

弧長法のための一反復解法と弧長自動設定法

An iteration method and automatic length setting method for arc length method

岩崎英治*・松野純一**・長井正嗣***

Eiji IWASAKI, Junichi MATSUNO and Masatsugu NAGAI

*正会員 工博 長岡技術科学大学 助教授 環境・建設系 (〒 940-2188 新潟県長岡市上富岡町 1603-1)

**正会員 工修 日本道路 (株) (研究当時 長岡技術科学大学大学院)

***正会員 工博 長岡技術科学大学 教授 環境・建設系 (〒 940-2188 新潟県長岡市上富岡町 1603-1)

In the nonlinear structural analysis, several indefinite and non-physical parameters are required to solve nonlinear simultaneous equations. It is no clear how to set those parameters. In this reason easy and distinct method are needed. In this study the minimum residual quantities method which is based on the arc-length controlling method is proposed. Automatic arc-length setting method, which can be automatically determined with reference to change of curvature of load-displacements curve, is proposed.

Key Words : arc length method, iteration method, minimum residual quantities method, automatic length setting method

1. まえがき

構造物の非線形平衡方程式の解法には、種々の方法が提案されている。多くの解法に共通しているのは各増分毎の求解に、ニュートン法のような反復解法を用いていることである。これらの解法では、各増分段階での初期値を求めて、反復計算により釣り合い曲線上の解を得る。

最も基本的な方法は荷重増分を与えて変位を求める荷重増分法である。また、変位成分の一つの増分量を与えて、残りの変位成分と荷重を求める変位増分法^{1),2)}がある。これらは、それぞれ制御変数が荷重と変位であるため、釣り合い曲線がこれらの制御変数に関して単調な関数になっていなければ、釣り合い曲線の一部が求められるだけである。

そこで、釣り合い曲線に沿った弧長を制御変数とする弧長増分法が提案されている。この方法は前者の方法に比べて釣り合い曲線の形状に依らず、原理的には極めて汎用性の高い解法である。しかし、荷重増分法や変位増分法に比べて、弧長の物理的な意味が不明確なことや荷重や変位のような単純な成分ではないために、以下のような問題点がある。

- 弧長が荷重や変位、回転角などの物理量の異なる成分で定義されることによる問題
- 各増分段階での初期値は、与えられた弧長を半径とする球面と直前に求められた釣り合い曲線の点での接線との交点であり、この点が2個出現することによる問題
- 初期値から釣り合い曲線上の解を求めるための反復解法に関する問題
- 各増分段階での弧長の設定方法に関する問題

このため、弧長法の改良が多くの研究者により行われている。

弧長を定義する成分の物理的な次元が異なることと、これに付随した数値的なアンバランスを調節することにより収束性が改善されるため、多くの論文^{4),5),6),12),14)}では、スケーリングパラメータの概念を導入している。しかし、スケーリングパラメータの設定方法を明確に示しているものは少なく、試行錯誤等により与える必要がある。

各増分段階での初期値は、弧長増分法の場合には、2次方程式で表される球面と釣り合い曲線の接線との交点で表されるために二つの値が得られ、二つの値の正しい方を選択しなければ、すでに求めた釣り合い曲線を後戻りすることになる。そこで、直前に求めた二つの増分段階での収束解を結んだ直線と釣り合い曲線の接線との角度の小さい方を用いる方法⁸⁾や、直前の二つの収束解を結んだ直線の法平面内での二つの増分段階での変位ベクトルの角度を用いたもの¹²⁾、接線剛性行列の行列式の値の符号の変化を利用したもの^{3),4)}、二つの初期値での不平衡力を求めてその小さい方を選択する方法¹³⁾など多数提案されている。しかし、分岐点がある場合や、釣り合い曲線の形状が急激に変化する部分では正しい初期値を選択できない場合があり、そのような箇所では、とりあえず収束解を求めて後戻りしていることが判明した時点で再計算し直すか、あるいは弧長増分量を小さくすることが必要になる。

各増分段階での初期値は、増分量に関する線形化のために釣り合い曲線から離れた点にある。この初期値から釣り合い曲線上の解を得るための反復解法にも、常に弧長を半径とした球面上で収束させる方法や、球面の接平面上で収束させる方法、各増分段階での変位増分と荷重

増分からなるベクトルに直交しながら収束させる方法などの幾何学的な制約条件を課した方法^{3),4),5),8),9),11),12)}, 不平衡力から求めた不平衡変位の修正量が最小となる方向へ収束させる方法^{7),10)}など多くの手法が提案されている。しかし、釣り合い曲線の形状によっては収束しなかったり、すでに求めた釣り合い曲線の後戻りする場合がある。

これらの初期値の選択方法や反復解法の問題点は、弧長増分量を小さく採ることで解決する場合が多い、そこで、釣り合い曲線の曲率の大きな部分では、自動的に弧長を短くしたり、曲率の小さな部分では弧長を長くするような手法が幾つか提案されている。これらの方法には、直前の増分段階での反復計算の繰り返し回数に基づいた方法⁴⁾や既に求めた釣り合い曲線上の点から近似した曲線の曲率に基づいた方法^{6),14)}などが提案されている。しかし、これらの方法も極端に弧長が短くなったり長くなったりする場合があり、その制限値を設けることによりこれらの問題を回避しているが、制限値の設定方法が不明確であり、解析対象の問題により変化することが考えられる。

以上のように弧長法に関する多くの方法が提案されているが、試行錯誤等により種々のパラメータを適切に設定しなければ、解析対象の非線形挙動の複雑さによっては解析できない場合があり、解析対象や現象に関する汎用性に特徴のある弧長増分法にも種々の問題点が残っていると考えられる。

そこで、本論文は、弧長法に関するこれらの問題点に留意しながら、スケーリングパラメータを課す成分を限定することを念頭におき、初期値から釣り合い曲線上の解を求める新しい反復解法と釣り合い曲線の形状から次の増分段階の弧長を自動的に設定する方法を提案し、数値計算によりその妥当性と有効性を示す。

なお、平衡方程式の他に弧長に関する制約条件式が現れるために、弧長増分法を直接、プログラムに適用すると、係数行列の対称性を損なうことになるが、対称性を保持したまま、制約条件を考慮する方法も提案され、適用されている^{2),3),5),8),9),12),13),14)}。この対称性を保持した方法では、釣り合い曲線の分岐点や荷重の極大、極小点で特異になるが、対称性を保持した既往の多くの論文では、多自由度の問題では、増分区間の区切りがこれらの点に完全に一致しない限り、特異になることは少なく、数値計算上の問題のないことが経験的に確認されている²⁾ので、本論文でもこの方法を用いる。

2. 平衡方程式

本論文は、構造物に作用する荷重ベクトル P が、作用途中において基準となる荷重ベクトル $\bar{P}$ と荷重倍率 λ の積で表される場合を対象にする。このとき、変位

