

界面剥離を考慮した弾塑性複合材料のマルチスケール解析

The multi-scale computation method for elastic-plastic heterogeneous bodies with interfacial debonding

松井和己*・寺田賢二郎**

Kazumi MATSUI and Kenjiro TERADA

*学生員 修(工学) 東北大学大学院 工学研究科土木工学専攻(〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉06)

**正会員 Ph.D. 東北大学大学院助教授 工学研究科土木工学専攻

A method of multi-scale computations is developed for analyzing the quasi-static mechanical behavior of elastoplastic heterogeneous media with interfacial debonding. After posing the two-scale boundary value problem, we developed the numerical algorithm for microscopic self-equilibrated problem involving discontinuous deformations. This algorithm, which accommodates the kinematical constraints on the interfaces by the penalty method, enables us to analyze the elastic-plastic behavior with debonding without any numerical instability. The representative numerical examples well illustrate the remarkable influence of microstructures with debonding interfaces on the macroscopic elastic-plastic material behavior; in particular the macroscopic yield stress.

Key Words : Multi-scale computation, Homogenization method, Interfacial debonding, Elastic-plastic composite

1. はじめに

より高性能・高機能な材料を求めて複合材料の研究が進み、現在様々な分野において用いられるようになった。土木工学の分野においても、コンクリートやFRPなどの人工材料をはじめとして、鉄鋼材料や岩盤などの材料も内部に亀裂・空隙などの微視構造を有した複合材料であると捉えることができる。このような複合材料の強度やじん性を決定する重要な要因として、異種材料の界面における力学挙動が挙げられる。複合材料では、潜在的な欠陥や異種材料の界面から破壊が始まることが多く、これらの力学挙動を正確に把握することは重要な課題である。

複合材料の力学挙動に対する Global-Local 的なモデル化手法として工学分野に紹介された数学的均質化法^{1)~3)}は、構造物の巨視的な挙動と非均質性が定義される微視領域での力学現象とを数学的に関連づけることを可能とするものである。このモデル化手法は様々な力学現象の解明に役立つものと期待され、これまでに多くの研究成果が報告されてきた^{4)~9)}。

特に、均質化法に基づくマルチスケール有限要素解析法¹⁰⁾は、均質化理論に基づいてミクロ・マクロが連成した境界値問題を導出し、これを有限要素法によって解くものであり、これによってさまざまな非均質材料の非線形力学挙動が正確に評価できるようになった^{11),12)}。しかしながら、既往の非均質弾塑性体のマルチスケール解析手法^{10)~13)}では、異種材料界面が剛に結合しているものとして扱われており、界面剥離およびその弾塑性挙動との連成は考慮されていない。

本研究では、複合材料における異種材料界面の代表的な力学挙動である剥離やすべりなどの不連続変形を考慮した弾塑性マルチスケール解析手法を開発する。寺田・菊池¹⁰⁾によって示された定式化にしたがって、界面

に対する拘束条件を penalty 法によって処理した Two-scale 境界値問題を設定し、その数値構造を概説する。導出された境界値問題を解く際に問題となる数値解析上の不安定性を回避するために、応力解放アルゴリズムを採用する。最後に、このアルゴリズムを用いた数値解析例を示し、その妥当性や有効性を検討するとともに、微視領域における不連続変形が材料特性として観察される巨視的な機械特性に与える影響を議論する。

2. 界面剥離を考慮した two-scale 境界値問題

2.1 問題設定と支配方程式

図-1(a)に示すような複数の弾塑性体を構成材料とする非均質体を考え、実数空間を $\mathcal{R}$ 、構造全体の n_{dim} 次元領域を $\Omega^\epsilon \in \mathcal{R}^{n_{\text{dim}}}$ で表す。また、この領域 Ω^ϵ における非均質性は、代表長さ ϵ を有する基本周期構造領域(以下ユニットセルと呼ぶ)内における幾何形状および構成材料の物性によって定義されており、全体構造は微小なユニットセルを繰り返し配置することによって覆うことができるものとする。したがって、この非均質体の巨視的な力学挙動はユニットセル内で定義される現象だけでなく、その大きさ ϵ にも依存する。

領域 Ω^ϵ の内部において、材料界面の占める閉領域を F_ϵ で表すと、 $\Omega_F^\epsilon = \Omega^\epsilon \setminus F_\epsilon$ は開領域であり、次のつりあい式がこの領域内で成り立つ。

$$\text{div } \sigma^\epsilon + \rho^\epsilon b = 0, \quad \text{in } \Omega_F^\epsilon \quad (1)$$

ここで σ^ϵ , ρ^ϵ , b はそれぞれ亀裂を除く開領域における応力、密度、単位密度あたりに作用する物体力である。また、この物体の占める領域 Ω^ϵ の境界 $\partial\Omega$ には、 $\Gamma_u \subset \partial\Omega$ に変位 0 , $\Gamma_\sigma \subset \partial\Omega$ には表面力 T が

$$u^\epsilon = 0 \text{ on } \Gamma_u, \quad \sigma^\epsilon \hat{n} = T \text{ on } \Gamma_\sigma \quad (2)$$

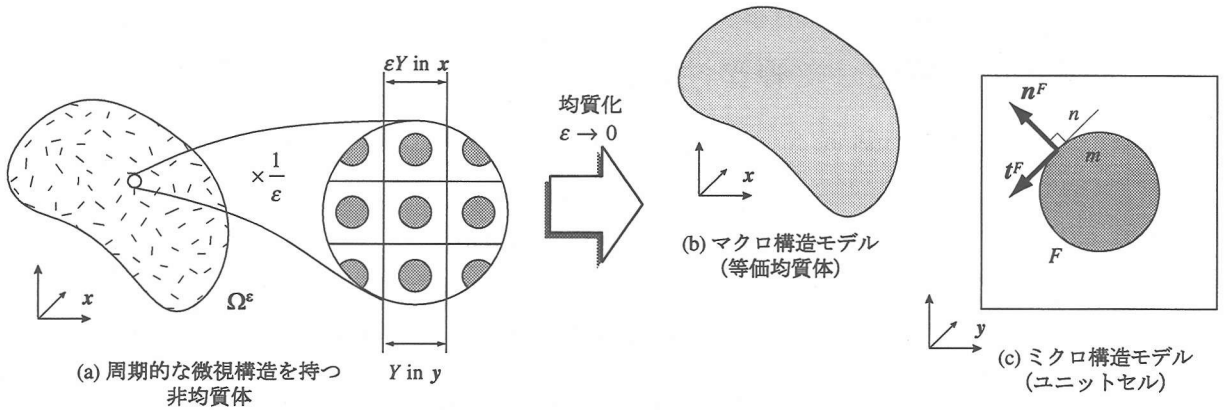


図-1 異種材料界面を考慮したマルチスケールモデリング

と与えられるものとする。ここで、 $\hat{n}$ は境界 Γ_σ における外向き単位法線ベクトルである。

非均質体を構成する弾塑性体が非線形等硬化を仮定した古典的な J_2 塑性理論に従うものとする。流れ則および硬化則、Kuhn-Tucker 形式の載荷・除荷条件は次のように与えられる。

