

マルチスケールモデリングに基づく非均質脆性材料の強度評価法

Multi-scale evaluation method for the strength of heterogeneous brittle materials by means of the material instability theory

浅井光輝*・寺田賢二郎**
Mitsuteru ASAI, Kenjiro TERADA

*学生会員 工修 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

**正会員 Ph.D. 東北大学助教授 大学院工学研究科土木工学専攻 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

We propose a method for evaluating the macroscopic strength and toughness of heterogeneous brittle materials by numerical analyses of microstructures. The method is based on the mathematical homogenization in conjunction with the theoretical framework of material instability. The hybrid variational formulation, which allows us to approximate the displacement in each finite element independently, is adopted for discontinuous deformation of microstructures. Then, the overall collapse of microstructure informs us of the orientation of discontinuous surfaces. The performance of the method is well demonstrated by representative numerical examples.

Key Words : Multi-scale modeling, Discontinuous deformation, Brittle materials, Material instability

1. はじめに

コンクリート, 岩盤, セラミックスなどの(準)脆性材料と呼ばれる材料の力学挙動についてミクロ-マクロの視点で見れば, 微視的な非均質性によりクラック, ボイドなどの不連続変形が誘発され, それが材料のマクロ的に観測される強度を支配していることは容易に推察される。しかしながら, この種の材料に関する従来の強度評価手法には微視的な視点はなく, 実験における供試体の“見かけ”の強度を材料強度として定義することが多い。供試体実験結果から材料の変形特性や強度を評価することは, ある種の平均化に相当するが, 境界条件の影響や寸法効果といった構造特有の挙動と材料固有の挙動とを明確に区別できないのが現状である。また, 理論的アプローチも現象論的な立場が主流であり, 材料の内部構造の力学挙動を加味したモデル化は困難とされている。

これに対して, 近年注目を集めている数学的均質化理論に基づくマルチスケール解析法¹⁾では, 「ミクロ」構造の数値解析から「マクロ」材料挙動を評価している。この手法では, ある微視領域内でのミクロ構造の力学挙動をマクロ的な材料挙動として与えるものであり, 材料モデルを構築する行為に対して数学的保証を与えることができる。また, 均質化理論によるマルチスケールモデリングによれば, ミクロ構造内での非線形挙動を材料挙動として反映したマクロ構造の解析を行うというミクロ-マクロの連成解析が可能となる。このマルチスケールモデリングは, 既に弾塑性体からなる複合材料への適用により, その有効性が示されている。²⁾しかし, コンクリートなどの脆性材料に対する応用的な研究はあるものの, これまでの研究成果は微視的破壊現象を考慮していないために, 未だ合理的な解析手法の確立には至っていない。例えば Taliercio et al.³⁾は,

脆性材料を母材とする複合材料に対して均質化法の適用を試みているが, その母材の材料構成モデルとしては巨視的な平均化構成則(軟化モデル)を採用しており, 微視的領域で観測される不連続挙動の再現性には疑問が残る。また Kyoya et al.⁴⁾は, 均質化理論に基づくマルチスケール解析を応用することで, 岩盤などの潜在的な分布亀裂を含む材料の強度特性評価法を提案しているが, 微視構造内のある点が破壊基準を満たした状態をマクロ(巨視)的な材料の破壊として定義しており, ミクロ構造の破壊形態や崩壊過程は考慮されていない。

そこで本研究では, 非均質体マルチスケールモデリング手法として知られる数学的均質化理論に基づき, (準)脆性材料の合理的な巨視的材料強度の評価法を提案する。提案する手法は以下に示す2つの特徴を有する。

- (1) ミクロ構造内での不連続体解析
- (2) 古典的な材料安定性の理論の導入

なお本研究では, (1)に関する不連続体解析手法として, 要素ごとに独立な変位場を設定できるハイブリット法に着目し, ミクロ領域の亀裂進展解析法として採用することになっている。本論文ではまず, 2章においてミクロ構造内の解析手法としてハイブリット法を適用することを可能にする連続条件緩和型変分形式による均質化法の定式化を示し, 3章ではミクロ領域内の亀裂進展を考慮したマルチスケール解析法を紹介する。そして, 4章においてマルチスケール解析に基づく材料強度評価法を提案する。最後に, 5章では単純な数値解析例により本手法の有効性を検証し, まとめと今後の課題を6章で述べる。

2. 連続条件緩和型変分形式による均質化法

本論文では, 連続条件緩和型変分形式による均質化法の定式化を与える。この定式化は, マルチスケール

解析におけるマイクロ構造のハイブリット法による不連続体解析を可能とするものである。

2.1 均質化理論

(1) 非均質体の支配方程式

複数の構成材料からなる非均質体の静的問題を考える。構造全体は領域 Ω_ε を占め、代表長さ ε により決定される基本周期構造 (ユニットセル) が定義されるものとする。構造全体の挙動は、ユニットセル内での材料配置および物性に支配され、その影響度は代表長さ ε に依存する。ここで、 ε に対する依存性を明記するために、変位、Cauchy 応力、ひずみをそれぞれ、 $u^\varepsilon(x)$, $\sigma^\varepsilon(x)$, $\varepsilon^\varepsilon(x)$ と表記することにする。このとき、構造全体 Ω_ε での境界値問題の支配方程式は次式のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \eta^\varepsilon : \sigma^\varepsilon(x) dv &= \int_{\Omega_\varepsilon} \rho^\varepsilon b \cdot \eta^\varepsilon dv \\ &+ \int_{\Gamma_\varepsilon} T \cdot \eta^\varepsilon ds \quad \forall \eta^\varepsilon \in \mathcal{V}^\varepsilon \\ \varepsilon^\varepsilon &= \text{sym}(\nabla u^\varepsilon) := \frac{1}{2} (\nabla u^\varepsilon + (\nabla u^\varepsilon)^T) \\ \mathcal{V}^\varepsilon &= \left\{ \eta(x) \in R^{\dim} \mid \eta_i^\varepsilon \in H^1(\Omega^\varepsilon), \eta^\varepsilon = 0 \text{ on } \Gamma_u \right\} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで、 ρ^ε, b, T はそれぞれ密度、物体力、表面力を示し、 η^ε は斉次の境界条件を満たす u^ε の変分量である。

(2) Two-scale 境界値問題

古典的な均質化理論⁵⁾⁶⁾に従い、微視的な非均質性が観測できないマクロスケール x とマイクロ構造内での非均質性を測る尺度であるミクロスケール $y (= x/\varepsilon)$ とを導入する。そして、変分方程式 (1) について $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限をとることで、各変数の極限が次のように与えられる。

$$\left\{ \begin{aligned} u^\varepsilon(x) &\rightarrow u^0(x) \\ \sigma^\varepsilon(x) &\rightarrow \sigma^0(x, y) \\ \varepsilon^\varepsilon(x) &\rightarrow \varepsilon^0(x, y) = \text{sym}(\nabla_x u^0(x) + \nabla_y u^1(x, y)) \end{aligned} \right. \quad (2)$$