法によるマトリックス構造解析法や有限要素法に現れる非線形平衡方程式は、次のように表すことができる。

$$F(D) = \lambda \bar{P} \quad (1)$$

ここで、 $F(D)$ は構造物内に生じている内力からなるベクトルであり、上式の平衡方程式の解は、変位ベクトル D と荷重倍率 λ を成分とする空間内の曲線である。

平衡方程式の増分形は、次式のように表される。

$$K \Delta D = \Delta \lambda \bar{P} + (\lambda \bar{P} - F) \quad (2)$$

ここで、 K は接線剛性行列、 ΔD は変位増分ベクトル、 $\Delta \lambda$ は荷重倍率の増分、 $(\lambda \bar{P} - F)$ は不平衡力を表している。上式の解 ΔD は、右辺第1項の基準荷重による変位 D_0 、第2項の不平衡力による変位 D_1 から次のように表せる。

$$\Delta D = \Delta \lambda D_0 + D_1 \quad (3)$$

なお、 D_0, D_1 は次の方程式の解である。

$$K D_0 = \bar{P}, \quad K D_1 = \lambda \bar{P} - F \quad (4)$$

3. 弧長増分法

弧長増分 ΔS は、釣り合い曲線を表す空間の各成分の数値的な大きさを揃えるためのスケーリングパラメータ $\alpha_p, \alpha_i (i = 1, 2, \dots, n)$ を含めた次のような式で定義できる。

$$\Delta S^2 = (\alpha_p \Delta \lambda)^2 + (A \Delta D)^T (A \Delta D) \quad (5)$$

ここで、

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix} \quad (6)$$

上式(5)に式(3)を代入すると、荷重倍率増分 $\Delta \lambda$ に関する2次方程式が得られ、直前の増分段階での反復計算により十分な精度で釣り合い曲線上の点を得られ、 $D_1 = 0$ と見なせるならば、次の増分段階での弧長増分 ΔS に対応する荷重倍率は次のように得られる。

$$\Delta \lambda = \pm \frac{\Delta S}{\sqrt{\alpha_p^2 + D_0^T A^2 D_0}} \quad (7)$$

3.1 スケーリングパラメータ

弧長を定義する成分は、荷重倍率や変位、回転角のような物理的な意味の異なる量で構成されているために、数値的に大きくばらつくことがある。そこで、各成分に係数を乗してその大きさを揃えることが行われる。しかし、適切なパラメータの値を設定する方法が確立されていないため試行錯誤により決めることになる。

スケーリングパラメータの定義には大きく二つの考え方があり、一つは、荷重倍率にだけスケーリングパラメータを定義する方法^{5),12),14)}と、上式のように荷重倍率と変位成分の全てにスケーリングパラメータを定義する方法^{4),6)}がある。パラメータの設定方法が曖昧であることを考えると設定する必要のあるパラメータは少ない方が良く、荷重倍率にだけスケーリングパラメータを定義する方法は、パラメータが一つであり、妥当な方法と考えられるが、弧長が多く成分で定義されていると特定の成分での荷重-変位曲線を見てもパラメータの数値の意味が掴み難い。

そこで、本論文は、荷重倍率と変位成分の中から制御する変数を数個に限定した方が、これらの変数に関するスケーリングパラメータを設定し易いと考え、全ての成分にパラメータを付けた式(5)のような定義を用い、実際の解析では、後述の計算例にも示しているように、現象を支配すると考えられる数個の成分のみを対象にし、残りの変位成分のスケーリングパラメータはゼロと扱う。

3.2 初期値の選択方法

弧長増分を半径とする球面と釣り合い曲線の接線との交点が二つあるために、符合の異なる二つの値が得られる。適切な方を用いなければ、求めた釣り合い曲線を後戻りすることになるので、いろいろな方法が提案されている。しかし、釣り合い曲線上に分岐点がある場合や、釣り合い曲線の曲率が大きく、急激に向きを変えるような場合には、適切な初期値を選択できない場合がある。

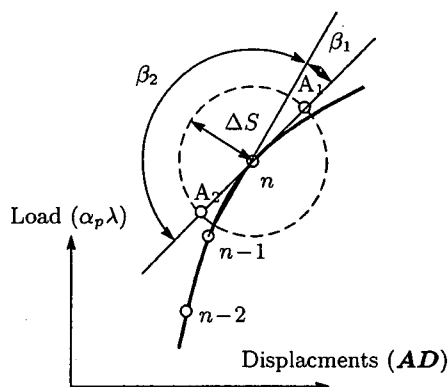
そこで、本論文は、最も簡単な方法である図-1(a)のように、直前に求めた二つの解を結んだ直線と接線との角度の小さい方の値を用いることにする。この場合にも、図-1(b)のように釣り合い曲線の曲率が大きい場合には、釣り合い曲線を後戻りすることがあり最善の方法ではないが、弧長増分を小さく設定すれば、この問題を防ぐことが出来るので、後述の弧長自動設定法と組み合わせて使用することを前提とする。なお、角度を求めるときの荷重倍率と変位成分には、前述のスケーリングパラメータを乗じた成分を用いる。

4. 反復解法

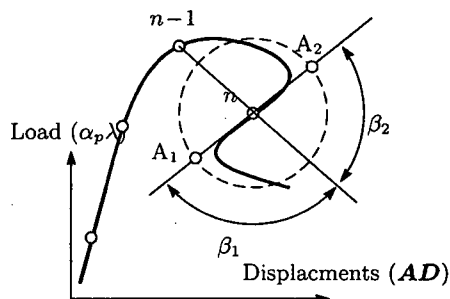
式(7)の適切な符号の値を用いたときの解は、図-1中の点 A_1 または、図-2中の点 A_1 に相当している。この点から釣り合い曲線上の点を求めるために反復解法を用いる必要がある。

4.1 既往の方法

この方法には図2のように、常に球面上を移動しながら解を求める方法や増分ベクトルに直交しながら解



(a) 二つの荷重倍率増分 $\Delta\lambda$ ($\beta_1 < \beta_2$)



(b) 釣り合い曲線の曲率が大きい場合 ($\beta_1 > \beta_2$)

図-1 弧長増分 ΔS に対応する荷重倍率 $\Delta\lambda$

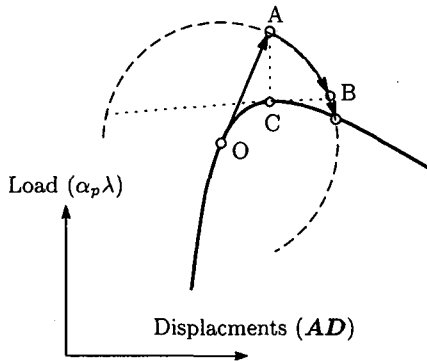
を求める方法、不平衡力から求めた不平衡変位が最小となる方向へ解を求める方法などがある。しかし、常に球面上で反復計算を行う方法は、初期値の場合と同様の二つの解の選択に関する問題が、各反復計算ごとにあり、釣り合い曲線の曲率の大きな部分では、振動したり、後戻りする場合がある。常に、接線方向を向くように修正する方法では、解の選択に関する問題はないが、弧長増分を半径とする球面から大きく離脱することがある。これらの方法に比べて不平衡変位を最小とする方法^{7),10)}は、少ない回数で収束解を得ることができ優れた方法であるが、荷重倍率成分を含んでいないため、釣り合い曲線の多くの変位増分の符号が反転するスナップ・バック現象では、収束解が得られないことも考えられる。また、本論文のように弧長を定義する成分を限定する場合には、このような現象の起きる頻度が増えるものと考えられる。

