谷口によるスーパートライアングル¹⁾を三次元に拡張したスーパーテトラヘドロンを用いることで、四面体要素分割をより簡単に行えるようになる。その生成手順を以下に示す。

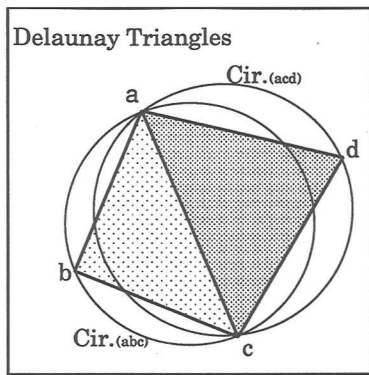


図-17 二次元 Delaunay 三角分割

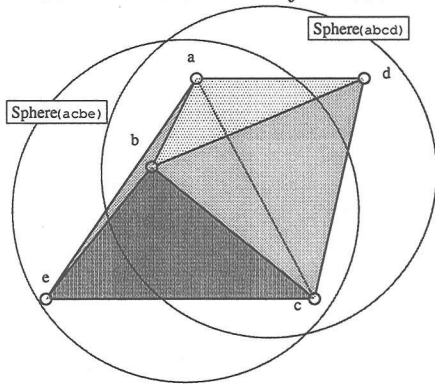


図-18 三次元 Delaunay 分割

1. 図-19 に示すように 4 つの仮想節点を配置することによりスーパーテトラヘドロンを据える
2. 最初の節点をスーパーテトラヘドロンの中に置き、この節点によりスーパーテトラヘドロンを 4 個の四面体に分割する (図-20)。
3. 他の節点をスーパーテトラヘドロンの中に置く。
4. 節点を含む四面体を探索する。
5. 新しく置いた節点とそれを含む四面体の頂点を結んで 4 つの新しい要素に分割する。
6. 次に [3] から [5] 間での過程をすべての節点に対して行う。
7. 頂点にある節点が仮想節点 h, i, j or k である四面体を取り除き四面体分割を終了する。

以上の操作で扱うスーパーテトラヘドロンは解析領域をすべて包括するように設置する必要がある。この方法を用いれば節点群から四面体群を生成することができる。しかし、ここで得られた四面体は必ずしも Delaunay 四面体の条件を満たしているとは限らない。そこで、そのような四面体に対しては Delaunay 四面体になるように置き換え作業を行わなくてはならない。この置き換え作業のことをスワッピングといい、次にその手順を示す。

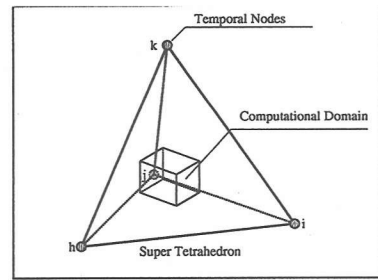


図-19 スーパーテトラヘドロン

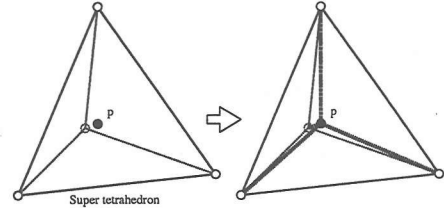


図-20 スーパーテトラヘドロンの細分化

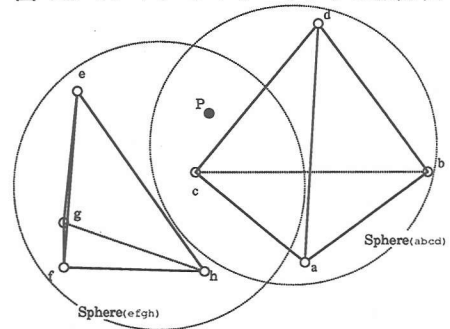


図-21 節点 P を外接球内に含む四面体

3.2 スワッピング アルゴリズム

ここでは、節点 P を外接球に含む四面体に対して置き換え作業を行う。節点 P は前述のスーパーテトラヘドロンを用いた四面体の細分化作業の過程で、スーパーテトラヘドロンに追加される節点である。

四面体置き換えの手順

1. 節点 P を外接球に含む四面体 (図-21)) を探索し、スワップリストに加える。
2. 集めた四面体群の共有辺を取り除いて多面体を作成する (図-22)。
3. 多面体の表面の三角形と節点 P を結び四面体を作成する (図-23)。
4. [3] の作業を多面体のすべての表面三角形に対して行う。Delaunay 四面体を作成する。 (図-24)