$$\dot{\epsilon}^p = \gamma \frac{\partial f^\epsilon(\sigma^\epsilon, q^\epsilon)}{\partial \sigma^\epsilon} \quad (3)$$

$$\dot{\alpha} = -\gamma \frac{\partial f^\epsilon(\sigma^\epsilon, q^\epsilon)}{\partial q^\epsilon} \quad (4)$$

$$f^\epsilon \leq 0, \quad \gamma \geq 0, \quad f^\epsilon \gamma = 0 \quad (5)$$

ここで、 $\dot{\epsilon}^p$ と γ はそれぞれ塑性ひずみ速度、塑性 consistency パラメータであり、 α は硬化パラメータ q と Legendre 変換を介して共役な塑性硬化に関する内部変数である。また、 f^ϵ は von Mises の降伏関数であり、一軸状態での初期降伏応力を σ_Y^ϵ 、Cauchy 応力の偏差成分を $\text{dev}(\sigma^\epsilon)$ として次のように与えられる。

$$f(\sigma^\epsilon, \alpha^\epsilon) := \|\text{dev}(\sigma^\epsilon)\| - \sqrt{\frac{2}{3}} (\sigma_Y^\epsilon + K(\alpha^\epsilon)) \quad (6)$$

$$K(\alpha^\epsilon) = H\alpha^\epsilon + (\sigma_Y^\infty - \sigma_Y)(1 - \exp[-\delta\alpha^\epsilon]) \quad (7)$$

ここで、 H 、 σ_Y^∞ 、 δ はそれぞれ加工硬化に関する材料パラメータである。

また本研究では異種材料界面 ($F^\epsilon = F_a^\epsilon \cup F_b^\epsilon \cup F_c^\epsilon$) における力学挙動として次のようなものを考える。

- 界面が完全に剥離した状態 (on F_a^ϵ ; 状態 a)
- 界面の滑りのみが生じる場合 (on F_b^ϵ ; 状態 b)
- 界面が完全に結合している状態 (on F_c^ϵ ; 状態 c)

ただし、 $F_c^\epsilon \neq \emptyset$ とし、亀裂面 (F_a^ϵ) における接触・摩擦は考えない。このとき、界面が完全に剥離した状態ではこの界面に対する制約条件を考慮する必要がなく、界面に沿った滑りだけが生じる場合には次のような制約条件が与えられる。

$$[n^F \cdot u^\epsilon] = 0 \quad \text{on } F_b^\epsilon \quad (8)$$

ここで n^F は図-1(c) に示すように、界面を局所的な領域 m と n に分割した際の m から n へ向く法線ベクトルとし、接線方向の単位ベクトルを t^F で表す。また、 $[\phi]$ は変数 ϕ の不連続量を表しており、法線ベクトル n^F を有する亀裂面 F を挟んで与えられる値 ϕ_m と ϕ_n の差 $[\phi] = \phi_m - \phi_n$ として与えられる。このとき界面の滑りに対して、摩擦を考慮せず界面に垂直方向の力 σ_N のみが作用するので、

という条件が得られる。すなわち、小領域 m 、 n それぞれの境界面にはお互いに逆向き鉛直力が作用する。

$$\sigma^\epsilon \cdot n^F|_m = \sigma_N|_m n^F, \quad \sigma^\epsilon \cdot n^F|_n = -\sigma_N|_n n^F \quad (9)$$

また、界面が健全で滑りや剥離をいっさい生じていないときには、同様の記号を用いて次のような制約条件が与えられる。

$$[u^\epsilon] = 0 \quad \text{on } F_c^\epsilon, \quad \text{i.e.} \quad [\sigma^\epsilon \cdot n^F] = 0 \quad \text{on } F_c^\epsilon \quad (10)$$

このような条件の下で、支配方程式は一般的な弾塑性問題に対する変分方程式と同様に次のように与えられ、

$$\int_{\Omega^\epsilon} \nabla \eta^\epsilon : \sigma^\epsilon dV - \int_{\Omega^\epsilon} \rho^\epsilon b \cdot \eta^\epsilon dV - \int_{\Gamma_\sigma^\epsilon} T \cdot \eta^\epsilon dS = 0, \quad \forall \eta^\epsilon \in \mathcal{K}^\epsilon \quad (11)$$

許容関数 η^ϵ の集合 $\mathcal{K}^\epsilon$ は、界面における制約条件を含んで次のように定義される。

$$\mathcal{K}^\epsilon = \left\{ \eta^\epsilon \mid \eta^\epsilon \in \mathcal{V}^\epsilon; [n^F \cdot \eta^\epsilon] = 0 \text{ on } F_b^\epsilon, [\eta^\epsilon] = 0 \text{ on } F_c^\epsilon \right\}$$

$$\mathcal{V}^\epsilon = \left\{ v^\epsilon \mid v_i^\epsilon \in H^1(\Omega_F^\epsilon); v^\epsilon = 0 \text{ on } \Gamma_u \right\}$$

ここで、 H^1 は 1 次の Sobolev 空間である。

2.2 均質化法に基づく two-scale 境界値問題

一般的な均質化理論の記述にしたがって³⁾、微視的な非均質性が観察できないマクロスケール $x \in \Omega$ と、非均質性が定義される微視領域を測る尺度であるミクロスケール $y \in \mathcal{R}^{n_{\text{dim}}}$ を導入する。この 2 つのスケールはミクロ構造の大きさを表すパラメータ ϵ によって、 $y = x/\epsilon$ のように関連づけられている。マクロスケール x はミクロ構造に依存しない全体領域 Ω での力学挙動を表現するための尺度であり、微視領域内 $\epsilon \mathcal{R}^{n_{\text{dim}}}$ で分布する場の変数を観察するためにはミクロスケール y を用いることになる。