ここで、 ∇_x, ∇_y はそれぞれ下付添字 x, y のスケールについて微分が取られることを示す。

上記の極限操作により、元の変分問題が2つの異なるスケールの変分問題に分離され、以下に示すミクロ、マクロの支配方程式が導かれる。(詳細は文献¹⁾を参照)

$$\left. \begin{aligned} \int_Y \nabla_y \eta^1 : \sigma^0(x, y) dy &= 0 \quad \forall \eta^1 \in \mathcal{W}_{\text{per}} \\ \sigma^0(x, y) &= c(y) : \varepsilon^0(x, y) \\ \varepsilon^0 &= \text{sym}(\nabla_x u^0(x) + \nabla_y u^1(x, y)) \\ \mathcal{W}_{\text{per}} &= \left\{ w(\cdot, y) \in R^{\dim} \mid w_i \in H^1(Y); Y\text{-periodic} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla_x \eta^0 : \Sigma(x) dx &= \int_{\Omega} \rho^H b \cdot \eta^0 dx \\ &+ \int_{\Gamma_\sigma} T \cdot \eta^0 ds \quad \forall \eta^0 \in \mathcal{V} \\ \mathcal{V} &= \left\{ \eta(x) \in R^{\dim} \mid \eta_i \in H^1(\Omega), \eta = 0 \text{ on } \Gamma_u \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここで、 $c(y)$ は複合材料を形成する各構成材料の弾性係数がミクロ領域 (ユニットセル) 内において分布していることを示す。また、マクロ支配方程式 (4) におけるマクロ応力 Σ / ひずみ E は、それぞれミクロ応力 σ^0

/ ひずみ ε^0 のユニットセル内での領域平均量として次式により与えられる。

$$\Sigma = \langle \sigma^0 \rangle, \quad E = \langle \varepsilon^0 \rangle. \quad (5)$$

そして Two-scale 境界値問題は、「 x について変分方程式 (3) を満足するようなミクロ状態変数の組 $\{u^1(x, y), \varepsilon^0(x, y), \sigma^0(x, y)\}$ を求め、同時にそれらの領域 Y での体積平均を含むマクロ状態変数 $\{u^0(x), E(x), \Sigma^0(x)\}$ が変分方程式 (4) を満たすように定める」のように設定される。

(3) 均質化弾性係数

線形弾性体に限定したときには、マクロ応力 ~ ひずみ関係を与える均質化弾性係数 C^H を定義できる。この場合まず、線形性を利用してミクロ応答変位 $u^1(x, y)$ をパラメータ x にのみ依存する変位 $\bar{u}^1$ を用いて

$$u^1(x, y) = -\chi^{kl}(y) E_{kl}(x) + \bar{u}^1(x) \quad (6)$$

と仮定すると、ミクロひずみ ε^0 は次式により与えられる。

$$\begin{aligned} \varepsilon^0(x, y) &= E - \text{sym}(\nabla_y \chi^{kl}(y)) E_{kl}(x) \\ &= (1^{kl} - \text{sym}(\nabla_y \chi^{kl})) E_{kl} \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、2 階のテンソル 1^{kl} の成分を次式に示す。

$$I_{ij}^{kl} = \frac{1}{2} (\delta_i^k \delta_j^l + \delta_j^k \delta_i^l) \quad (8)$$

次に、マクロ応力 Σ とミクロ応力 σ の関係式 (5) に式 (7) を代入しまとめることで、均質化弾性定数 C^H は次式により与えられる。

$$\begin{aligned} \Sigma &= \langle \sigma^0 \rangle = \langle c(y) : (1^{kl} - \text{sym}(\nabla_y \chi^{kl})) \rangle E_{kl} \\ &= C^H : E \end{aligned} \quad (9)$$

$$C_{ijkl}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left(c_{ijkl}(y) - c_{ijpq}(y) \frac{\partial \chi_p^{kl}(y)}{\partial y_q} \right) dy \quad (10)$$

ここで、 χ_p^{ij} は特性変位関数と呼ばれ、周期境界条件のもとで次式に示す方程式を解くことにより求められる。

$$\int_Y c_{ijpq}(y) \frac{\partial \chi_p^{kl}(y)}{\partial y_q} \frac{\partial \eta_i^1}{\partial y_j} dy = \int_Y c_{ijkl}(y) \frac{\partial \eta_i^1}{\partial y_j} dy \quad \forall \eta^1 \in \mathcal{W}_{\text{per}} \quad (11)$$

2.2 ミクロ問題の連続条件緩和型変分方程式

図-1 に示すようにミクロ領域全体 Y を部分領域 (= 要素) Y_e に分割したとき、要素領域内におけるミクロ自己つり合い問題の支配方程式は次式のように与えられる。(式 (3) と形式的に同一)

$$\int_{Y_e} \nabla_y \eta^1 : \sigma^0(x, y) dy = 0 \quad \forall \eta^1 \in Y_e \quad (12)$$

解析領域全体の支配方程式を記述するには、要素に関する支配方程式 (12) に次式に示す拘束条件が付帯する。

$$u^{1(+)} = u^{1(-)}, \quad t^{1(+)} = -t^{1(-)} \quad \text{on } \partial Y_e \quad (13)$$

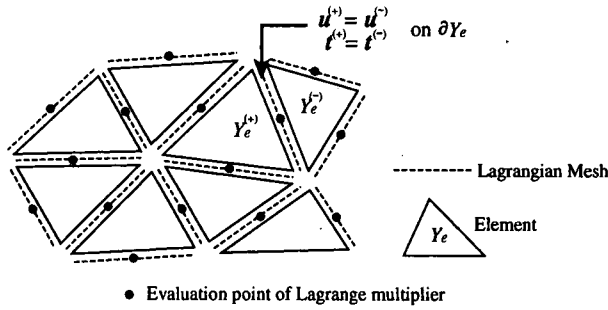


図-1 解析領域の要素分割

ここで、 ∂Y_e は要素境界面を示す。

また均質化法では、ミクロ境界値問題においてユニットセルの境界辺 ∂Y における周期境界条件を課す必要がある。このため要素辺での連続条件と同様にして、周期境界辺において次式に示す付帯条件が追加される。

$$u^{1(+)} = u^{1(-)}, \quad t^{1(+)} = -t^{1(-)} \quad \text{on } \partial Y \quad (14)$$

連続条件緩和型変分原理により上記の拘束条件を付帯条件から取り除くことで、ユニットセル領域全体 $Y (= \sum_{\text{elem}} Y_e)$ での支配方程式は次式のように与えられる。

$$\sum_{\text{elem}} \left[\int_{Y_e} \nabla_y \eta^1 : \sigma^0(x, y) dy \right] = \sum_{\text{surf}} \left[\int_{\partial Y_e \text{ and } \partial Y} (\eta^{1(+)} - \eta^{1(-)}) \cdot \lambda d\Gamma \right] \quad (15)$$

$$\sum_{\text{surf}} \left[\int_{\partial Y_e \text{ and } \partial Y} \delta \lambda \cdot (u^{1(+)} - u^{1(-)}) d\Gamma \right] = 0 \quad (16)$$