以上の操作で非 Delaunay 四面体と Delaunay 四面体との置き換えを行うことができる。

3.3 扁平要素生成の抑制

上記のスワッピング作業において、外接球の半径及び外接球の中心と追加節点の距離の計算における数値誤差により、計算格子として望ましくない要素が発生する可能性がある (図-25)。一度このような要素が生成さ

れてしまうと、要素外接球の内外判定が正しく行われず、これ以降のスワッピングで要素の隣接関係が崩れてしまい、要素生成の継続が不可能となる。従って、要素生成のロバスト性を強化する上で、この様な要素の生成を抑制する必要がある。まず、図-26 に示されるように、点 P が外接球表面上にあるか球表面に非常に近い場合、外接球内に節点 P を含んでいるにもかかわらず、計算誤差により点 P を外接球に含まれないと判断してしまうことがある。この計算誤差は経験的に倍精度 (64bit) 計算のとき外接球の半径の 10^{16} 倍前後である。外接球の内外判定の誤判は、外接球の半径と節点と球中心との距離の差が外接球の半径の 10^{16} 倍以下で頻繁に起こり、最大 10^{14} 倍で起こっている。これに対して、本研究では、節点と球中心との距離 ρ が、球の半径 r と許容誤差 ($r \times \varepsilon$) の和よりも小さいときはその節点が球に含まれると判定する。ここで、 ε は小さい数であり、 10^{13} を用いた。更に図-27 に示すように、節点 P が二つの四面体の共有面の延長面上かつ外接円周上に存在する場合は、一方の四面体では節点 P が外接球内、もう一方では外接球外と判断されてしまうことがある。この場合、スワッピングの際に、本来共有面であるはずの面と節点 P により四面体が作られることになり、体積がゼロの要素が発生する。これを回避するために、スワップを行うとき節点 P が多面体表面の平面状にある場合は、もう一方の四面体も強制的にスワップリストに加える。これにより、体積ゼロ以下の要素の発生を抑制することができる。

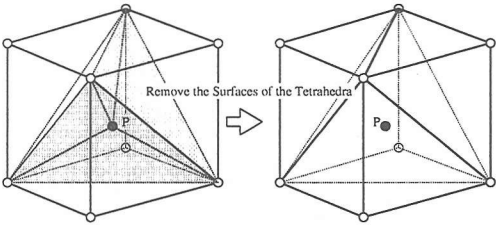


図-22 多面体の作成

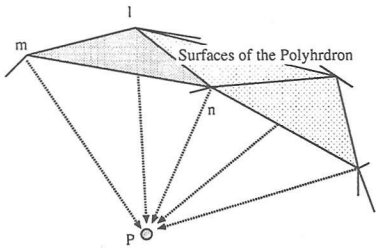


図-23 新しい四面体群の作成

4. 数値解析例

この手法の有効性を示すために、二つのモデルを用いて有限要素生成を行う。第一のモデルとして直線の

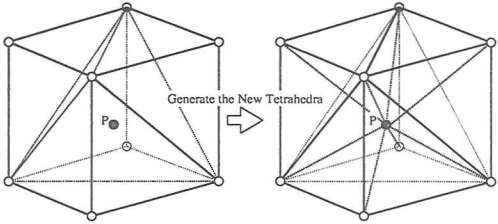


図-24 Delaunay 四面体作成

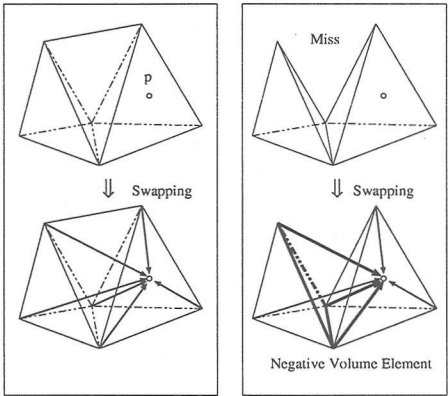


図-25 体積負の要素の発生

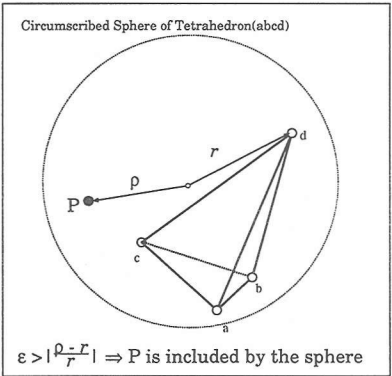


図-26 計算誤差の考慮

トンネルだけで構成したモデルを用い、第二のモデルとして浅い角度で交差する個所のある直線のトンネルと曲線形のトンネルので構成したモデルを用いる。また、生成された有限要素の有効性を示すために簡単な計算を行う。