4.2 新しい反復解法

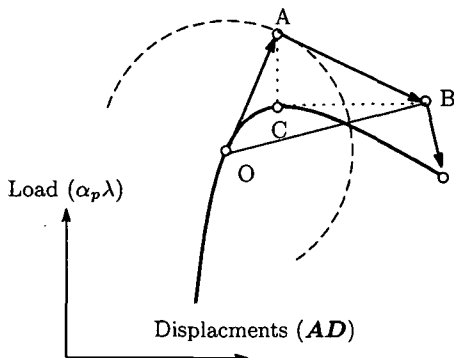
釣り合い曲線上の点を求めるための反復計算での修正量 ΔL は、弧長 ΔS と同様の式で表され、次式のようになる。

$$\Delta L^2 = (\alpha_p \Delta \lambda)^2 + (A \Delta D)^T (A \Delta D) \quad (8)$$

上式中の変位の修正量 ΔD は式(3)のように基準荷重による変位 D_0 と不平衡力による変位 D_1 に分けられる。この式より修正量 ΔL は荷重倍率の修正量 $\Delta\lambda$ の



(a) 球面に沿って収束



(b) 増分ベクトルに直交しながら収束

図-2 球面に沿った反復解法

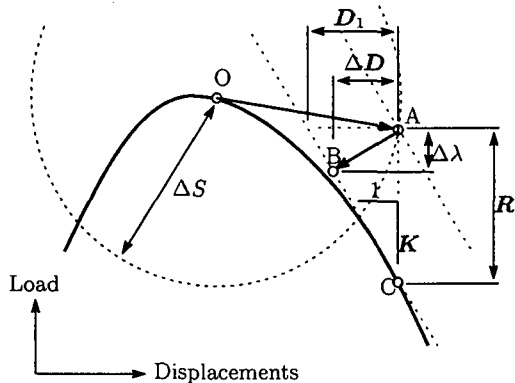


図-3 不平衡残差最小法

関数になっている。そこで、上式から修正量 ΔL が $\Delta \lambda$ に関して最小になるような荷重倍率を求めると、次のようになる。

$$\Delta \lambda = -\frac{D_0^T A^2 D_1}{\alpha_p^2 + D_0^T A^2 D_0} \quad (9)$$

この荷重倍率の修正量 $\Delta \lambda$ と、これを式 (3) に代入して得られる変位ベクトルの修正量 ΔD は、図-3 の点 B に相当している。点 B を初期値として、この手順を繰り返すことにより釣り合い曲線上の解が得られる。

ところで、この点 B は、直前の増分段階での解から式 (7) を用いて得られる点 A を初期値として、点 A での変位と応力状態から求められる接線剛性の勾配を表

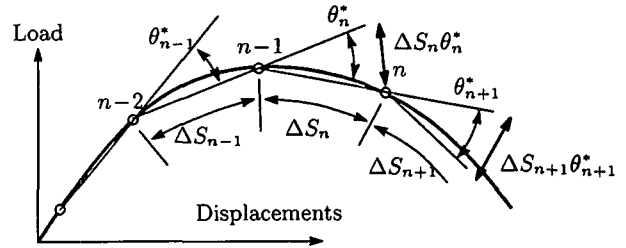


図-4 Szyszkowski らの方法

す平面に垂直に下ろした点に相当している。すなわち、点 A から最も近い¹釣り合い曲線上の点に向かって解を修正することを表している。したがって、従来の解法に比べて、安定的に初期値から釣り合い曲線上の解に収束させられるものと考えられる。この方法を、以下では不平衡残差最小法と呼ぶことにする。

5. 弧長自動設定法

解を確実に求め、しかも効率よく計算を行うためには、釣り合い曲線の曲率の大きな部分では弧長増分を小さくし、曲率の小さな部分では弧長増分を大きくした方がよい。しかし、事前には、釣り合い曲線の正確な形状は不明なために適切な弧長増分を設定するのは難しい。そこで、弧長増分を自動的に設定する手法が幾つか提案されている。

5.1 既往の方法

直前の増分段階での反復回数を元に増分量を設定する方法や、釣り合い曲線の曲率の大きさに基づいて弧長を設定する方法などが提案されている。

Itoh と Nogami⁴⁾は、直前の増分段階での反復回数 N_c と目標反復回数 N_s 、さらにパラメータ α を用いた次のような弧長増分式を提案している。

$$\Delta S_{n+1} = \frac{\alpha + N_c N_s}{\alpha + N_c^2} \Delta S_n \quad (10)$$

Chaisomphob ら⁶⁾は、釣り合い曲線の曲率半径に比例するように弧長増分を決める方法を提案している。

$$\Delta S_{n+1} = \frac{C}{\kappa(s)} \quad (11)$$

ここで、 C はパラメータ、 $\kappa(s)$ は釣り合い曲線の曲率であり、直前に求めた釣り合い曲線上の 3 点での解を用いて表している。

また、Szyszkowski と Husband¹⁴⁾は、釣り合い曲線の曲率が直前に求めた 3 点の範囲で線形変化する仮定と、二つの解を結んだ直線と次の二つの解を結んだ直線の角度 θ_n^* 、 θ_{n+1}^* による次の解位置でのずれ $\Delta S_n \theta_n^*$ と

¹ 正確には、増分量に関して線形化した式 (2) の接線剛性を元にしているので、多少のずれを含んでいる。

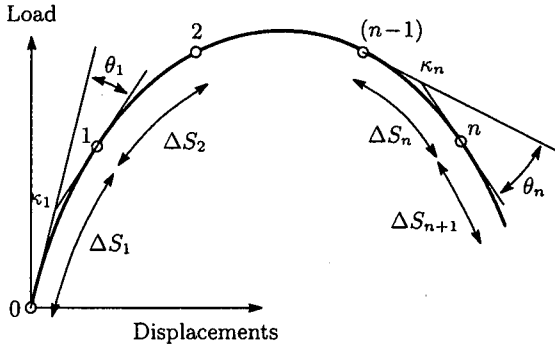


図-5 弧長自動設定法

$\Delta S_{n+1}\theta_{n+1}^*$ が等しい、という条件から弧長増分 ΔS_{n+1} を次のように決めている。

$$\Delta S_{n+1} = \frac{\theta_n^*}{\theta_{n+1}^*} \Delta S_n \quad (12)$$

ここで、

$$\theta_{n+1}^* = 2\theta_n^* - \theta_{n-1}^* \frac{\Delta S_n}{\Delta S_{n-1}}$$