ユニットセルの占める物理領域を $Y_F = Y \setminus F$ で表すと、このミクロ構造は領域 $\epsilon \mathcal{R}^{n_{\text{dim}}}$ に無限に広がりを持ち、周期的に配置することによって全体領域 Ω^ϵ を表現できるものと仮定される。つまり、非均質材料の占める全体領域 Ω^ϵ はマクロ領域 Ω と微視領域 $\epsilon \mathcal{R}^{n_{\text{dim}}}$ との積空間と見なすことができ、便宜的に

$$\Omega^\epsilon := \left\{ y \in \mathcal{R}^{n_{\text{dim}}} \mid y = \frac{x}{\epsilon} \right\} := \Omega \times \epsilon Y_F \quad (12)$$

と表すことができる。このような設定のもとで、変位・応力・ひずみなどの場の関数は2つのスケールを用いてそれぞれ $u(x, y)$, $\sigma(x, y)$, $\varepsilon(x, y)$ のように表現される。また、これらの変数はミクロスケール y について「Y-周期的である」と仮定する。

以上のようにミクロ・マクロそれぞれに異なる2つのスケールを導入し、 $\epsilon \rightarrow 0$ の極限をとることによって非均質体のマクロ挙動を支配する方程式を導く数学的な手続きは均質化と呼ばれている³⁾。均質化法の数理解論によれば、マクロおよびミクロ変数についての境界値問題を個別に設定することができ、有限要素法などの解析手法を用いてミクロ・マクロの解析を同時に行うマルチスケール解析が実現される¹⁰⁾。弾塑性問題に対する定式化の詳細や数値解析アルゴリズムなどは文献¹⁰⁾を参照することとし、ここでは導出された境界値問題のみを与える。

微視領域において満たすべき境界値問題は、界面に対する拘束条件を含めて次のようになる。

$$\int_Y \nabla_y \eta^1 : \sigma \, dy = 0, \quad \forall \eta^1 \in \tilde{\mathcal{K}}_{\text{per}}, \quad (13)$$

$$\sigma = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \varepsilon} \quad (14)$$

$$\varepsilon = \text{sym}(\nabla_x u^0 + \nabla_y u^1) \quad (15)$$

ここで、 σ と ε はそれぞれミクロ応力とミクロひずみである。また、 u^1 は Y-周期的なミクロ変位であり、その許容関数空間は次のように定義される。

$$\tilde{\mathcal{K}}_{\text{per}} := \left\{ \eta \mid \eta \in \tilde{\mathcal{W}}_{\text{per}}; [n^F \cdot \eta] = 0 \text{ on } F_b, [\eta] = 0 \text{ on } F_c \right\}$$

$$\tilde{\mathcal{W}}_{\text{per}} := \left\{ w(\bullet, y) \in \mathcal{R}^{n_{\text{dim}}} \mid w_i \in H^1(Y_F); \right. \\ \left. Y\text{-periodic}, \int_{Y_F} w(\bullet, y) \, dy = 0 \right\}$$

一方ユニットセル内に生じる実変位 w は、ミクロ変位とマクロ変位 u^0 を用いて次のように与えられる。

$$w = \text{sym}(\nabla_x u^0(x)) \cdot y + u^1(x, y) \quad (16)$$

さらに、微視領域における構成材料の弾塑性挙動を記述するための流れ則および硬化則、Kuhn-Tucker 形式の載荷・除荷条件は次のように与えられる。

$$\dot{\varepsilon}^p = \gamma \frac{\partial f(\sigma, q)}{\partial \sigma}, \quad (17)$$

$$\dot{\alpha} = -\gamma \frac{\partial f(\sigma, q)}{\partial q} \quad (18)$$

$$f \leq 0, \quad \gamma \geq 0, \quad f\gamma = 0 \quad (19)$$

マクロ構造に関しては、平均密度およびマクロ応力、マクロひずみがそれぞれ次のようなミクロ変数の体積平均

$$\rho^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y \rho \, dy \quad (20)$$

$$\Sigma(x) = \frac{1}{|Y|} \int_Y \sigma(x, y) \, dy \quad (21)$$

$$E(x) = \frac{1}{|Y|} \int_Y \varepsilon(x, y) \, dy \quad (22)$$

で与えられ、つり合い式は次のようになる。

$$\int_\Omega \nabla_x \eta^0 : \Sigma \, dx = \int_\Omega \rho^H b \cdot \eta^0 \, dx + \int_{\Gamma_\sigma} T \cdot \eta^0 \, ds, \quad \forall \eta^0 \in \mathcal{V} \quad (23)$$

$$\text{where } \mathcal{V} = \left\{ v \mid v_i \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ on } \Gamma_u \right\}$$

以上のように、非均質弾塑性体に対するマルチスケール問題は、式 (13) から式 (19) を満足するようなミクロ状態変数

$$\chi^1 := \{u^1, \varepsilon, \varepsilon^p, \sigma, \alpha, \gamma\} \quad (24)$$

を界面に対するそれぞれの拘束条件のもとで求め、これらのユニットセル内平均量を含むマクロ状態変数

$$\chi^0 := \{u^0, \Sigma, E\} \quad (25)$$

が式 (20) から式 (24) を満足するような解を求めるという、ミクロ・マクロ両スケールが連成した境界値問題となる。異種材料界面における制約条件の penalty 法による処理、およびマルチスケール解析アルゴリズムについては次節にまとめる。

3. マルチスケール解析アルゴリズム

ここでは2次元問題を考え、前節で示した two-scale 境界値問題を解くためのマルチスケール有限要素解析のアルゴリズムを与える。まず、マルチスケールモデリングの Global-Local 的な数理解構を概説する。つぎに、有限要素法によって解くことを前提にして、微視領域における異種材料界面に課せられる拘束条件の penalty 法による処理について述べる。最後にミクロ問題の有限要素解析において、剥離やすべりといった不連続変形を安定してシミュレートするために応力解放アルゴリズムを採用する。

3.1 マルチスケールモデリングの数理解構

前節で示したように、均質化法に基づくマルチスケール解析は、マクロ構造全体の力学応答とその各物質点の挙動に依存したミクロ構造の解を求めるという、ミクロ・マクロが連成したものである。マクロ問題に対する平衡方程式 (24) などは、応力やひずみなどが式 (20) から式 (22) に示したようなミクロ変数の体積平均量として与えられることを除けば、一般的な境界値問題のものと同様の形式であり、マクロ問題では異種材料界面についての拘束条件が陽な形で現れない。つ