4.1 作成モデル例 A

ここでは7本の並行したトンネルと、それらに直行する1本のトンネルのモデルを用いた。それぞれのトンネルの半径を0.2とし、全体領域を $4.0 \times 2.0 \times 2.0$ としている。モデルは図-28に示す。図-28では、表面の様子が示されているが、入力データは各トンネルの始端、終端の座標データと半径だけである。このモデルに対しての有限要素メッシュ生成結果を図-29に示す。節点数が8084、要素数は24908となっている。交差部分のトンネル表面の様子を図-30と図-31で確認する

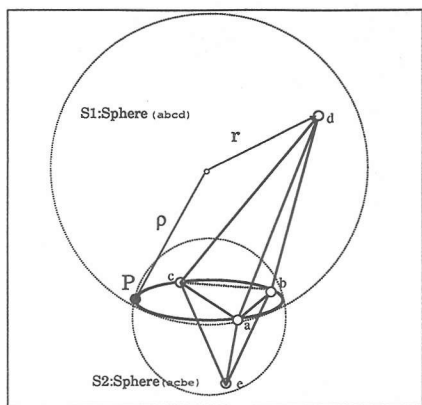


図-27 Delaunay 分割の退縮問題

ことができる。図-32 に示す要素メッシュは、外部領域として分離したトンネル内部の要素群である。

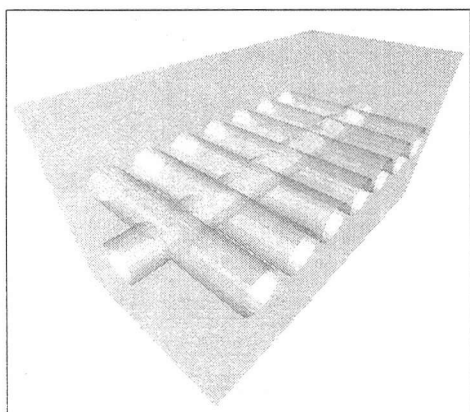


図-28 直線で構成されたモデル

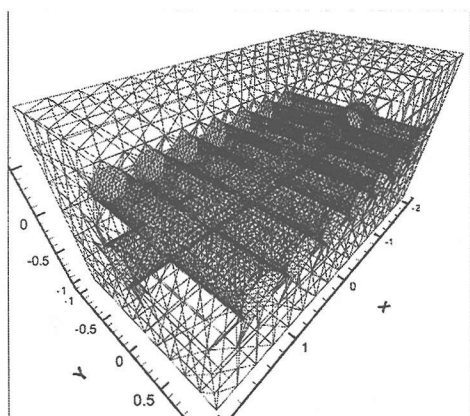


図-29 メッシュ生成結果

4.2 作成モデル例 B

ここでは、浅い角度で交差する個所のある直線のトンネルと曲線形のトンネルの構成したモデルを用いる。モデルは、図-33 に示し、このモデルに対しての有限要素メッシュ生成結果を図-34 に示す。図-35 と