これらの方法をまとめると、Itoh と Nogami⁴⁾の方法では、目標収束回数 N_s と α の他に最初の増分ステップの弧長増分の合計 3 個のパラメータ、Chaisomphob⁶⁾の方法では、最初の 3 増分ステップ分の弧長増分と係数 C の 4 個のパラメータ、Szyszkowski¹⁴⁾の方法では最初の 3 増分ステップ分の弧長増分を設定する必要がある。また、これらの方法では、極端に長い弧長や短い弧長を生成することがあるので、弧長の制限値を入力する必要がある。このように既往の方法は、弧長の自動設定を行うために種々のパラメータを設定する必要がある。

5.2 新しい弧長自動設定法

図-5 の釣り合い曲線上の点 n までの解が得られているものとする。点 $(n-1)$ から点 n までの弧長を ΔS_n 、同様に初期状態の点 0 から点 1 までの弧長を ΔS_1 と表す。また、点 $(n-1)$ の接線と点 n の接線の間の角を θ_n 、同様に点 0 と点 1 の接線の間の角を θ_1 とする。これらより点 0 から点 1 までの曲線の曲率 κ_1 と点 $(n-1)$ から点 n までの曲線の曲率 κ_n は近似的に次のように表せる。

$$\kappa_1 = \frac{\theta_1}{\Delta S_1}, \quad \kappa_n = \frac{\theta_n}{\Delta S_n} \quad (13)$$

この曲率に次の点 $(n+1)$ までの距離 ΔS_{n+1} の 2 乗を乗じたもの $\kappa_n \Delta S_{n+1}^2$ は、点 $(n+1)$ での釣り合い曲線上の点からのずれ (誤差) を表す指標と考えられる。この誤差の指標が、各増分段階で常に同じ大きさになるように弧長を決めると、各増分計算での反復回数の均等化が図られるものと予想される。

そこで、この方法を用いて次の点までの距離を決める

ことにすると、次式が得られる。

$$\Delta S_{n+1} = \Delta S_2 \sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_n}} \quad (14)$$

上式に含まれる κ_1 , ΔS_2 は、初めの二つの平衡点 1 と 2 での解が、明らかになっていれば求められる。したがって、最初の 2 増分ステップ分の弧長増分を与えることで、以降の弧長の生成が行える。また、既往の方法では、直前の数点の解と弧長を基に次の弧長を生成しているために、極端な長さの弧長を生成すると以降の弧長を正常な長さに復帰できない問題があるが、本提案法では最初の 2 増分ステップでの値と弧長を推定する増分ステップの直前の曲率を用いているために、極端な長さの弧長増分を生成することが少なく、また、正常な長さへの復帰が容易と考えられる。

6. 数値計算例

図-6 のような 2 部材骨組の有限変位解析を行い、本論文に示した不平衡残差最小法と既往の反復解法との違いと本手法の有効性を示す。また、図-7 のようなトラスドーム、図-8 のような扁平アーチと図-9 のようなケーブルで圧縮された柱の有限変位解析を行い、本論文に示した弧長自動設定法と既往の方法との比較を行い、本手法の有効性を示す。なお、弧長自動設定法の比較を行う図-7,8,9 の計算では、反復解法として不平衡残差最小法を用いる。また、既往の弧長自動設定法では、生成された弧長の最大値、最小値に制限を設けた使い方をしているが、制限の設定により各弧長自動設定法の性質が直接現れないことが考えられるので、本文での計算例では、制限を設けず得られた弧長をそのまま使った解析を行う。

6.1 2 部材骨組構造での反復解法の比較

図-6 のような両端がヒンジ支持された 2 部材骨組の解析に本論文に示した新しい反復解法である不平衡残差最小法と不平衡変位最小法^{7),10)}を用いた場合の結果を図-10,11 に示す。ここで、構造諸元は図-6 に示した通りである。スケーリングパラメータは、荷重倍率に関するパラメータに $\alpha_p = 0.1$ 、変位成分に関するパラメータには、荷重作用点の並進変位 u, v に $\alpha_u = \alpha_v = 0.05$ を用い、これら以外の変位と回転成分のパラメータはゼロとした。また、弧長増分量は、全ての増分ステップで同じ値とし、 $\Delta S = 0.5$ とした。なお、弧長の定義式 (5) より明らかなように、全てのスケーリングパラメータと弧長を n 倍したものは、同じ状態を表す。したがって、各成分間のスケーリングパラメータは、その比が意味を持つ。図-10,11 中にスケーリングパラメータの比が一定となる直線を破線で示している。

図-10,11 のようにどちらの反復解法を用いても解析が行えている。しかし、既往の不平衡変位最小法では、

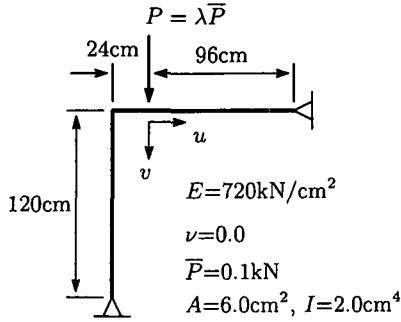


図-6 2部材骨組の諸元

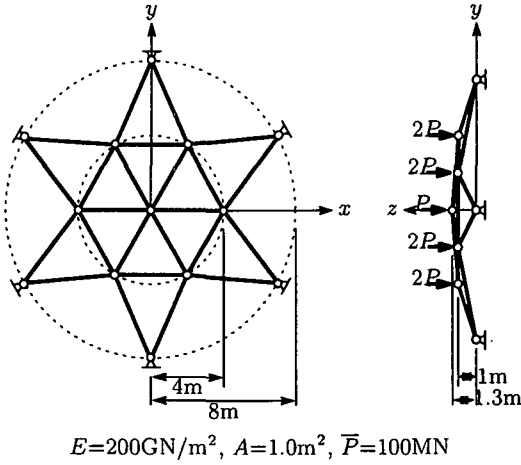


図-7 トラスドーム

変位 u, v 空間で釣り合い曲線が急激に方向を変えている点 A の部分で収束解が接近している。この解法では、荷重成分を含まない変位空間内で反復計算を行っているためである。これに対して、不平衡残差最小法では、荷重成分も含んだ空間内で反復計算を行っているために点 A の付近でも解が密にならず良好な解析が行えている。なお、弧長を半径とする球面上で収束させる方法では、途中で接線と球面が交差せず計算を続行できなかった。また、増分ベクトルに直交しながら収束させる方法では、反復計算の途中で弧長を半径とする球から大きく離脱し解析途中で解が発散した。

この計算例では、荷重倍率と二つの変位成分からなる 3 次元空間内で、弧長増分法を適用したが、変位成分を一つにすると図 10(a) より明らかなように釣り合い曲線が変位成分に関して極値を有する形状をしているので不平衡変位最小法では収束解が得られない。