まり、異種材料界面の運動を含む非線形力学現象は、全てミクロ問題において定義され、マクロ問題ではこれらの平均量が反映されているにすぎない。

このことは、微視領域において定義された「構造」の力学挙動がマクロ構造での「材料」の挙動として認識されることを意味しており、ミクロ構造解析がマクロ問題に対して一種の構成関係を与えていることがわかる。以下では、異種材料界面での剥離などの不連続変形を考慮したミクロ問題について、その有限要素解析アルゴリズムをまとめる。ただし、前節の定式化において Y-周期的な変位を表すために付加した上付添字は省略する。

3.2 penalty 法を用いたミクロ構造解析

本研究では、異種材料界面に対する変位の制約条件を満足させるために、一般的によく知られている penalty 法を用いることにする。微小パラメータ p を用いて次のような penalty 項を考えると、

$$f_F(u, \eta) = \frac{1}{p} \int_{F_b} [n^F \cdot \eta] [n^F \cdot u] ds + \frac{1}{p} \int_{F_c} [\eta] [u] ds \quad (26)$$

近似的に等価なミグロススケールに対する支配方程式は次のようになる。

$$g(u, \eta) = \int_Y \nabla_y \eta : \sigma dy + f_F(u, \eta) = 0, \quad \forall \eta \in \mathcal{W}_{\text{per}} \quad (27)$$

ここで、許容関数空間が界面の拘束を含んだ集合 $\mathcal{K}_{\text{per}}$ から $\mathcal{W}_{\text{per}}$ へと変化していることに注意する。

いま、つりあい状態にある荷重ステップ n から、荷重ステップ $n+1$ になった状態を考える。このとき、ミクロ構造の支配方程式 (27) において荷重に相当するものはマクロひずみであり、弾塑性構成関係を表す式 (17) から (19) を用いて自己つりあい状態を満たす Y-周期的なミクロ変位 u_{n+1} を求めればよい。以降では、下付添字 n などは時刻 t_n で評価されることを表し、上付添字 (●) を用いて Newton-Raphson 法の修正回数を表す。荷重ステップ $n+1$ の第 (j) 反復ステップにおける残差を

$$g(u_{n+1}^{(j)}, \eta) \neq 0 \quad (28)$$

であるとして一般的な線形化を行うと、

$$Dg(u_{n+1}^{(j)}, \eta) \cdot \delta u_{n+1}^{(j+1)} = -g(u_{n+1}^{(j)}, \eta) \quad (29)$$

が Newton-Raphson 法による変位増分の修正量 $\delta u_{n+1}^{(j+1)}$ を求めるための線形化方程式となる。ここで、 $Dg(u_{n+1}^{(j)}, \eta)$ は $g(u_{n+1}^{(j)}, \eta)$ の方向微分を表し、左辺は次のように評価される¹⁰⁾。

$$\begin{aligned} Dg(u_{n+1}^{(j)}, \eta) \cdot \delta u_{n+1}^{(j+1)} &\approx \int_Y \Delta_y \eta : a_{n+1}^{(j)} : \nabla_y (\delta u_{n+1}^{(j+1)}) dy \\ &+ \frac{1}{p} \int_{F_b} [n^F \cdot \eta] [n^F \cdot \delta u_{n+1}^{(j+1)}] ds \\ &+ \frac{1}{p} \int_{F_c} [\eta] [\delta u_{n+1}^{(j+1)}] ds \end{aligned} \quad (30)$$

また、

$$a_{n+1}^{(j)} := \frac{\partial \sigma_{n+1}^{(j)}}{\partial \epsilon_{n+1}^{(j)}} \quad (31)$$

は弾塑性接線係数であり、応力積分のアルゴリズムに整合した consistent 接線係数を用いると 2 次の収束を得られることが知られている。

このように、マクロひずみを外力と見なし、界面上で拘束が与えられること以外は通常の弾塑性有限要素解析と同様に扱うことができる。radial return mapping によるミクロ構造解析の詳細なアルゴリズムは文献¹⁰⁾に示されているため、以下では微視領域の界面における剥離・すべりといった不連続変形を取り扱うためのアルゴリズムのみを解説する。

3.3 剥離・すべりの発生条件

本研究では、巨視的な荷重の増加によって、微視領域における異種材料の界面に生じる剥離やすべりなどの不連続変形を考えることにするが、その変形過程として次のようなものを考える。

- 健全な界面 (F_c) $\rightarrow$ 剥離 (F_a)
- 健全な界面 (F_c) $\rightarrow$ すべり (F_b) $\rightarrow$ 剥離 (F_a)

また、これらの不連続変形が生じる規準を次のように与える。

- 剥離: 界面に作用する鉛直方向の引張応力がある規準値 ($\sigma_N \geq 0$) に達したとき。つまり、界面上のある点に生じている応力 $\sigma(x, y)$ が、次の条件を満たしたときに剥離が生じたものとしてその点に関する拘束を外す。

$$\sigma(x, y) \cdot n^F \geq \sigma_N n^F, \quad \sigma_N \geq 0 \quad (32)$$

- すべり: 界面における応力ベクトルの接線方向成分のユークリッドノルムが規準値 ($\sigma_T \geq 0$) に達したとき。この規準は次のように表すことができ、

$$\|\sigma(x, y) \cdot t^F\| \geq \sigma_T, \quad \sigma_T \geq 0 \quad (33)$$

この条件に達した場合は界面に沿ったすべり変形が生じるものとして、接線方向の拘束を解放して鉛直方向のみを拘束する。

このような判定をミクロ問題の各つりあい状態に対して行い、新たな剥離・すべりが生じた際にはそれらに対応する応力を解放し、新たなつりあい状態を求める必要がある。微視領域の構成材料が線形弾性体であれば¹¹⁾、このような応力解放によるつりあい状態の変化は容易に解析できる。しかし、剥離の発生や進展といった不連続変形は一般に応力の急激な変化を伴うものであり、非線形問題、特に弾塑性体の場合は解析が非常に困難である。次小節ではこのような問題を克服するための応力解放アルゴリズム¹⁴⁾についてまとめる。