ここで、 λ は Lagrange 未定乗数、 $\delta \lambda$ はその変分量であり、 Σ は要素領域、あるいは未定乗数を定義する表面ごとに定義される量のアセンブルオペレータである。

同様にして、特性変位関数を与える式 (11) に対応する連続条件緩和型変分方程式は次式のように与えられる。

$$\begin{aligned} & \sum_{\text{elem}} \left[\int_{Y_e} \left(c_{ijpq}(y) \frac{\partial \chi_p^{kl}(y)}{\partial y_q} \frac{\partial \eta_i^1}{\partial y_j} \right) dy \right] \\ &= \sum_{\text{elem}} \left[\int_{Y_e} \left(c_{ijkl}(y) \frac{\partial \eta_i^1}{\partial y_j} \right) dy \right] \\ &+ \sum_{\text{surf}} \left[\int_{\partial Y_e \text{ and } \partial Y} (\eta_i^{1(+)} - \eta_i^{1(-)}) \lambda_i d\Gamma \right] \quad \forall \eta^1 \quad (17) \end{aligned}$$

$$\sum_{\text{surf}} \left[\int_{\partial Y_e \text{ and } \partial Y} \delta \lambda_i (\chi_i^{kl(+)} - \chi_i^{kl(-)}) d\Gamma \right] = 0 \quad \forall \delta \lambda \quad (18)$$

2.3 ハイブリット・ノードレス法

前述の連続条件緩和型の変分形式によれば、ミクロ領域内の各要素ごとに独立な変位場を仮定することが可能になる。このため、節点変位を解析自由度とする一般的な FEM とは異なり、形状認識のためだけに節点

を使用する解析手法(ある種のノードレス法)が実現される。

本研究では、剛体変位と要素内部でのひずみを解析自由度とし、要素内での変位を以下のように近似することにした。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta_p \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -(y - y_p) \\ 0 & 1 & (x - x_p) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_p \\ v_p \\ \theta_p \end{Bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} x - x_p & 0 & (y - y_p)/2 \\ 0 & y - y_p & (x - x_p)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (19) \end{aligned}$$

ここで、 (u_p, v_p, θ_p) は要素内のある任意の点における剛体変位を示し、 $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy})$ は要素内での微小ひずみの成分である。上記の変位場は要素内において定ひずみ状態と仮定していることと等価であり、通常では要素形状は三角形に限定される。離散化方程式は、式 (19) を支配方程式 (15), (16)、あるいは式 (17), (18) に代入することで導かれる。

以上に示した定式化は、連続条件緩和型の変分原理(これをハイブリット型ポテンシャルエネルギー原理と呼ぶこともある)に基づくものであり、本論文ではミクロ領域の解析手法として使用するこの手法をハイブリット・ノードレス法と呼ぶことにする。(変位に対する変数と物理的には表面力を与える Lagrange 未定乗数という異なる2つの物理量を未知変数とするという意味からハイブリット法と呼ぶことにした。)

上記と同様な変位の近似形式は、Hybrid Penalty Method (HPM)⁷⁾ および Discontinuous Deformation Analysis (DDA)⁸⁾ でも採用されている。しかし、要素間における変位の拘束条件をペナルティー法で処理するのに対して、本研究では Lagrange 未定乗数を独立変数として扱うこととした。これにより、ペナルティ係数に依存せずに精度の高い Lagrange 未定乗数が算出されることが期待され、その値を用いて矛盾なく要素辺での破断条件に用いることができる。また、Lagrange 未定乗数を含む問題の解法としては Augmented Lagrangian 法 (ALM) を採用する⁹⁾。ALM の計算手順などは、FEM による接触問題で使用されるものと本質的な相違点はなく、ここではその詳細は省略する。

3. ミクロ領域内の亀裂進展を考慮したマルチスケール解析

第2節の定式化に基づき、亀裂進展を含むマルチスケール解析法を与える。本研究では、均質化理論に基づきマクロ的な材料強度特性を評価することを目的としているため、マクロ境界値問題を解く必要はない。すなわち、ひずみ制御試験を想定し、マクロひずみを既知量として与えられた際のミクロ問題 (3) のみを解けばよいことになる。

まず、時刻 t から時刻 $t+1$ の間のマクロひずみ増分 (パターン) dE を固定し、これに対応したミクロ自己つり合い問題を解析する。そして、このミクロ自己つり合い状態の解から求められるミクロ応力の体積平均量

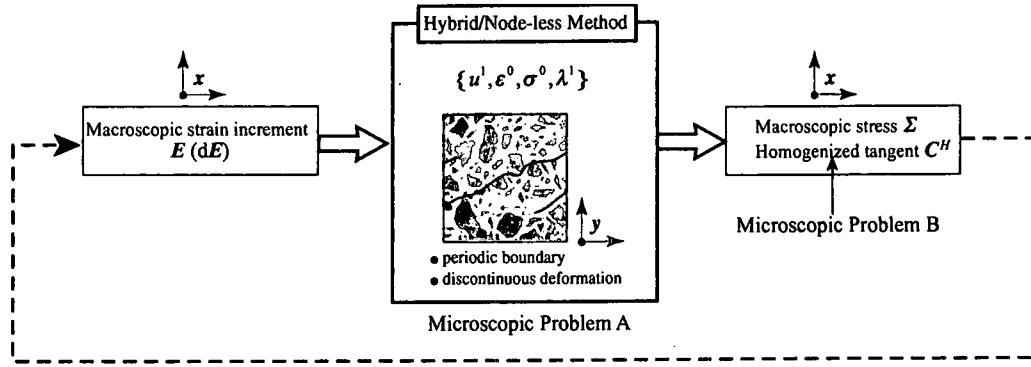


図-2 ひずみ制御試験の概略

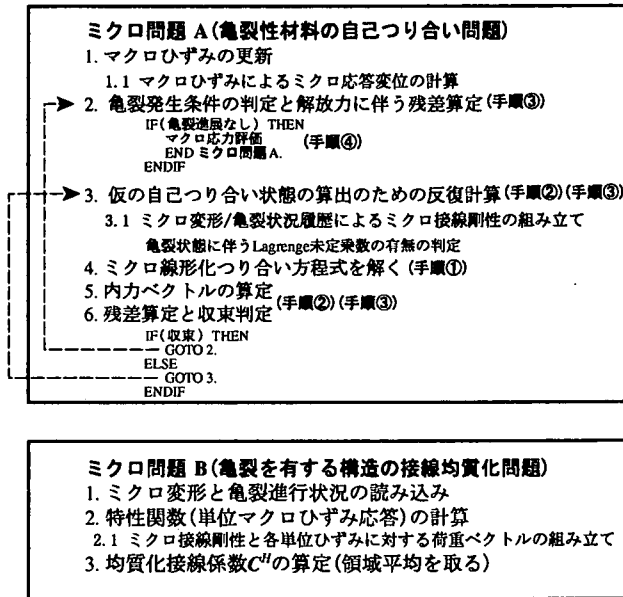


図-3 ミクロ問題の計算手順

としてマクロ応力を評価する(マイクロ問題 A)。また同時に、亀裂進展状況を反映する均質化(マクロ)接線係数 $C^H_{[t]}$ を評価する(マイクロ問題 B)。以上でこのひずみ制御解析は完了する。図-2にはひずみ制御解析の概略図を示し、図-3にはミクロ領域問題(マイクロ問題 A, B)の簡略化した計算手順を示す。ここで図-2が示すように、ミクロ領域での解析は(マクロ)材料の構成関係の役割を果たしていることに注意されたい。すなわち、ミクロ領域内での亀裂の発生・進展挙動がマクロ的には材料の非線形性として反映されることになる。