6.2 トラスドームの有限変位解析

図 7 のようなトラスドームの中心の節点に鉛直荷重 P 、外周の節点に $2P$ が作用したときの有限変位解析により弧長自動設定法の比較を行う。このトラス部材のヤング係数は $E=200\text{GPa}$ 、断面積は $A=1\text{m}^2$ としている。弧長増分法の制御変数には、荷重倍率 λ と荷重作用点の鉛直変位 w を用い、これらのスケールングパ

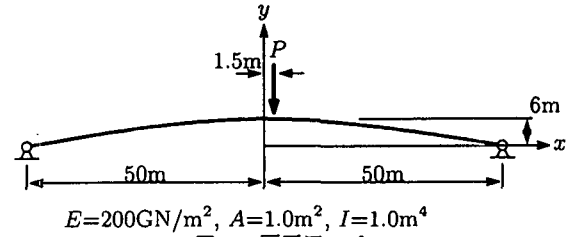


図-8 扁平アーチ

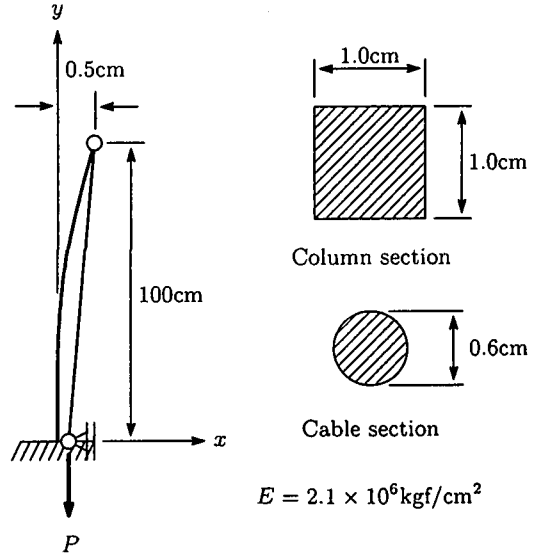
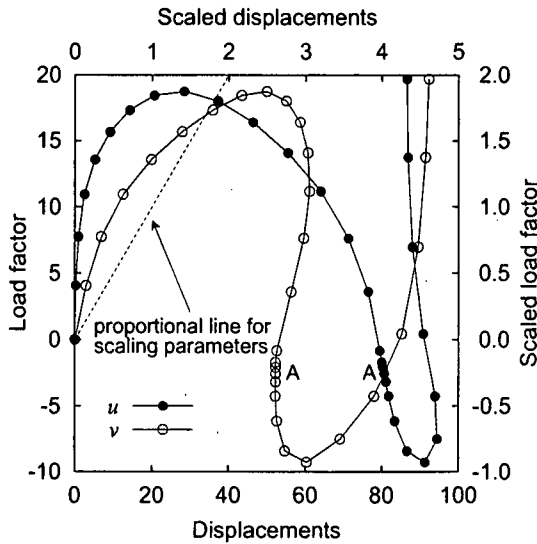


図-9 ケーブルで圧縮された柱

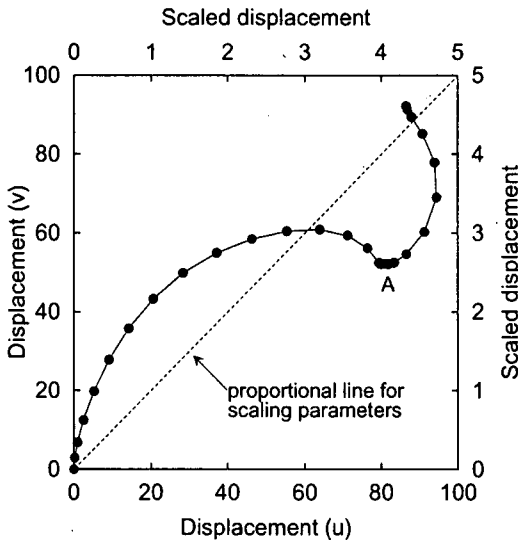
ラメータはそれぞれ $\alpha_p = 0.2$, $\alpha_w = 1.0$ を用いる。また、基準荷重は $\bar{P}=100\text{MN}$ 。収束判定には、収束計算途中の変位の修正量のノルムが各増分段階の最初の変位増分ノルムの 0.001 倍以下としている。

図 12(d) に、本研究で提案する弧長自動設定法により求めた釣り合い曲線を示す。ここでは、最初の 2 ステップ分の弧長として、 $\Delta s = 0.15$ を用いている。図示のように曲率の大きい箇所では弧長が小さくなり、曲率の小さい箇所では大きな弧長になっていることが分かる。図 12(a) は、Itoh らによる弧長自動設定法による結果であり、 $N_s = 3$, $\alpha = 3.0$ 、最初の増分ステップの弧長は $\Delta s = 0.15$ としている。最初の極大点以降は、弧長が小さくなり、曲率の小さな部分でも弧長は小さなままになっている。なお、この計算例は、3 回から 4 回の反復回数で収束解が得られるので、目標反復回数を $N_s = 4$ とすると、弧長の調整が行われず、最初の弧長のままになる。

図 12(b) は、Chaisomphob らによる弧長自動設定法による結果であり、 $C = 0.2$ 、最初の 3 ステップ分の弧長は $\Delta s = 0.15$ としている。曲率の大きな部分では弧長は小さくなり、曲率の小さな部分では大きくなっているが、弧長の変化が提案手法に比べて大きくなる傾向にある。図 12(c) は、Szyszkowski らによる弧長自動設定法による結果である。最初の 3 ステップ分の弧長

