

## 一次元半無限移動境界問題の一解析法

### An analyzing method for the one-dimensional moving boundary problem in semi-infinite region

三上隆\*, 浅井孝徳\*\*, 蟹江俊仁\*\*\*  
Takashi Mikami, Takanori Asai, Shunji Kanie

\*フェロー 工博 北海道大学大学院教授 工学研究科社会基盤工学専攻 (〒060-8628 札幌市北区北13条西8丁目)

\*\*学生会員 北海道大学大学院修士課程 工学研究科社会基盤工学専攻 (同上)

\*\*\*正会員 博士(工) 北海道大学大学院助教授 工学研究科社会基盤工学専攻 (同上)

The phenomena of melting and solidification have many current engineering applications. For example, ground freezing problems are considered as moving boundary problems (MBP) defined in semi-infinite region. This paper presents a simple and effective numerical method for the one-dimensional MBP. By use of coordinate transformation, the semi-infinite region  $(0, \infty)$  is mapped into a finite region lying between  $(0,1)$ . To this end, we consider two mappings (an exponential map and an algebraic map). The collocation method is employed to replace a partial differential equations by a system of ordinary differential equations in time, and the resulting equations are solved by the mid-interval Crank-Nicolson algorithm. Several numerical examples are analyzed in order to show the performance of the proposed methodology.

*Key Words: moving boundary problem, semi-infinite region, numerical method, mapping*

キーワード：移動境界問題，半無限領域，数値解析法，写像

#### 1. はじめに

氷の凍結・融解のように境界の移動を伴う相変化問題は、移動境界問題と呼ばれ古くから研究が行われてきた。今日では土木、機械など工学の分野のみならず、農学、医学などその応用は多方面に渡っている。移動境界問題は、その特性から非線形問題であり、2, 3の解析的な解<sup>1,2)</sup>を除いて多くの近似解析手法が報告されている。例えば差分法<sup>3)</sup>、境界要素法<sup>4,5)</sup>および有限要素法<sup>6~8)</sup>などである。

解析領域が一次元半無限領域で定義される問題も工学の分野ではよく現れる。例えば、寒冷地における道路、トンネルなどの凍結深さを推定する問題などがある。この場合、Stefan 解を応用した凍結深さと積算寒度の関係式<sup>9)</sup>が一般によく用いられるが、外気温の周期的変動による凍結深さの進退は追跡できない。

半無限問題の離散化手法についても幾つか考えられる。解析領域を有限な小領域に分割する一般的な有限要素法による場合は、所要の精度で解を得るためには多くの要素分割を施す必要がある。この欠点を解消するためには無限領域の扱いが容易である境界要素法と有限要素法を結合する方法、また無限要素と呼ばれる特殊要素を用いる有限要素法などがある。

本研究は一次元熱伝導型方程式で記述される半無限移動境界問題の一解析手法を扱ったものである。具体的には写像変換により半無限領域を有限領域に変換し、空間領域には選点法および時間領域には時間積分法を適用して支配微分方程式を離散化するものである。数値計算例では、氷の生成および氷の融解問題を取り上げ、提案する手法の妥当性や適用可能性の検討を行う。

#### 2. 写像の特性

半無限領域  $(0 \leq x < \infty)$  を有限領域  $(0 \leq \xi \leq 1)$  に写像する方法として、Grosch ら<sup>10)</sup>が用いた以下に示す2種類の写像を用いる。

$$\text{指数写像: } \xi = 1 - e^{-x/L} \quad (1)$$

$$\text{代数写像: } \xi = x/(L+x) \quad (2)$$

ここで、 $L$  は  $\xi = 1$  への収束の度合いを表す尺度であり、その様子を図-1(a)および図-1(b)に示す。この図から  $L$  の値が小さい程  $\xi = 1$  への収束は早く、反対に大きいほど収束の度合いは遅くなる。

#### 3. 解析モデルおよび基礎方程式

ここでは氷の生成問題を例にとり記述することにする。

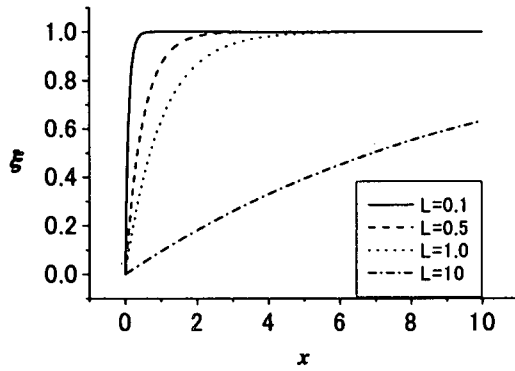


図-1(a) 種々のLに対するxとξの関係  
(指数写像)