また、各時刻ごとに評価される均質化接線係数 $C^H_{[t]}$ とは、現在の亀裂発生状況を反映した均質化弾性係数のことであり、第2節に示す手順と同様により算出される。ここで亀裂進展問題においては、応力～ひずみ関係自体のなめらかさが喪失し、接線を定義できなくなることも考えられるが、この係数 $C^H_{[t]}$ は亀裂発生後の状況を表わす瞬間の剛性(弾性係数)を与える便宜的な接線である。

非線形問題となるマイクロ問題 A の解析手順は、弾塑性マルチスケール問題等のミクロ領域解析手順とほぼ

同様である。以下では、ハイブリット・ノードレス法によるミクロ領域での亀裂進展解析に特有の計算手順について補足説明を与える。

手順 [1] 新たな亀裂の進展がないものと仮定し、ミクロ境界値問題の支配方程式を次式のように線形化することで、ミクロ増分変位 $du^1_{[t+1]}$ 、Lagrange 未定乗数の増分値 $d\lambda_{[t+1]}$ の両者についてを ALM により解く。

$$\begin{aligned} & \sum_{\text{elem}} \left[\int_{Y_e} \nabla_y \eta^1 : c : \nabla_y du^1_{[t+1]} dy \right] \\ &= - \sum_{\text{elem}} \left[\int_{Y_e} \nabla_y \eta^1 : c : dE dy \right] \\ &+ \sum_{\text{surf}} \left[\int_{\partial Y_e \text{ and } \partial Y} (\eta^{1(+)} - \eta^{1(-)}) \cdot d\lambda_{[t+1]} d\Gamma \right] \quad (20) \end{aligned}$$

$$\sum \left[\int_{\partial Y_e \text{ and } \partial Y} \delta \lambda \cdot (du^{1(+)}_{[t+1]} - du^{1(-)}_{[t+1]}) d\Gamma \right] = 0 \quad (21)$$

手順 [2] 線形化問題の解として予測された状態においてミクロ自己つり合いに対する残差を評価し、残差が生じているときには Newton-Raphson 法による反復計算を行うことで仮の自己つり合い状態を求める。

手順 [3] 新たな亀裂の進展がないものとして求められた仮の自己つり合い状態において、亀裂の発生状況を調べる。ここで、亀裂発生が確認されたときには、亀裂発生に伴う残差(解放力と呼ばれることもある)を評価し、Newton-Raphson 反復計算により仮のつり合い状態を更新する。応力、ひずみなどの状態変数が更新されたミクロ領域内において、新たに発生する亀裂が確認されないつり合い状態(ここでは真のミクロ自己平衡状態と呼ぶ)が求められるまでこのミクロ領域内での反復計算を繰り返す。

手順 [4] 真の自己つり合い状態が求められたとき、初めてミクロ状態変数の体積平均量としてマクロ状態変数を評価し、すべての状態変数を更新する。

4. マルチスケール解析による材料強度評価

本章では、マルチスケールモデリングおよび古典的な材料の安定・不安定性の理論¹⁰⁾¹¹⁾に基づき、脆性的な挙動を示す複合材料のマクロ的な材料強度、不連続面の発生時期、及びその形成方向を特定する方法を提案する。

4.1 非均質材料の安定・不安定性

非均質材料の均質化(マクロ)接線係数 C^H は、巨視的な材料特性(マクロ材料特性)とみなすことができる。以下では、この係数を用いて材料の安定・不安定性に関する既往の理論を整理する。

材料の安定性に関する古典的な理論では、応力速度とひずみ速度のスカラー積の符号、あるいは次式に示すように接線剛性係数の正定値性により不安定性が判断できるとされている。¹²⁾

$$\det(C_{ijkl}^H + C_{klij}^H) = 0 \quad (22)$$

この条件により材料として不安定となる状態は、変位、あるいはひずみ場の連続・不連続性の程度により以下に示す3つの破壊形態に分類される。¹³⁾

- (a) 拡散型破壊 (diffuse failure): 弾塑性特性としての接線係数が特異となるが、変位・ひずみ場において不連続性が生じない状態。
- (b) 局所化破壊 (localized failure): 法線方向ベクトル $\mathbf{n}$ によって決定される不連続面に沿ってひずみ場(変位勾配)にのみ不連続性が生ずる状態(弱不連続性)。
- (c) 不連続変形破壊 (discrete failure): $\mathbf{n}$ によって決定される不連続面に沿ってひずみ場(変位勾配)だけでなく変位場においても不連続性が生ずる状態(強不連続性)。

本研究では、弾性体が脆性的に破壊する際の材料強度をターゲットとしていることから、(c)に示した強不連続性を伴う discrete failure を対象としている。

破壊形態(b),(c)に対応する不連続面発生条件は、楕円性の喪失 (loss of ellipticity) の条件として次式により与えられる。

$$\det(Q^H) = 0; \quad Q^H = \mathbf{n} \cdot C^H \cdot \mathbf{n} \quad (23)$$

ここで、 Q は2階の特性テンソル (acoustic tensor) であり、 $\mathbf{n}$ は不連続面の法線方向ベクトルを示す。ちなみに、上記の不連続発生条件式(23)を満たすときには、材料の不安定化条件式(22)も必ず満足することが証明されている。¹²⁾

4.2 マクロ材料強度の定義

前述の材料安定性の理論を利用して、非均質な脆性材料に対する均質材料として等価なマクロ材料強度を定義する。

まず、マルチスケール(ひずみ制御)解析を行い、図-4に示すようなマクロ応力～ひずみ関係が求められたものとする。任意の応力(ひずみ)増分過程による結果を相対的に評価できるように、ここでは応力、ひずみを