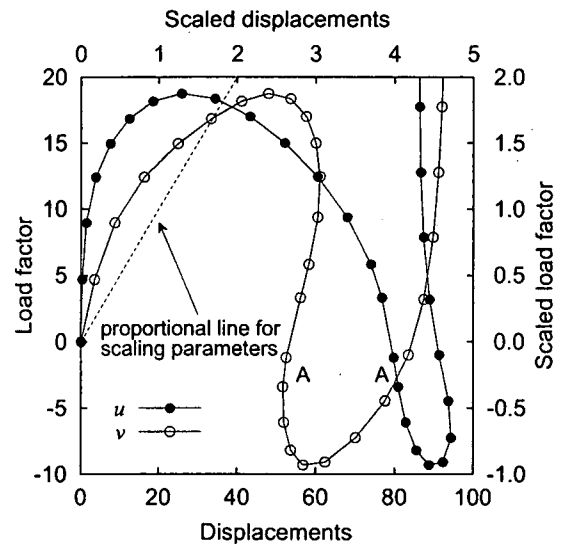


(a) 荷重作用点の変位 u , v と荷重倍率 λ

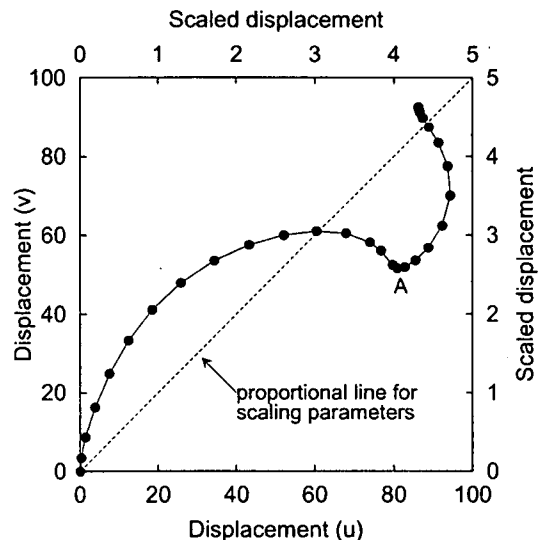


(b) 荷重作用点の変位 u , v

図-10 2部材骨組の不均衡変位最小法^{7),10)}による結果



(a) 荷重作用点の変位 u , v と荷重倍率 λ



(b) 荷重作用点の変位 u , v

図-11 2部材骨組の不均衡残差最小法による結果

は、他の結果と同様に、 $\Delta s = 0.15$ を用いている。図より明らかなように弧長の設定が適切に行われていない。

6.3 扁平アーチの有限変位解析

図-8のような扁平なアーチの頂点から1.5mずれたところに鉛直荷重が作用したときの荷重とアーチ頂点の鉛直変位の関係を求める。このアーチのヤング係数は $E=200\text{GPa}$ 、断面積と断面2次モーメントはそれぞれ $A=1.0\text{m}^2$ 、 $I=1.0\text{m}^4$ である。弧長増分法の制御変数には、荷重倍率 λ と鉛直変位 v を用い、これらのスケーリングパラメータはそれぞれ $\alpha_p = 1.0$ 、 $\alpha_v = 1.0$ を用いる。基準荷重は $\bar{P}=100\text{MN}$ を用いる。収束判定には、収束計算途中の変位の修正量のノルムが各増分段階の最初の変位増分ノルムの0.001倍以下としている。

図13(d)に本研究で提案する弧長自動設定法による結果を示す。これは最初の2ステップの弧長を $\Delta s = 0.3$

としたときの結果である。釣り合い曲線の曲率の大きな部分では小さな弧長になり、曲率の小さな部分では大きな弧長となっていることがわかる。図13(a)にItohらによる結果を示す。最初のステップの弧長は $\Delta s = 0.3$ 、他のパラメータは $N_s = 3$ 、 $\alpha = 3.0$ を用いている。曲率の大きな箇所を通ると弧長が小さくなり、その後、曲率の小さな箇所に来て弧長が大きくなり、曲率の大きな部分を通過するごとに弧長が小さくなるため、途中で計算を打ち切っている。図13(b)はChaisomphobらによる結果であり、最初のステップの弧長は $\Delta s = 0.3$ 、他のパラメータは $C = 0.01$ とした。図より、釣り合い曲線を正しく計算できていないことが分かる。図14(c)は, Szyszkowskiらによる結果で、最初のステップの弧長を $\Delta s = 0.3$ とした。図示の最後の解以降、弧長が大きくなりすぎ、途中で発散した。

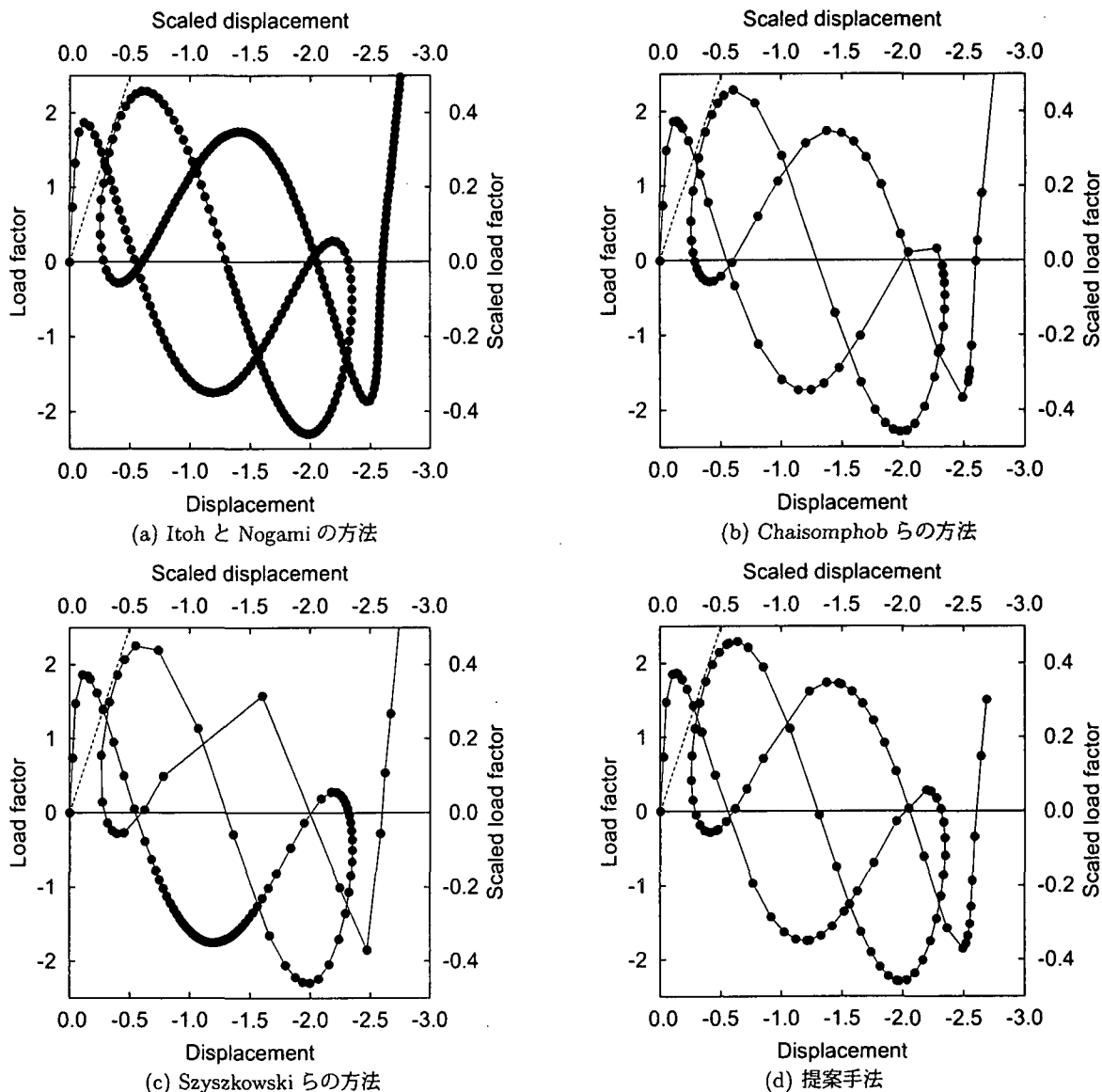


図-12 トラスドームの計算結果

6.4 ケーブルで圧縮された柱

次に、図9のような下端が固定支持された僅かに初期不整のある柱の上端にケーブルが取り付けられ、ケーブルのもう一方の端が、柱の下端と同じ位置にあり、鉛直方向のみ移動可能なローラー支点に取り付けられ、この端部に鉛直荷重が作用した場合の有限変位解析を行う。この柱とケーブルのヤング係数は $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ 、柱の断面は長さ1.0cmの正方形断面、ケーブルは直径0.6cmの円形断面とする。弧長増分法の制御変数には、荷重倍率 λ と柱の上端の水平変位 u を用い、これらのスケールパラメータはそれぞれ、 $\alpha_p = 1.0$ 、 $\alpha_u = 0.0333$ を用いる。基準荷重には、初期不整の無い構造の座屈荷重である $\bar{P} = 172.72 \text{ kgf}$ を用いる。また、収束計算には不平衡残差最小法を用いている。収束判定には、これまでの計算例と同様に、収束計算途中の変位の修正量のノルムが各増分段階の最初の変位