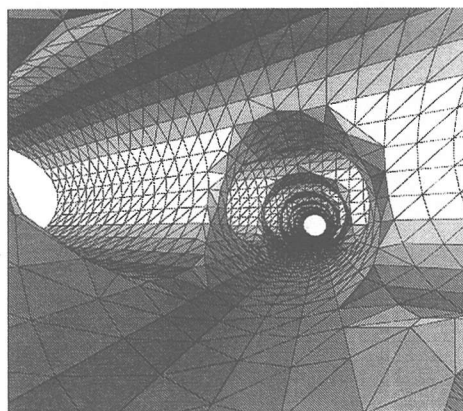


図-30 トンネル交差部でのトンネル内部からの眺め

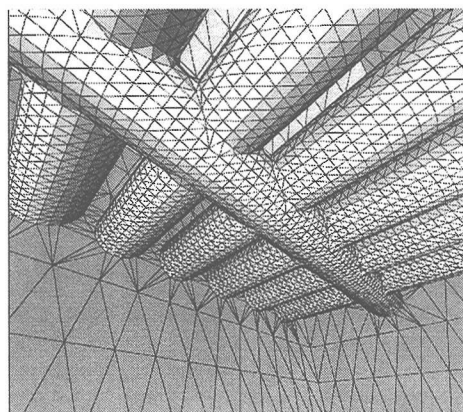


図-31 トンネル交差部でのトンネル外部からの眺め

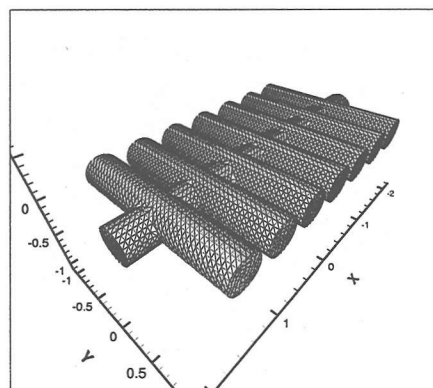


図-32 トンネル内部の有限要素分割結果

図-36 より、曲線部分及び、浅い角度での交差部での形状生成が正確に行われていることがわかる。

4.3 計算的用例

作成モデル例 A と同じトンネル配置のモデルを用いて解析を行う。ただし、流体解析を行うにあたり、中央のトンネルを若干長く取っている。解析には、図-37 と図-38 に示す有限要素メッシュを用いる。ここでは、トンネルをパイプとして考え、トンネル内部のモデルではパイプ内の流れを想定した非圧縮粘性流の解析を、

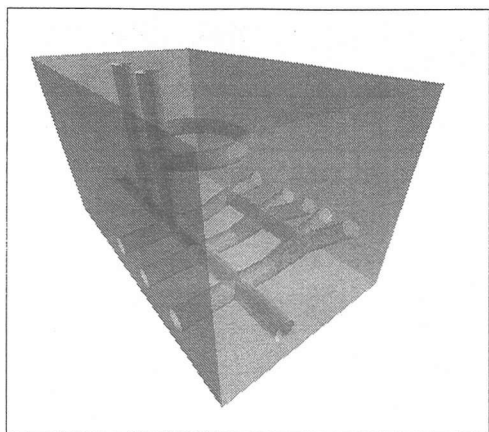


図-33 角度の浅い交差点と曲線形のトンネルのあるモデル

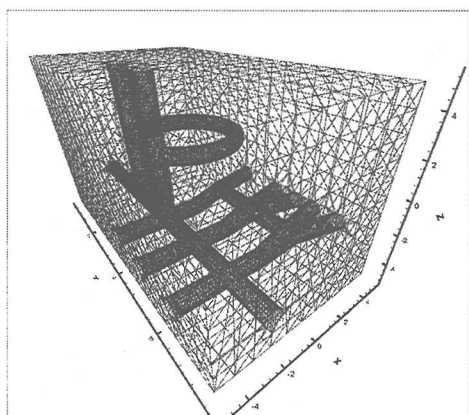


図-34 メッシュ生成結果

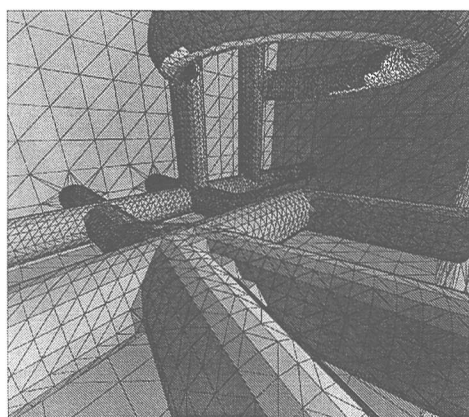


図-35 トンネル外部からの眺め

地盤モデルではパイプ表面からの浸透流の計算を行う。地盤モデルの節点数は42,774、要素数は225,314で、トンネル内部モデルの節点数は19,148、要素数は93,455である。非圧縮粘性流れ解析に際しては、松本らの提案する気泡関数要素⁹⁾¹⁰⁾を用いた、混合補間を行っている。圧力場に対して線形一要素、流速場に対して気泡関数要素を適用する。

地盤のモデルでは初期物質質量 $\phi_{t=0} = 0$ ，トンネル壁面と領域上端及び下端にそれぞれ $\phi = 1$, $\phi = 0$ を与える