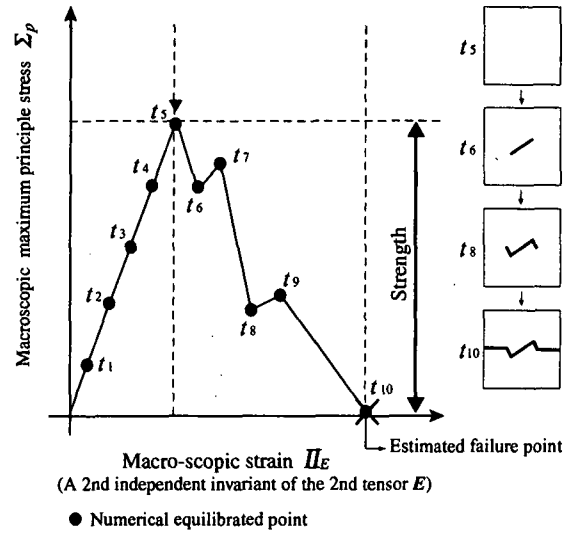


図-4 マクロ応力～ひずみ関係の模式図と材料強度の定義

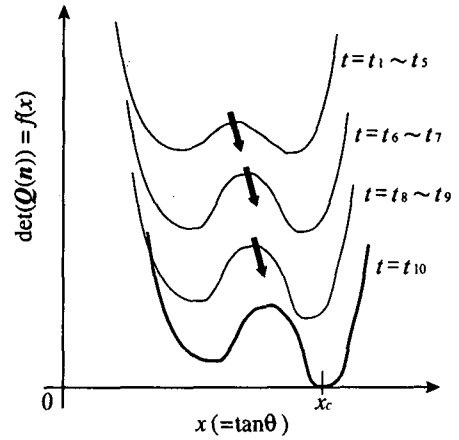


図-5 材料安定性指標の時刻変化の模式図

それぞれマクロ最大主応力 Σ_p 、マクロ(微小)ひずみテンソル E の2次不変量 $II_E (= \sqrt{E:E})$ を指標に測定することにした。各ミクロ自己つり合い状態において求められた均質化接線係数 C^H が式(23)を満たすことで、材料として不安定となる状態が求められたものとする。この状態は、ミクロ構造が完全に破壊してしまい、マクロ的には材料としての特性を定義できなくなる状態(=終局状態)になることに対応している。本研究では、材料強度を以下のように定義することにした(図-4)。

材料強度: 材料として終局状態を迎えるまでのマクロ最大主応力の(絶対値の)最大値

ここで、必ずしもマクロ応力～ひずみ曲線のピーク値が材料強度とはならないことに注意されたい。すなわち、終局状態を特性テンソル Q の特異性により定義しているため、あるマクロ応力成分～ひずみ成分曲線がピーク値を迎える前に終局状態に至る場合がある。このことは、次節における数値解析例にて例示する。

4.3 マクロ不連続面の同定

材料としての終局状態ならびにマクロ的な不連続面の同定方法についての詳細を示す。

各つり合い点での均質化接線係数 C^H により与えられる acoustic tensor Q^H は、不連続面の法線方向ベクトル $\mathbf{n}$ の関数であり、2次元問題において式(23)は次式により与えられる。

$$\det(Q(\mathbf{n})) = f(x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + x^3 + a_4 x^4 \quad (24)$$

$$\begin{aligned} a_0 &= C_{1111}^H C_{1212}^H - C_{1112}^H C_{1211}^H \\ a_1 &= C_{1111}^H C_{1222}^H + C_{1111}^H C_{2212}^H - C_{1112}^H C_{2211}^H - C_{1122}^H C_{1211}^H \\ a_2 &= C_{1111}^H C_{2222}^H + C_{1112}^H C_{1222}^H + C_{1211}^H C_{2212}^H \\ &\quad - C_{1122}^H C_{1212}^H - C_{1122}^H C_{2211}^H - C_{1212}^H C_{2211}^H \\ a_3 &= C_{1112}^H C_{2222}^H + C_{1211}^H C_{2222}^H - C_{1122}^H C_{2212}^H - C_{1222}^H C_{2211}^H \\ a_4 &= C_{1212}^H C_{2222}^H - C_{2212}^H C_{1222}^H \end{aligned}$$

ここで、 $x = \tan\theta$ ($\mathbf{n} = (\cos\theta, \sin\theta)$) である。均質化接線係数はミクロ領域内において亀裂進展が発生する際に変化し、それに伴い $f(x) = \det(Q(\mathbf{n}))$ の値は図-5に示すように変化していく。実際にマクロ的な不連続面の発生を調べるには Q^H の正定値性が欠如する状態を求めればよく、3次方程式 $f'(x) = 0$ を解き、4次関数の最小値の符号を調べるだけで遂行される。また、 $f(x)$ の最小値が x_c においてはじめて負となるとしたとき、そのマクロ的な不連続面の法線方向は、

$$\theta_c^H = \arctan(x_c) \quad (25)$$

として求められる。この方向が定められる状態がすなわち終局状態である。

5. 強度評価例

提案する材料強度評価法を極めて単純なミクロ構造を持つ複合材料に適用し、数値結果をもとに本手法の妥当性を例証する。

5.1 解析モデル・亀裂発生規準

本研究では、複雑な形状を持つ微視構造のモデル自动生成を睨んでイメージベースモデリングを採用することにした。具体的には、ハイブリット・ノードレス法における三角形形状の要素を組み合わせ正方形を生成し、それを1画素に置き換えることにした。この際、亀裂判定は正方形の外部境界辺の4点でのみで行い、4つの内部境界辺では亀裂は発生しないこととした。

第3節で示した計算手順[3]で使用する亀裂発生規準としては、変位の拘束条件を満足させるために導入した Lagrange 未定乗数を使用することにした。

$$F_{cra} > f(\lambda) \quad (26)$$

ちなみに、Lagrange 未定乗数は物理的には表面力を与えている。

$$\lambda = t^{(+)} = -t^{(-)} \quad (27)$$

亀裂発生規準の具体的な例としては、表面力(未定乗数)の要素辺に対する法線方向成分、あるいは接線方向成分も考えられるが、本研究では未定乗数の絶対値を採用する。なお亀裂発生後には、亀裂発生面を共有する要素間に Lagrange 未定乗数を作用させないことで不連続変位を発生させる。

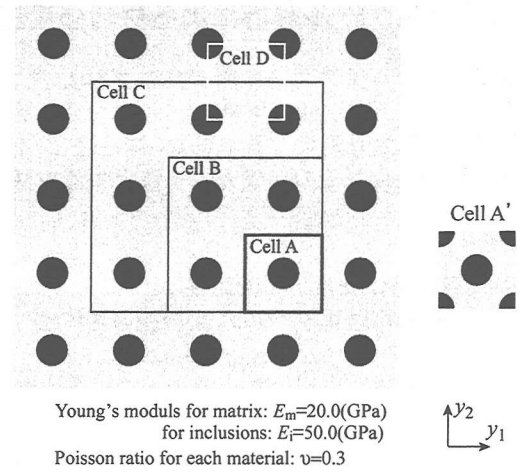


図-6 検証例題 1: 円形介入物モデル

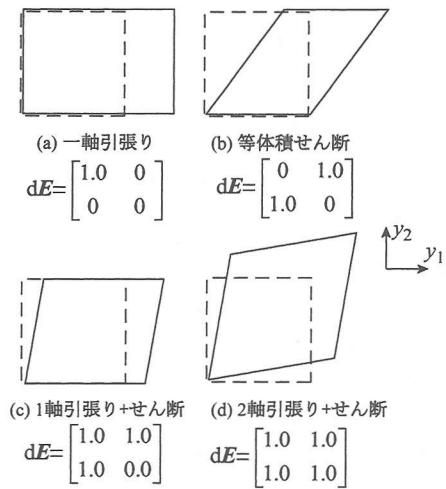


図-7 (マクロ) 載荷ひずみパターン

5.2 検証例題 1: 円形介入物

(1) 解析条件

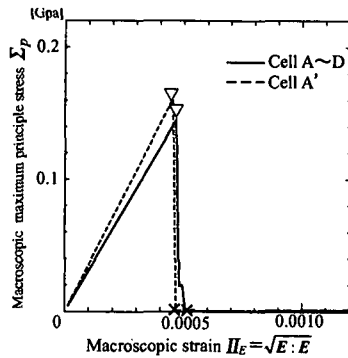
図-6に示す単純な円形介入物モデルを用いて、提案する材料強度評価法の適用性を検証する。その検証項目を以下に示す。