3.4 応力解放アルゴリズム

ある荷重ステップにおいて、新たな界面剥離やすべりが生じないという仮定のもとで、ミクロ構造の自己

つりあい満たされた状態を考える。このとき、界面 ($F = F_a \cup F_b \cup F_c$) における拘束条件の下で、式 (27) を満たす各状態変数を $\mathbf{u}^{\text{trial}}$, $\boldsymbol{\sigma}^{\text{trial}}$ などと表記する。この状態において、上記の判定により剥離あるいはすべりが生じ、拘束を受ける界面が ($\bar{F} := F = \bar{F}_a \cup \bar{F}_b \cup \bar{F}_c$) のように変化したとすると、次式のように自己つりあいが満たされなくなる。

$$g_{\bar{F}}(\mathbf{u}^{\text{trial}}, \boldsymbol{\eta}) = \int_Y \nabla_y \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\sigma}^{\text{trial}} dy + f_{\bar{F}}(\mathbf{u}^{\text{trial}}, \boldsymbol{\eta}) = df \neq 0 \quad (34)$$

ここで、拘束条件が変化したことによる penalty 項の変化量を次のように定義した。

$$df(\mathbf{u}^{\text{trial}}, \boldsymbol{\eta}) := f_{\bar{F}}(\mathbf{u}^{\text{trial}}, \boldsymbol{\eta}) - f_F(\mathbf{u}^{\text{trial}}, \boldsymbol{\eta}) \quad (35)$$

したがって、この変化量を外力（解放力）と見なして、新たな自己つりあいを満足させるためのミクロ変位の修正量 $\mathbf{u}^{\text{mod}}$ を求める問題が設定される。この問題は上でも指摘したように、状態変数の急激な変化を伴うものであり、Newton-Raphson 法による収束計算が発散してしまう場合がほとんどである。以下では、この問題を増分的に解くことにより、解析を安定に実行するための応力解放アルゴリズムをまとめる。

増分解法のための制御パラメータ ξ ($0 \leq \xi \leq 1$) を導入すると、ある制御ステップ m において修正量 $\mathbf{u}_m^{\text{mod}}$ を求める問題は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} \bar{g}_{\bar{F}}(\mathbf{u}^{\text{trial}} + \mathbf{u}_m^{\text{mod}}, \boldsymbol{\eta}, \xi_m) &= \\ \int_Y \nabla_y \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\sigma}_m(\mathbf{u}^{\text{trial}} + \mathbf{u}_m^{\text{mod}}) dy &+ \\ + f_{\bar{F}}(\mathbf{u}^{\text{trial}} + \mathbf{u}_m^{\text{mod}}, \boldsymbol{\eta}) + \xi_m df(\mathbf{u}^{\text{trial}}, \boldsymbol{\eta}) &= \\ = g_F(\mathbf{u}^{\text{trial}} + \mathbf{u}_m^{\text{mod}}, \boldsymbol{\eta}) + \xi_m df(\mathbf{u}^{\text{trial}}, \boldsymbol{\eta}) &= 0 \end{aligned} \quad (36)$$

これに対して線形化を行い、Newton-Raphson 法によって解く。

この増分解法により、この拘束条件の下で自己つりあい状態が満たされれば再び剥離・すべりの判定を行う。この判定の結果、規準値を超えて新たに剥離あるいはすべりが生じる場合には、それに対応して拘束条件を変化させる。その時点での変位 ($\mathbf{u}^{\text{trial}} + \mathbf{u}^{\text{mod}}$) を新たな $\mathbf{u}^{\text{trial}}$ であるとして、上記のアルゴリズムにしたがって再度不つりあい力を解放する。この手続きを新たな剥離・すべりが生じなくなるまでくり返し行い、最終的な自己つりあい状態が求められる。以上のミクロ構造解析アルゴリズムを図-2 に示す。ここで、図中 $\Delta \mathbf{u}_{m+1}^{\text{mod}}$ は制御ステップ $m+1$ における変位修正量 $\mathbf{u}^{\text{mod}}$ の増分を表し、 $\delta \mathbf{u}_{m+1}^{\text{mod}(i+1)}$ は Newton-Raphson 法における第 (i) 反復ステップでの $\Delta \mathbf{u}^{\text{mod}}$ の修正量を表す。

4. 数値解析例

これまでに示した定式化および解析アルゴリズムを用いた有限要素解析プログラムを開発し、異種材料界面における剥離・すべりを考慮した弾塑性マルチスケール解析例を示す。本研究では巨視的に一様変形となるような単純なマクロ構造モデルを用いることにより、微

```

I. For a given  $E(x)$ , obtain  $\mathbf{u}$  by solving
   "Micro self-equilibrium problem"
   see; Terada and Kikuchi (2001)

II. Check the criterion for all nodes on  $F$ 
   IF no violation has occurred
     EXIT
   ELSE
     Release the constrained force
     (i) Update  $F \rightarrow \bar{F}$ ,  $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}^{\text{trial}}$ , set  $m = 0$ ,  $\mathbf{u}^{\text{mod}} = \mathbf{0}$ 
        obtain  $df(\mathbf{u}^{\text{trial}}, \boldsymbol{\eta}) = f_{\bar{F}}(\mathbf{u}^{\text{trial}}, \boldsymbol{\eta}) - f_F(\mathbf{u}^{\text{trial}}, \boldsymbol{\eta})$ 
     (ii) Update the state variables for incremental procedure
        set  $\xi_{m+1} = \xi_m + \Delta \xi$ ,  $\mathbf{u}_{m+1}^{\text{mod}(0)} = \mathbf{u}_m^{\text{mod}}$ 
        (1) Initialize variables for N-R iteration scheme
        set  $i = 0$ ,  $\Delta \mathbf{u}_m^{\text{mod}(i)} = \mathbf{0}$ 
        (2) For a given  $\mathbf{u}_{m+1}^{\text{mod}(i)}$ , compute  $\delta \mathbf{u}_{m+1}^{\text{mod}(i+1)}$  by solving,
         $D \bar{g}_{\bar{F}}(\mathbf{u}^{\text{trial}} + \mathbf{u}_{m+1}^{\text{mod}(i)}, \boldsymbol{\eta}) \cdot \delta \mathbf{u}_{m+1}^{\text{mod}(i+1)} = -\bar{g}_{\bar{F}}(\mathbf{u}^{\text{trial}} + \mathbf{u}_{m+1}^{\text{mod}(i)}, \boldsymbol{\eta})$ 
        (3) Update the displacements
         $\Delta \mathbf{u}_{m+1}^{\text{mod}(i+1)} = \Delta \mathbf{u}_{m+1}^{\text{mod}(i)} + \delta \mathbf{u}_{m+1}^{\text{mod}(i+1)}$ 
         $\mathbf{u}_{m+1}^{\text{mod}(i+1)} = \mathbf{u}_{m+1}^{\text{mod}(i)} + \Delta \mathbf{u}_{m+1}^{\text{mod}(i+1)}$ 
        (4) Compute the internal forces
        by "Radial return mapping algorithm"
        (5) Check the convergence
        IF  $|\bar{g}_{\bar{F}}(\mathbf{u}^{\text{trial}} + \mathbf{u}_{m+1}^{\text{mod}(i+1)}, \boldsymbol{\eta})| / |\bar{g}_{\bar{F}}(\mathbf{u}^{\text{trial}} + \mathbf{u}_{m+1}^{\text{mod}(0)}, \boldsymbol{\eta})| < \text{TOL}$ 
          set  $\mathbf{u}_{m+1}^{\text{mod}} = \mathbf{u}_{m+1}^{\text{mod}(i+1)}$ , and GOTO (iii)
        ELSE
          set  $j \leftarrow j + 1$ , and GOTO (2)
        (iii) IF  $\xi_{m+1} < 1$ 
          set  $m \leftarrow m + 1$ , and GOTO (ii)
        ELSE: End of the incremental procedure
          set  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{\text{trial}} + \mathbf{u}_{m+1}^{\text{mod}}$ ,  $F \leftarrow \bar{F}$ 
          GOTO II