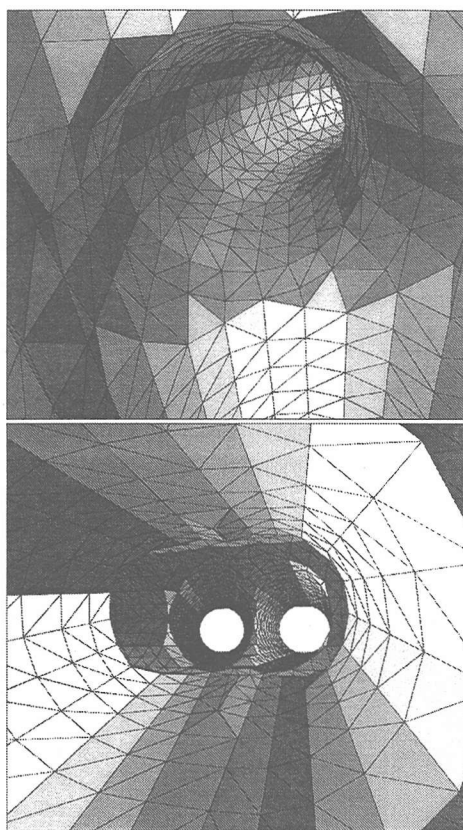


図-36 トンネル交差点の拡大図

(図-39). パイプ内の流れのモデルでは、図-40に示すように、 $x = -4$ と $x = 4$ に於いて x 方向に流速を与える。図-40中の u, v, w はそれぞれ、 x, y, z 方向の流速である。ここでは、 $u = v = w = 0$ とおくことで、壁面において流れを拘束している。 $y = -1$ と $y = 1$ に於いては y 方向の流速の拘束はしない。