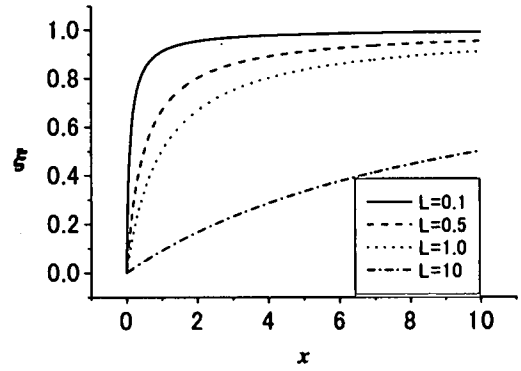


図-1(b) 種々のLに対するxとξの関係  
(代数写像)

図-2は解析モデルで、1層目は氷の領域、2層目は水の領域であり、 $h(t)$ は水の厚さ(界面位置)を、 $x_1$ と $x_2$ はそれぞれの領域で定義される位置に関する独立変数である。なお、添字1および2は、それぞれ氷の領域および水の領域の諸量を表すものとする。各領域の基礎方程式などは以下となる。

氷の領域(1層目)；

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} \quad (0 \leq x \leq h(t)) \quad (3)$$

水の領域(2層目)；

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^2} \quad (h(t) \leq x < \infty) \quad (4)$$

ここで、 $\theta$ は温度、 $a$ は温度伝導率、 $t$ は時間を表す。

界面位置における結合条件は次式となる。

$$\theta_1(h(t), t) = \theta_2(h(t), t) = T_m \quad (5)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial \theta_1(h(t), t)}{\partial x} - \lambda_2 \frac{\partial \theta_2(h(t), t)}{\partial x} = \rho_1 L \frac{dh}{dt} \quad (6)$$

ここで、 $T_m$ は氷点、 $\lambda$ は熱伝導率、 $\rho_1$ は氷の密度、 $L$ は凝固の潜熱である。

境界条件は、以下ようになる。

$$x=0 \text{ で } \theta_1 = T_1 \quad (7)$$

$$x=\infty \text{ で } \theta_2 = T_2 \quad (8)$$

ここで、 $T_1$ は氷の表面温度、 $T_2$ は水の底面温度である。

また各層の初期条件は以下で表される。

$$\theta_1(x, 0) = \varphi_1(x) \quad (0 \leq x \leq h(t)) \quad (9.a)$$

$$\theta_2(x, 0) = \varphi_2(x) \quad (h(t) \leq x < \infty) \quad (9.b)$$

ここで $\varphi_1(x)$ と $\varphi_2(x)$ は与えられた関数である。

## 4. 離散化

### 4.1 写像後の基礎方程式

氷の領域に対しては独立変数 $\eta = x/h(t)$ 、および水の領域に対しては式(1)または式(2)において、 $x$ を $x-h(t)$ に置き換えた写像を用いれば、前述の基礎方程式は以下の形になる。

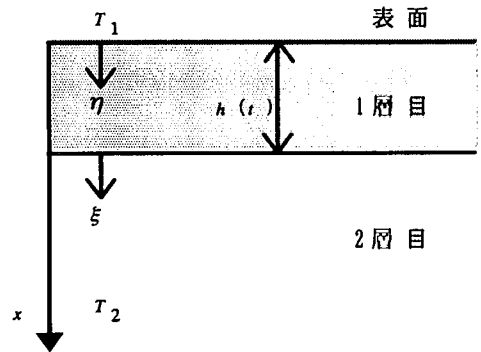


図-2 解析モデル

氷の領域(1層目)；

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = \frac{a_1}{h(t)^2} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \eta^2} + \frac{\dot{h}(t)}{h(t)} \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta} \quad (10)$$

水の領域(2層目)；

指数写像による場合；

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial t} = \frac{a_2}{L^2} (1-\xi)^2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \xi^2} + \frac{1-\xi}{L} \left( \dot{h}(t) - \frac{a_2}{L} \right) \frac{\partial \theta_2}{\partial \xi} \quad (11)$$