```

図-2 ミクロ構造解析アルゴリズム

視領域における力学挙動が与える巨視的な「材料」としての挙動に注目する。

以下では2次元平面ひずみ状態を仮定し、弾塑性体と線形弾性体2種類の構成材料からなるミクロ構造を対象とした。ここで、構成材料の弾塑性挙動は非線形の等方硬化のみを仮定した J_2 塑性理論に従うものとし、用いた材料パラメータなどを表-1 に示す。また、有限要素分割には全て標準的な4節点アイソパラメトリック要素を用い、不連続変形を生じうる異種材料界面 (F_a) 上の節点を、同一座標を有する2重節点として有限要素モデルを作成する。これらの2重節点はあらかじめ式 (26) で与えられる拘束条件による penalty 項が付加されており、それぞれの界面に作用する応力が式 (32) や (33) の条件を満たしたときに、前述のアルゴリズムにしたがって拘束条件を外し、不連続な変形を表現する。

4.1 破壊規準による巨視的力学挙動の違い

図-3 に示すようなミクロおよびマクロ有限要素モデルを用いて、界面における剥離やすべりが生じる条件と

表-1 構成材料の材料パラメータ

	材料 1	材料 2
ヤング率	229.0 (GPa)	177.0 (GPa)
ポアソン比	0.30	0.26
降伏応力	170.0 (MPa)	—
H	275.0 (MPa)	—
σ_Y^∞	243.0 (MPa)	—
δ	600.0	—
体積比	90 %	10 %

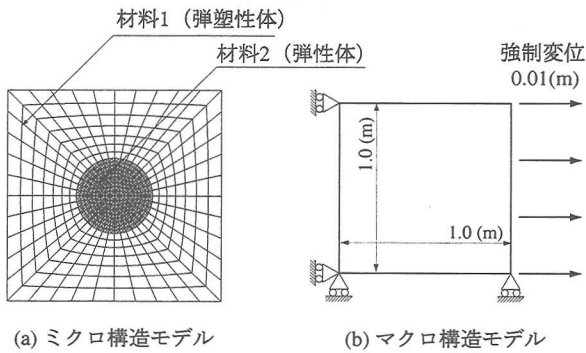


図-3 ミクロ・マクロ有限要素モデル.

して次の3ケースを考えマルチスケール解析を行った.

$$\sigma_N = \sigma_T = 150, 200, 250 \text{ (MPa)}$$

このとき得られた巨視的な応力・ひずみ関係を図-4に示す. またそれぞれの条件に対応して, 微視的な剥離が生じる直前 (図中黒丸) と直後 (白丸) の微視領域における変形図・相当塑性ひずみの分布を図-5に示す. ここでは剥離が生じている様子を明確にするため, ミクロ変位を誇張して示しており, 実際に生じている開口変位は最も大きな場合 (図-5(c)) でもミクロ構造の横幅に対して 0.05% という非常に小さいものになっている. このように非常に小さい変形量であっても, 巨視的な応力・ひずみ関係には大幅な応力の低下として顕著に現れており, マルチスケールモデリングによって微視領域における剥離, すべりを伴う力学挙動が, 巨視的な力学応答に大きく影響することが表現されている.

また, 図-5の変形図・塑性ひずみ分布を見てわかるように, どの破壊規準を用いた場合でも同じような不連続変形が生じており, これらは介在物 (弾性体) の両端から始まった剥離をきっかけとして, 連鎖的に進展していった結果である. また不連続変形の前後と比較すると, 剥離などが生じる直前まではほとんど塑性変形が生じていないが, 剥離・すべりが生じることによって微視領域において非常に大きな塑性変形が生じている. 前節に示した応力解放アルゴリズムによって, このような急激な塑性変形の進行であっても安定して追跡することが可能になっている. 設定する破壊規準によって剥離が生じた直後の巨視的な応力・ひずみ関係