1. 周期構造として基本周期構造(最小なもの)を採用した場合と複数の基本周期構造から形成される周期構造を選択した場合の比較 (Cell A~C の比較)
2. 位相が異なる基本周期構造を選択した際の解の比較 (Cell A, D の比較)
3. 異なる基本周期構造における解の比較 (Cell A, A' の比較)

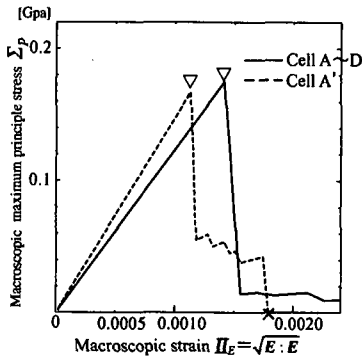
基本周期構造モデル (Cell A) の要素分割 (画像の解像度) 30×30 を基準とし、その他のモデルはこの解像度に合わせて作成した。なお、載荷するマクロ的なひずみパターンは図-7に示す4パターンとする。また、母材と介入物の界面破壊基準を $F_i = 0.2[\text{GPa}]$ 、母材の亀裂発生基準を $F_m = 0.3[\text{GPa}]$ として統一する。

(2) 解析結果と考察

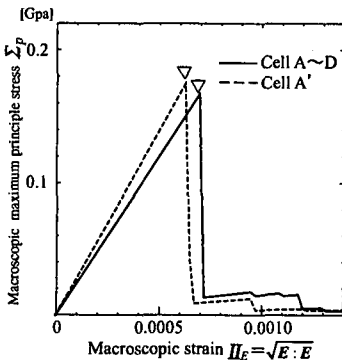
図-8は、ミクロ自己つり合いを満たす状態より算出されたマクロ応力-ひずみ(ミクロ応力の体積平均とし



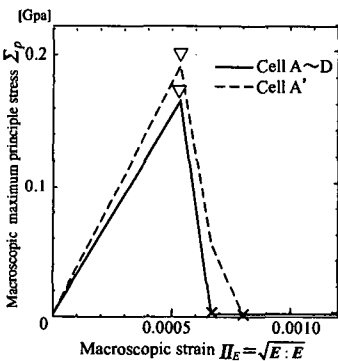
(a) 一軸引張り



(b) 等体積せん断



(c) 1軸引張り+せん断



(d) 2軸引張り+せん断

図-8 (マクロ) 応力～ひずみ関係

て与えられるマクロ応力-ミクロ問題の入力値として代入したマクロひずみ) 関係を示している。この図には、前節で定義した強度点(▽) および終局点(x) を合わせてプロットしている。ここで、図-8には、Cell A～D、A' の5つの結果を同時に表示しているが、この図より以下のことが特徴として挙げられる。

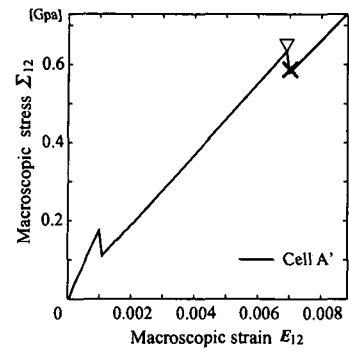


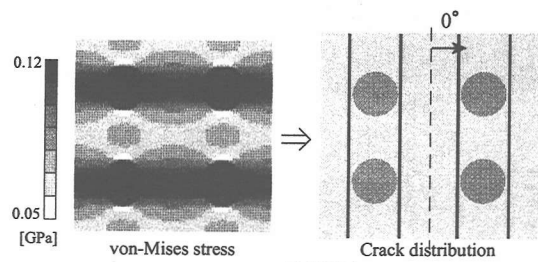
図-9 (マクロ) せん断応力～ひずみ関係 < Cell A' (b) >

- Cell A～D の4つモデルにおける応力-ひずみ関係は4つの载荷条件 ((a)～(d)) の試験とも完全に一致している。
- Cell A～D と Cell A' と結果を比較したとき、材料強度およびその際のひずみはほぼ同一の値を示す。
- 体積分率の高い Cell A' は Cell A～D のモデルと比較して、線形範囲内での剛性が多少大きくなっていることが確認できる。
- 载荷条件 (b) のとき、Cell A～D、A' の5つ試験体は比較的大きな靱性を発揮している。
- 強度を最大主応力で評価したとき、すべての载荷条件にてほぼ同レベルの値を示す。

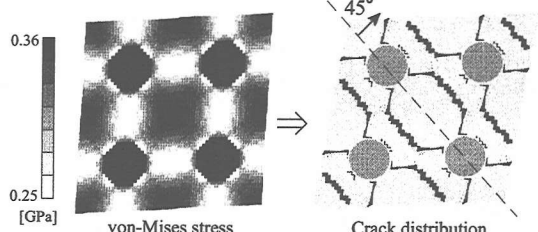
また図-9には、Cell A' の载荷条件 (b):等体積せん断時のせん断応力～ひずみ関係図を示しているが、応力～ひずみ曲線が明らかに上昇を続けているにも関わらず途中で終局点(x)が発生し、強度が発現していることが確認できる。(図-8に示すように、主応力で観測した際には ピーク応力値=材料強度 となっている。)

次に、線形の範囲内での応力状態と終局状態後の亀裂進展状況を図化する。なお Cell A～D の結果は、基本周期構造モデル (Cell A) の結果の重ね合わせにより完全に再現され、本質的にまったく同じ結果であることから、Cell B の結果のみを図-10に図化する。また、Cell A' の結果を図-11に示す。この図には、Cell A～D の結果と比較するため、Cell B と同サイズの結果を与えている。これらの図より、(a)、(b)、(d) の载荷パターンについては、算出されたマクロ的な不連続面の法線方向は x 軸を基準にし [(a) 0°, (b) 45°, (d) 45°] と Cell A～D、Cell A' の5つのセルは同じ結果を与えている。そして载荷パターン (c) についてのみ、Cell A～D は 5.7° に対し、Cell A' は 15.1° と異なる結果を与えている。また終局点では、完全に周期的な亀裂が形成されていることがわかる。このようにして得られた方向は、ミクロ領域に発達した亀裂の“平均的な”不連続面の方向であり、マクロ的にどのような方向に割れが生じ得るかを与えるものである。