代数写像による場合；

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial t} = \frac{a_2}{L^2} (1-\xi)^2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \xi^2} + \frac{(1-\xi)^2}{L} \left( \dot{h}(t) - 2(1-\xi) \frac{a_2}{L} \right) \frac{\partial \theta_2}{\partial \xi} \quad (12)$$

なお、式(10)～式(12)で、 $\dot{h}(t) = dh/dt$ である。

### 4.2 選点法による空間領域の離散化

選点法による空間領域の離散化過程は文献<sup>11)</sup>に従うので、ここでは、後の展開に必要なことのみを示す。

(1)内部選点と端点；各領域において、 $M$ 次のshifted Legendre多項式の零点を内部選点に採用し、例えば氷の領域に対しては $0 = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_M < \xi_{M+1} = 1$ の $M+2$ 個の点を配置する。 $\xi_1$ から $\xi_M$ までは内部選点であり、 $\xi_0 = 0$ と $\xi_{M+1} = 1$ は境界条件が指定される点や界面に配置されるもので、端点と呼ぶことにする。なお、選点は端点に近い程、密に配置されるが、これは等間隔な標本点分布による関数の補間近似に現れる欠点(Rungeの現

象)の解消のために用いられる配置と類似なものである。  
 (2) 行列[A]と[B]; 各領域において、時刻*t*での独立変数に関する1, 2階導関数は、時刻*t*での内部選点と端点における関数値(温度の値)に結びつける(M+2)×(M+2)次の行列[A], [B]を用いて次のように表される。

$$\{\theta_k\} = [A]\{\theta_k\} \quad (13. a)$$

$$\{\theta_k\} = [B]\{\theta_k\} \quad (13. b)$$

ここに、*k*=1,2であり、(M+2)×1次のベクトル、例えば $\{\theta_k\}$ は次のようなものである。

$$\{\theta_k\}^T = \{\theta_k(\xi_0), \theta_k(\xi_1), \dots, \theta_k(\xi_{M+1})\} \quad (14)$$

(3)  $\{\theta_k\}_c$ と $\{\theta_k\}_e$ ; 上式は内部選点と端点に関する成分より構成されている。以下ではこれらを分離し、内部選点に関するものには添字*c*を、端点のそれには添字*e*を付して表す。

$$\{\theta_k\}_c^T = \{\theta_k(\xi_1), \theta_k(\xi_2), \dots, \theta_k(\xi_M)\} \quad (15)$$

$$\{\theta_k\}_e^T = \{\theta_k(\xi_0), \theta_k(\xi_{M+1})\} \quad (16)$$

M+1次の多項式で表される近似解が、内部選点でのみ基礎方程式(10)および式(11)あるいは式(12)を満たすための条件(残差条件)は、次式で与えられる。

$$\left\{ \frac{\partial \theta}{\partial t} \right\}_c = [\alpha_1]\{\theta\}_c + [\alpha_2]\{\theta\}_e \quad (17)$$

ここで、2M×1次の各ベクトルの内容を式(15)、(16)の表し方に従って示すと次式となる。

$$\left\{ \frac{\partial \theta}{\partial t} \right\}_c^T = \left( \left\{ \frac{\partial \theta_1}{\partial t} \right\}_c^T, \left\{ \frac{\partial \theta_2}{\partial t} \right\}_c^T \right) \quad (18. a)$$

$$\{\theta\}_c^T = (\{\theta_1\}_c^T, \{\theta_2\}_c^T) \quad (18. b)$$

$$\{\theta\}_e^T = (\{\theta_1\}_e^T, \{\theta_2\}_e^T) \quad (18. c)$$

さらに、 $[\alpha_1]$ と $[\alpha_2]$ は、基礎方程式(10)および式(11)あるいは式(12)の係数および独立変数の微分階数に応じた式(13. a)および式(13. b)の行列[A]と[B]の成分で構成され、それぞれ、2M×2Mと2M×4次の行列である。

境界条件式(7)、(8)および結合条件式(5)は、式(17)と同様に以下のように表される。

$$[\beta_1]\{\theta\}_c + [\beta_2]\{\theta\}_e = \{f\} \quad (19)$$

ここに、 $[\beta_1]$ は4×2M次、 $[\beta_2]$ は4×4次の行列であり、 $\{f\}$ は*T*<sub>1</sub>、*T*<sub>2</sub>および*T*<sub>m</sub>を成分とする4×1次のベクトルである。