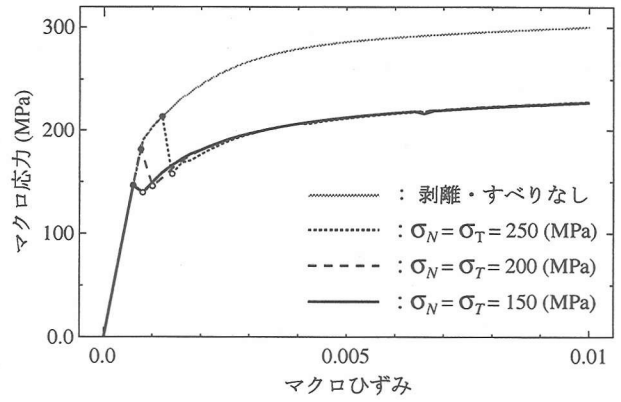
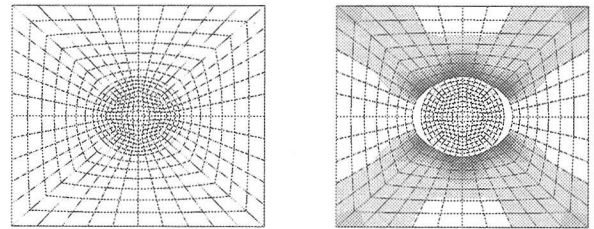
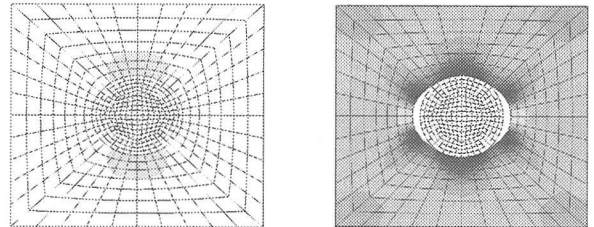


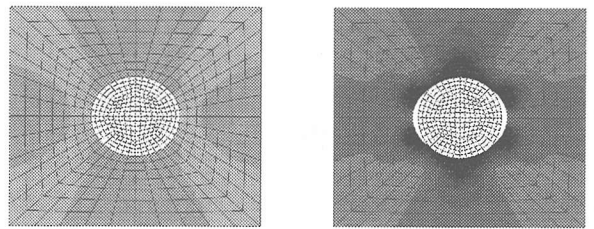
図-4 巨視的な応力・ひずみ関係



(a) $\sigma_N = \sigma_T = 150 \text{ (MPa)}$ のとき



(b) $\sigma_N = \sigma_T = 200 \text{ (MPa)}$ のとき



(c) $\sigma_N = \sigma_T = 250 \text{ (MPa)}$ のとき

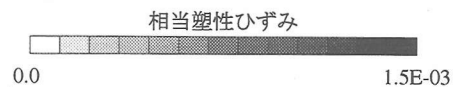


図-5 微視領域における変形図・塑性ひずみ分布

に若干の差異が認められるが, 変形が進むにつれて解消されていることから, これは界面剥離が生じるまでに受けた変形履歴に依存しているものと考えられる.

4.2 微視領域における幾何形状の影響

微視構造の違いが巨視的な応答に与える影響を調べるため, 図-6に示すような, 体積分率が10%, 長径と

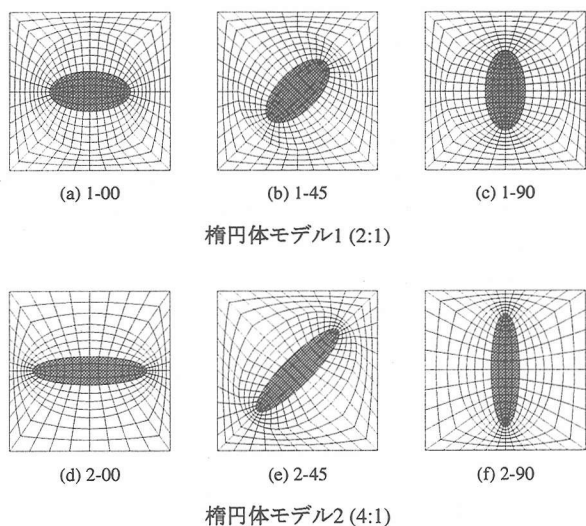


図-6 ミクロ有限要素モデル

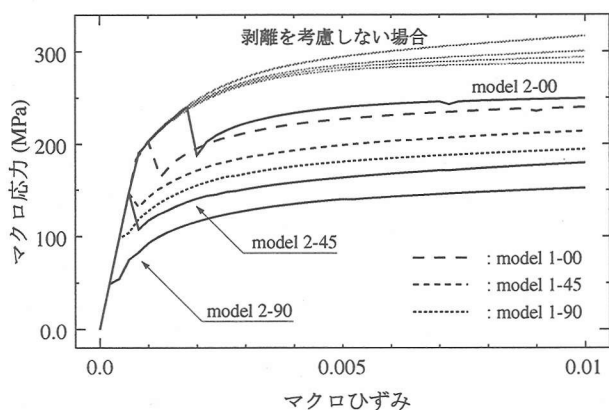


図-7 巨視的な応力・ひずみ関係

短径の比をそれぞれ 2 : 1, 4 : 1 となる楕円形の弾性体介在物を考え、さらにこれらを 45°, 90° ずつ回転させたミクロ構造を用意した。これらのミクロ構造モデルに対して剥離・すべりが生じる規準値を次のように設定し、先ほどと同様のマクロモデルを用いてマルチスケール解析を行った。

$$\sigma_N = \sigma_T = 175(\text{MPa})$$

ここから得られた巨視的な応力・ひずみ関係を図-7 に示す。また参考のために、これらのモデルを用いて不連続変形を生じないという条件の下で行ったマルチスケール解析結果も示す。また、巨視的なひずみが 0.1% のときの各ミクロ構造における von-Mises 応力分布を図-8 に、最終的な荷重ステップにおける変形図・相当塑性ひずみの分布を図-9 に示す。

この図からわかるように、微視領域において不連続変形が生じる規準値や構成材料の初期降伏応力を同一に設定したにもかかわらず、「巨視的な応力・ひずみ関係における線形関係が失われる点」つまり巨視的に観察される初期降伏応力が変化している。また、このときの微視領域での応力分布を見ると、介在物の形状・方向に