増分ノルムの0.001倍以下としている。

図14(d)に本論文で提案する弧長自動設定法による結果を示す。これは最初の2ステップの弧長を $\Delta s = 0.35$ としたときの結果である。釣り合い曲線が大きく折れ曲がる箇所では弧長が小さくなり他の箇所では大きくなっていることが分かる。図14(a)にIthoらによる手法での結果を示す。最初のステップの弧長は $\Delta s = 0.35$ 、他のパラメータは $N_s = 4$ 、 $\alpha = 3.0$ を用いている。図より、曲率の大きな箇所を通ると弧長が小さくなり、曲率の小さな箇所に来ても弧長が大きくなっていないことが分かる。図14(b)はChaisomphobらによる結果であり、最初のステップの弧長は $\Delta s = 0.35$ 、他のパラメータは $C = 0.08$ とした。図より、釣り合い曲線の向きが大きく変わる $\lambda = 0.5$ 付近で、釣り合い曲線を後戻りし、途中で解が発散した。図14(c)は、Szyszkowskiらによる結果で、最初のステップの弧長を $\Delta s = 0.35$ と

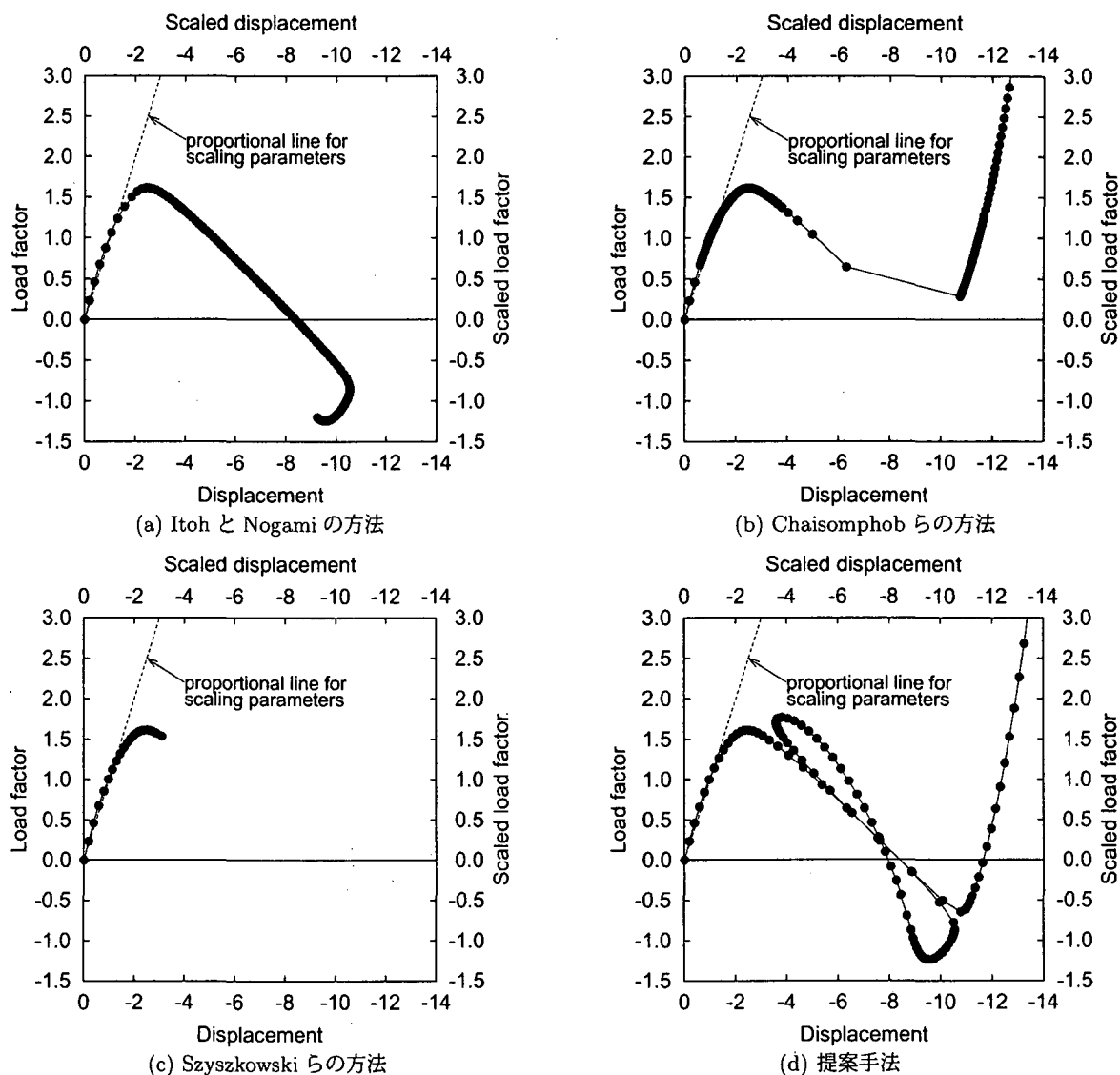


図-13 扁平アーチの計算結果

した。図より、釣り合い曲線は求められているが、曲率の大きな部分と小さな部分で弧長が非常に大きく変化しており、収束値を得るまでの繰り返し回数にばらつきが見られ、弧長の自動設定が有効に機能していない。

7. あとがき

弧長法は、非常に一般性のある解法であり、適切に使用すれば複雑な非線形現象を解析できる。しかし、実際には、種々の不明確な部分があり、試行錯誤等により適切なパラメータを設定できなければ、変位増分法や荷重増分法より収束性の悪い解法になることもある。

本論文は、新しい反復解法と弧長自動設定法を提案し、スケーリングパラメータの設定方法が不明確なため、弧長法を定義する制御変数を限定した使用を前提に、数値計算例により有効性と妥当性を確認した。

本論文での計算例は、釣り合い曲線の分岐経路を扱っ

ていないが、分岐経路上での解の計算には、反復解法はそのまま使用できる。ただし、複数の経路が非常に接近している場合には、意図しない経路に移行する可能性があるため、別途、経路の移行の有無を確認する手続きが必要になる。弧長自動設定法については、分岐点以降の数増分ステップ分の弧長を与える必要があるが、以降の増分ステップの計算は、主経路の場合と同様に行える。