地盤モデルの計算結果を図-41に示す。図-42と図-43は、パイプ内流れの計算結果であり、それぞれ圧力分布図と流線図である。

以上の結果より、これらの有限要素メッシュを用いて計算が行えることがいえる。

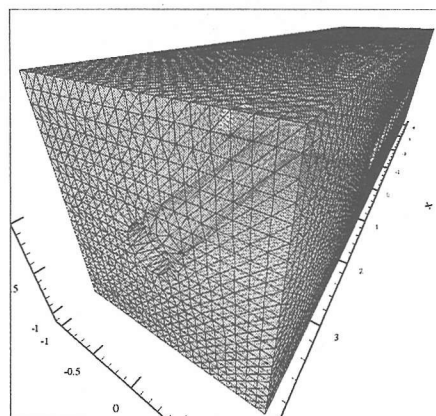


図-37 地盤要素メッシュ

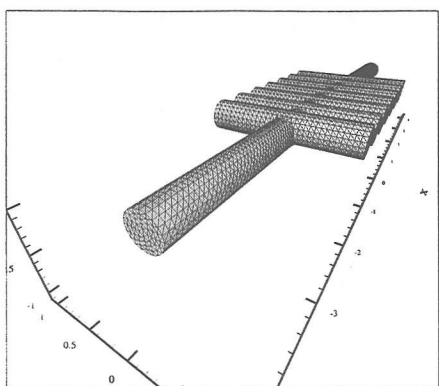


図-38 トンネル内部メッシュ

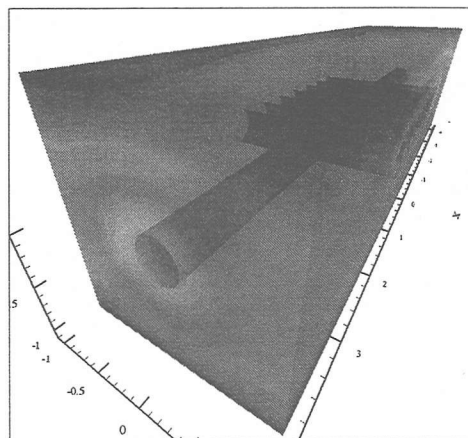


図-41 浸透流濃度分布

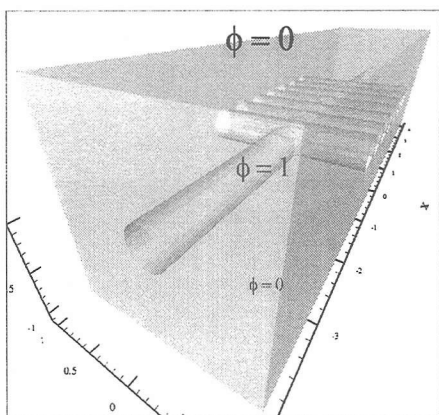


図-39 地盤モデルの境界条件

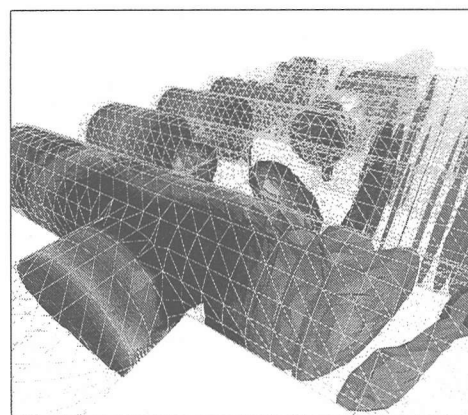


図-42 パイプ内流れの圧力分布

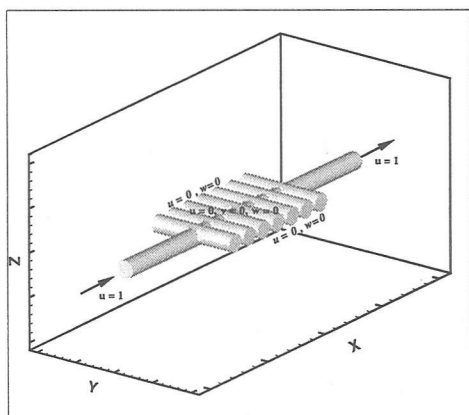


図-40 パイプ流れの境界条件

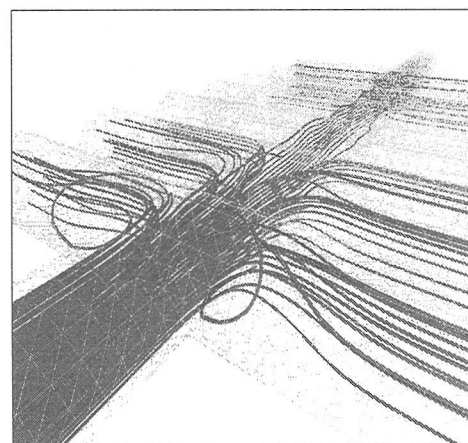


図-43 パイプ内流れの流線図

5. おわりに

本研究では任意分布する節点を利用して領域を三角分割することができるDelaunay分割法と、シールドモジュールを用いた節点の分布操作により、ブーリアン演算を行い、地下トンネルモデルの作成と、その有限要素分割を同時に行う手法を提案した。また、三次元

要素生成の基礎的アプローチとして、二次元Delaunay三角分割法の三次元への拡張をおこなった。数値解析例として、複数のトンネルで構成されるモデルを作成を取り上げ、この手法によりトンネルの交差部分、曲線部分のモデル化が可能であることを示した。更に、生成した要素メッシュを浸透流解析と非圧縮粘性流体流れ解析に適用し、この手法で生成した有限要素メッシュ

が実際の解析に於いて有効であることを証明した。今後は、円形トンネルだけでなく任意断面のトンネルへの拡張が必要である。

参考文献

- 1) 谷口健男：FEM のための要素自動分割，森北出版株式会社，1992.
- 2) Jan J.Koenderink: Solid Shape, The MIT Press
- 3) Ian O. Angell and Gareth Griffith: High-resolution Computer Graphics Using FORTRAN 77.,1987.
- 4) Yu.D.Burago and V.A.Zalgaller: Geometry III, (1991), Springer-Verlag
- 5) 杉原厚吉: FORTRAN 計算幾何プログラミング，岩波書店，1998
- 6) 谷口健男，太田親：三次元凸体の四面体有限要素自動分割，土木学会論文集，第 432 号／I-16, pp.137-144, 1991
- 7) Philippe Plpebay: A New Approach towards Delaunay-Conformity in 3 Dimensions, *9th International Meshing Roundtable*,2000
- 8) Paulo Roma Cavalcanti and Ulisses T. Mello, Three-dimensional Constrained Delaunay Triangulation:A Minimalist Approach,*8th International Meshing Roundtable*,1999.
- 9) 松本純一・梅津剛・川原陸人：安定化気泡関数要素を用いた非圧縮粘性流体解析と適応型有限要素法，応用力学論文集，2, pp.223-232,1999
- 10) J.Matsumoto and M.Kawahara: Linear Stability Analysis of Flow Past a Circular Cylinder Using Improved Bubble Element, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, (in Press).

(2002 年 4 月 19 日 受付)