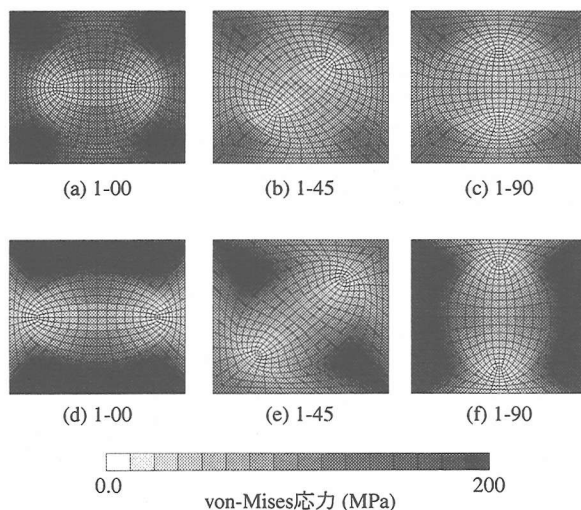


図-8 微視領域における von-Mises 応力分布の様子

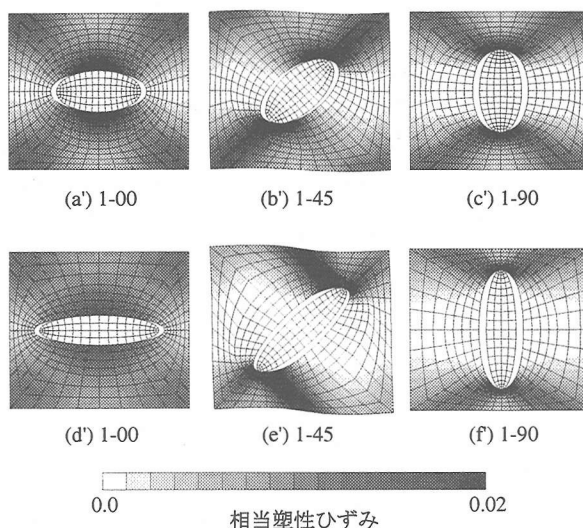


図-9 微視領域における変形と相当塑性ひずみ分布

よって全く異なる応力分布が得られている。図-8(d),(f) を比べるとほとんど同じような応力分布をしているように見えるが、両者は応力の向きが全く異なっていることに注意が必要である。つまり、巨視的な引張は図の横方向であるため、図-8(d)において高い応力が生じている領域（介在物の上下端）では界面に対して圧縮力が作用しており、この領域で剥離は生じない。これに対して図-8(f)では、ほぼ同程度の応力が界面に対して引張方向に作用しており、巨視的に非常に低い応力で剥離が生じている。このように、ここで観察された巨視的な差異は微視領域における構造の影響によって生じており、このような非均質材料の力学挙動をモデル化するための手法としてマルチスケールモデリングが有効であることがわかる。

さらに、巨視的に観察された降伏応力に注目すると、微視領域において塑性変形が始まる前に不連続変形が生じたとき（モデル: 1-45, 1-90, 2-45, 2-90）に顕著な差として現れ、一方で不連続変形を生じさせない場合や

塑性変形が生じた後に剥離などが発生するとき (1-00, 2-00) には, 巨視的な初期降伏応力はほぼ一定である。このような結果は, 巨視的に観察される初期降伏応力が微視領域における剥離・すべりなどといった不連続変形に支配されている可能性を示唆するものであり, 今後さらなる検討が必要であろう。

5. まとめ

本研究では, 微視領域における異種材料界面の剥離やすべりなどの不連続変形を考慮した弾塑性マルチスケール有限要素解析アルゴリズムを開発した。均質化法に基づくマルチスケールモデリングにより, 界面の拘束条件を考慮した two-scale 境界値問題を設定し, 弾塑性挙動, 不連続変形が定義されるミクロ構造解析のためのアルゴリズムを提示した。剥離などを考慮した弾塑性問題では, その急激な応力の変化によってミクロ自己つりあい問題の収束計算が不安定にあることが懸念されるが, 本研究では, このような不安定性を回避するために応力解放アルゴリズム採用した。

巨視的な一様変形という非常に簡単な例題を通して, 微視領域で生じた剥離などが巨視的な応力・ひずみ関係に反映されていることを確認し, その際に微視領域において不連続変形に起因した急激な塑性変形の進行が生じて, 応力解放アルゴリズムによって安定した解析を行うことができた。

参考文献

- 1) Benssonusan, A., Lions, J.-L. and Papanicoulau, G.: *Asymptotic Analysis for Periodic Structure*, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- 2) Lions, J.-L.: *Asymptotic calculus of variations, Singular perturbations and asymptotics*, Academic Press, New York, pp.277-296, 1980.
- 3) Babuska : Homogenization and its application. Mathematical and computational problems, *Numerical solution of partial differential equations III*, Academic Press, New York, pp.89-115, 1976.
- 4) Guedes, J.M. and Kikuchi, N. : Preprocessing and post-processing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.83, pp.143-198, 1990.
- 5) Fish, J., Shek, K., Pandheeradi, M. and Shephard, M.: Computational plasticity for composite structures based on mathematical homogenization: Theory and practice, *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, Vol.148, pp.53-73, 1997.
- 6) Swan, C.C. and Cakmak, A.S.: A hardening orthotropic plasticity model for non-frictional composites: rate formulation and integration algorithm, *Int. J. Numer. Meths. Engrg.*, Vol.37, pp.839-860, 1994.
- 7) Ghosh, S., Lee, K. and Moorthy, S.: Two scale analysis of heterogeneous elastic-plastic materials with asymptotic homogenization and Voronoi cell finite element model, *Comput. Methods. Appl. Mech. and Engrg.*, Vol.132, pp.63-116, 1996.
- 8) Fish, J., Shek, K., Pandheeradi, M. and Shephard, M.: Computational plasticity for composite structures based on mathematical homogenization: Theory and practice, *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, Vol.148, pp.55-73, 1997.
- 9) Pellegrino, C., Galvanetto, U. and Schrefler, B.A.: Numerical homogenization of periodic composite materials with non-linear material components, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol.46, pp.1607-1637, 1999.
- 10) Terada, K. and Kikuchi, N.: A class of general algorithms for multi-scale analyses of heterogeneous media, *Comput. Meths. Appl. Mech. and Engrg.*, Vol.190, pp.5427-5464, 2001.
- 11) 寺田賢二郎, 松井和己, 真野篤志: 均質化理論に基づく非線形力学挙動のミクロ・マクロ連成モデリング, 日本機械学会論文集 A 編, Vol.66, pp.516-523, 2000.
- 12) Terada, K., Saiki, I. and Matsui, K.: Kinematically correct formulation for two-scale finite deformation problem, *Transaction of JSCEs*, Vol.2, pp.53-62, 2000.
- 13) 松井和己, 寺田賢二郎, 京谷孝史, 岩熊哲夫: 弾塑性複合材料のミクロ構造を反映した巨視的な降伏曲面の評価, 土木学会論文集 I, Vol.56, pp.335-346, 2001.
- 14) 三好俊郎, 白鳥正樹, 座古勝, 坂田信二: 有限要素法, 実務出版, 1976.

(2002年4月19日受付)