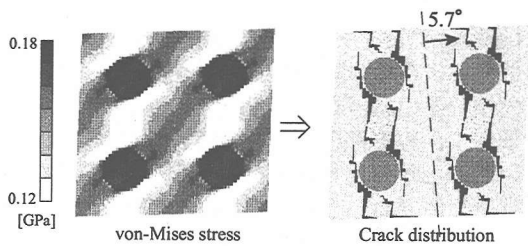
以上の結果より、基本周期構造が唯一求められるようなミクロ構造のときには、任意の範囲で周期構造を選択したとしても、強度をはじめとするマクロ的な物性は一意に決定されるものと期待できる。



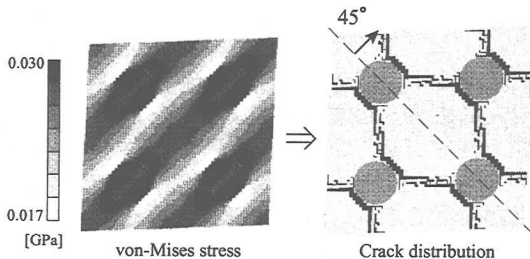
(a) 一軸引張り



(b) 等体積せん断

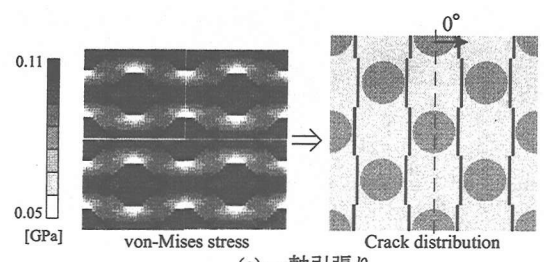


(c) 1軸引張り+せん断

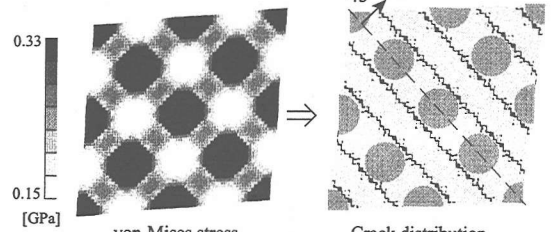


(d) 2軸引張り+せん断

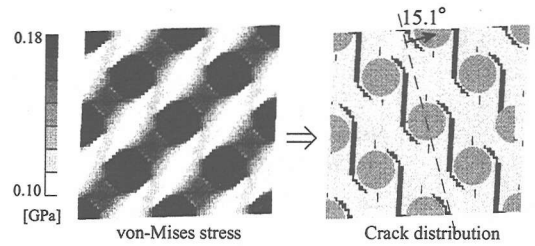
----- Macroscopic discontinuous line



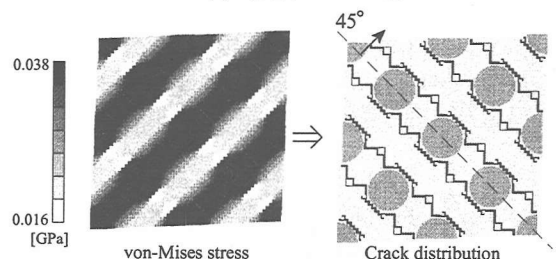
(a) 一軸引張り



(b) 等体積せん断



(c) 1軸引張り+せん断



(d) 2軸引張り+せん断

----- Macroscopic discontinuous line

図-10 線形範囲内の応力分布と終局状態時の破壊モード (Cell A~D)

図-11 線形範囲内の応力分布と終局状態時の破壊モード (Cell A')

5.3 検証例題 2: 棒状介入物

図-12に示す解析モデル (Cell a 及び b) に対する解と前節での円形介入物の解とを比較し、ミクロ構造の違いによる影響を例証する。ここでは、図-7に示すマクロひずみパターン (a), (d) を用いることにする。

(1) 解析結果と考察

解析結果として、図-13には線形の範囲内での応力状態と終局状態後の亀裂進展状況を示し、図-14には Cell a, b から得られた (マクロ) 応力~ひずみ関係を示す。同図には、比較のために前節における Cell A, A' に対する結果も載せている。

前節での荷重条件 (c) における Cell A, A' の比較でも観察されたように、同じ荷重条件にも関わらずミクロ構造の相違により巨視的不連続面の方向が異なる結果が得られている。また、Cell a, b は介入物の体積分率

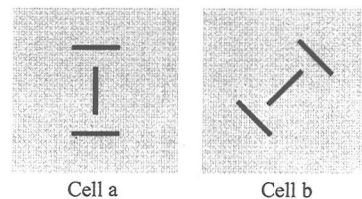


図-12 検証例題 2: 棒状介入物モデル

は同じ解析モデルであるが、荷重パターン (a) においては異なる強度値が得られていることがわかる。この結果は、ミクロ構造内での介入物の形状や配置がコンクリートなど非均質脆性材料の強度を支配し得ることを示唆している。

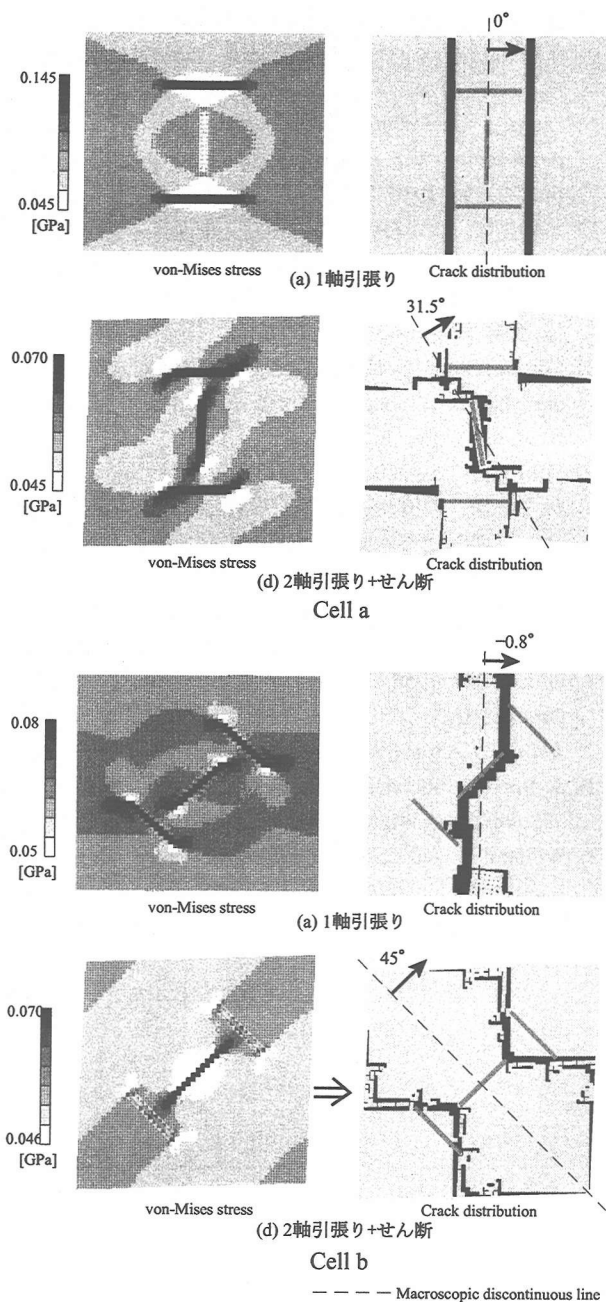
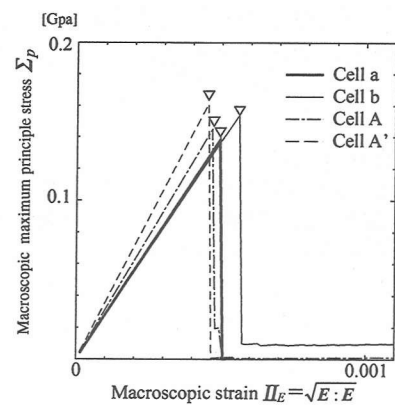