参考文献

- 1) 岩田耕司, 山田嘉昭 : 有限要素法による構造物の非線形安定性解析, 日本機械学会論文集 (第 1 部), Vol.42, No.354, pp.444-452, 1976.
- 2) J.-L. Batoz and G. Dhatt : Incremental displacement algorithms for nonlinear problems, *Int. j. numer. methods engng.*, Vol.14, pp.1262-1267, 1979.
- 3) M. A. Crisfield : A fast incremental/iterative solution procedure that handles "snap-through", *Computers & Structures*, Vol.13, pp.55-62, 1981.
- 4) F. Itoh and K. Nogami : On the tracing calculation of

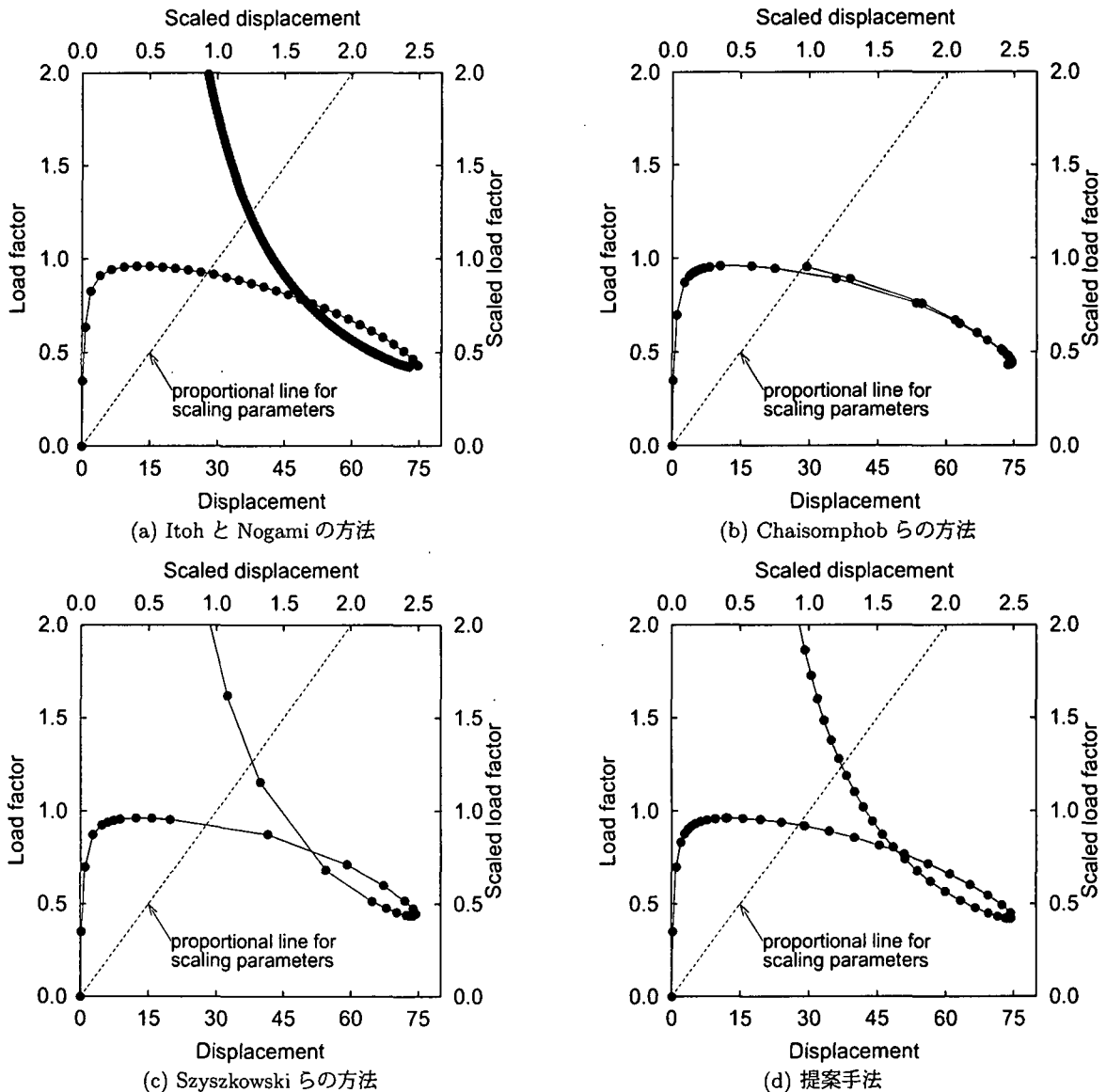


図-14 ケーブルで圧縮された柱の計算結果

- equilibrium path for imperfect systems, *Proc. JSCE, Struct. Eng. / Earthquake Eng.*, Vol.3, No.1, 1986.
- 5) B. W. R. Forde and S. F. Stiemer : Improved arc length orthogonality methods for nonlinear finite element analysis, *Computers & Structures*, Vol.27, No.5, pp.625-630, 1987.
 - 6) T. Chaisomphob, W. Kanok-Nukulchai and F. Nishino : An automatic arc length control algorithm for tracing, equilibrium paths of nonlinear structures, *Proc. JSCE, Struct. Eng. / Earthquake Eng.*, Vol.5, No.1, pp.205-208, 1988.
 - 7) S. L. Chan : Geometric and material non-linear analysis of beam-columns and frames using the minimum residual displacement method, *Int. j. numer. methods engng.*, Vol.26, pp.2657-2669, 1988.
 - 8) M. Fafard and B. Massicotte : Geometrical interpretation of the arc-length method, *Computers & Structures*, Vol.46, No.4, pp.603-615, 1993.
 - 9) E. Carrera : A study on arc-length-type methods and

- their operation failures illustrated by a simple model, *Computers & Structures*, Vol.50, No.2, pp.217-229, 1994.
- 10) 石川智巳, 依田照彦 : 骨組構造物の幾何学的非線形解析における不釣り合い力の補正, *構造工学論文集*, Vol.40A, pp.415-423, 1994.
 - 11) S. Krenk : An orthogonal residual procedure for non-linear finite element equations, *Int. j. numer. methods engng.*, Vol.38, pp.823-839, 1995.
 - 12) S.-R. Kuo and Y.-B. Yang : Tracing postbuckling paths of structures containing multi-loops, *Int. j. numer. methods engng.*, Vol.38, pp.4053-4075, 1995.
 - 13) H.-B. Hellweg and M. A. Crisfield : A new arc-length for handling sharp snap-backs, *Computers & Structures*, Vol.66, No.5, pp.705-709, 1998.
 - 14) W. Szyszkowski and J. B. Husband : Curvature controlled arc-length method, *Computational Mechanics*, Vol.24, pp. 245-247, 1999.

(2002 年 4 月 19 日 受付)