図-13 線形範囲内の応力分布と終局状態時の破壊モード (Cell a, b)

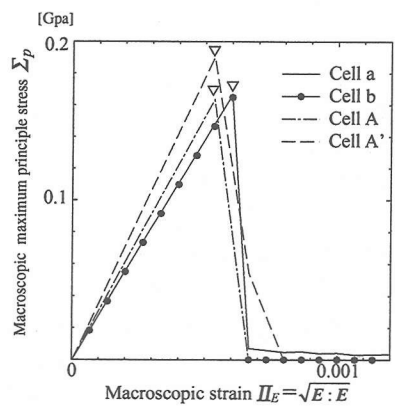
6. おわりに

本研究では、亀裂進展問題におけるマルチスケール (ひずみ制御) 解析の定式化とアルゴリズムを示し、その数値結果と古典的な材料安定性理論から材料強度特性 (強度及びマクロ的な亀裂面の方向) を定義する方法を提案した。この材料強度評価法の特徴を以下に列挙する。

- 本研究により与えられる材料強度特性は、従来の破壊力学などでは扱いが困難である材料のミクロ構造の影響を反映することができる。



(a) 一軸引張り



(d) 2軸引張り+せん断

図-14 (マクロ) 応力～ひずみ関係の比較

- 材料強度だけでなく、マクロ的な不連続面が発生する終局状態と不連続面の方向が算出できる。
- 実験により材料特性を測る方法とは異なり、供試体形状、境界条件などの影響を受けず、周期境界条件下という材料としてより適切な境界条件の結果より算出される特性である。
- 増分ひずみパターンを制御でき、供試体実験では困難となる載荷状態も容易に再現できる。

数値解析による検証より、本手法は異なるサイズで周期構造を選択したとしても基本周期構造と全く同じ結果 (材料強度特性) を与えることを確認した。また、提案法により算出されるマクロ不連続面の方向は、ミクロ構造内での亀裂進展状況を正確に反映するものであり、材料のミクロ構造における介入物の形状や方向性 (方位) の影響までを再現できるものであった。

また本論文で示したマルチスケール解析は、マクロひずみ値を入力値としマクロ応力値を出力するというマクロ的な材料試験に相当するものであり、亀裂性の複合材料に対する亀裂進展を考慮したマクロ境界値問題は解いていない。マクロ的には連続体を仮定することで、この定式化のままマクロ境界値問題を解析することも可能であるが、このときにはマクロ構造の有限要素内の応力評価点に対応するミクロ構造の限界が、本論文で定義した材料の終局状態であるものと考えられる。

今後の課題を以下に示す。

1. ミクロ構造解析ツールの改良あるいは変更 (現状の亀裂進展解析は要素分割に依存した解を与える恐れがあるだけでなく、計算効率の面での問題点が指摘される。)
 2. より複雑なミクロ構造を持つ材料への適用および3次元イメージベース解析への拡張
 3. 材料強度・破壊靱性の合理的な評価指標の確立
- ただし、マルチスケール解析と古典的な材料安定性の理論を関連づけて材料強度特性を定義する本手法には一般性があり、課題1. 2. に対してはミクロ構造解析手法の改良・変更により容易に対応できると考えている。また、課題3. の靱性についてもミクロ構造の破壊の解析結果から評価されうると考えている。

参考文献

- 1) Terada, K. and Kikuchi, N.: A class of general algorithms for multi-scale analysis of heterogeneous media, *Comput. Meths. Appl. Mech. Eng.*, 190, pp.5427-5464, 2001.
- 2) 寺田 賢二郎, 菊池 昇: 非均質弾塑性体のマルチスケール解析のための一般化アルゴリズム, 土木学会論文集, No.633/ -49, pp.217-229, 1999.
- 3) Taliercio, A. and Coruzzi, R.: Mechanical behaviour of brittle matrix composites: a homogenization approach, *Int. J. Solids Structures*, 36, pp.3591-3615, 1999.
- 4) Kyoya, T., Terada, K. and Kawamoto, T.: Multi-scale limit load analysis for discontinuous rock mass based on the homogenization method, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 23, pp.995-1019, 1999.
- 5) Benssusan, A., Lions, J.-L. and Papanicoulau, G.: *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, North-Hoolland, Amsterdam, 1978.
- 6) Lions, J.-L.: *Asymptotic calculus of variations, Singular perturbations and asymptotics*, Academic Press, New York, pp.227-296, 1980.
- 7) 竹内則雄, 大木裕介, 上林厚志, 草深守人: ハイブリッド型変位モデルにペナルティ法を適用した離散化モデルによる材料非線形解析, 日本計算工学論文集, Vol. 3, No.2001002, pp. 53-62, 2001.
- 8) Shi, G.H. and Goodman, R.E. : Generalization of two-dimensional discontinuous deformation analysis for forward modeling, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, Vol.13, pp. 359-380, 1989.
- 9) 浅井 光輝, 寺田 賢二郎, 池田 清宏, 山岸 道弘: Hybrid-FCM の開発とその多相材料の界面破壊解析への適用, 応用力学論文集, Vol.4, pp.85-94, 2001.
- 10) Hill, R. : A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids, *Mechanics and Physics of Solids*, 6, pp.236-249, 1958.
- 11) Drucker, D.C.: A definition of stable inelastic materials, *Journal of Applied Mechanics* 26, pp101-106, 1959.
- 12) de Borst, R. and van der Giessen, E.: *Material Instabilities in Solids*, John Wiley & Sons, New York, 1998.
- 13) William, K. and Etse, G: Failure assessments of extended Leon model for plain concrete, *Conf. Proc. Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures*, Pineridge Press, Swansea, pp.851-870, 1990.

(2002 年 4 月 19 日受付)