式(17)の左辺は内部選点に関する偏微分である。したがって式(19)を $\{\theta\}_c$ について解き、式(17)に代入すれば、内部選点における温度のみを未知量とする、時間に関する常微分方程式が得られる。

$$\left\{ \frac{\partial \theta}{\partial t} \right\}_c = [\alpha]\{\theta\}_c + \{g\} \quad (20)$$

ここに、2M×2M次の行列 $[\alpha]$ および2M×1次のベクトル $\{g\}$ は次式で表される。

$$[\alpha] = [\alpha_1] - [\alpha_2][\beta_2]^{-1}[\beta_1] \quad (21. a)$$

$$\{g\} = [\alpha_2][\beta_2]^{-1}\{f\} \quad (21. b)$$

### 4.3 時間領域の離散化

式(20)の時間領域の離散化にはクランク・ニコルソン法を用いる。式(20)に現れる温度の1次微分を時間ステップ*n*と*n*+1の中点で近似すれば、以下となる。

$$\left\{ \frac{\partial \theta}{\partial t} \right\}_c = \frac{\{\theta\}_c^{n+1} - \{\theta\}_c^n}{\Delta t} \quad (22)$$

ここで、 $\Delta t$ は時間刻み幅である。

同様に式(20)に現れる $\{\theta\}$ 、 $[\alpha]$ および $\{g\}$ を評価するものとすれば式(20)は次式で表される。

$$\begin{aligned} & \left[ 2 \frac{[I]}{\Delta t} - \frac{[\alpha]^{n+1} + [\alpha]^n}{2} \right] \{\theta\}_c^{n+1} \\ & = \left[ 2 \frac{[I]}{\Delta t} + \frac{[\alpha]^{n+1} + [\alpha]^n}{2} \right] \{\theta\}_c^n + \{g\}^{n+1} + \{g\}^n \end{aligned} \quad (23)$$

ここで、 $[I]$ は2M×2M次の単位行列である。

式(23)は*n*ステップでの $\{\theta\}_c^n$ 、 $[\alpha]^n$ 、 $\{g\}^n$ および*n*+1ステップでの $[\alpha]^{n+1}$ 、 $\{g\}^{n+1}$ が既知であれば、*n*+1ステップでの $\{\theta\}_c^{n+1}$ を求めることができる。しかし、*n*+1ステップでの $[\alpha]^{n+1}$ 、 $\{g\}^{n+1}$ が未知なので*n*+1ステップでの界面の位置*h*(*t*)を推定し、 $[\alpha]^{n+1}$ 、 $\{g\}^{n+1}$ を求める必要がある。

そこで、*n*+1ステップでの*h*(*t*)を決定するために、陽な差分法を用いて界面位置の結合条件式(6)を次式で表す。

$$\rho_1 L \frac{h^{n+1} - h^n}{\Delta t} = \frac{\lambda_1}{h(t)} \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1} - \frac{\lambda_2}{L} \frac{\partial \theta_2}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} \quad (24)$$

上式を式(13. a)を用いて整理すると以下となる。

$$\begin{aligned} h^{n+1} = h^n + \frac{\Delta t}{\rho_1 L} & \left\{ \frac{\lambda_1}{h(t)} \sum_{i=1}^{M+2} A(M+2, i) \theta_1^n(\xi_{i-1}) \right. \\ & \left. - \frac{\lambda_2}{L} \sum_{i=1}^{M+2} A(1, i) \theta_2^n(\xi_{i-1}) \right\} \end{aligned} \quad (25)$$

ここで、*A*(*s*, *t*)は式(13. a)に記した行列[A]の*s*行*t*列の成分である。

式(25)の右辺第2項目を*D*<sup>n</sup>と表記し時間積分法にクランク・ニコルソン法を用いていることに留意すれば、式(25)は次式となる。

$$h^{n+1} = h^n + (D^n + D^{n+1})/2 \quad (26)$$

なお、式(26)を用いて界面を近似するには、 $n+1$  ステップでの  $D$  が未知なので繰り返し計算が必要になる。すなわち、添字  $r$  を各時間ステップにおける繰り返し計算回数とすれば、式(26)は次の形に表される。

$$h^{n+1,r} = h^n + (D^n + D^{n+1,r})/2 \quad (27)$$

本研究では  $D^{n+1,0} = D^n$  とし解を求めている。

## 5. 数値計算例

ここでは3種類の問題、(1)相変化の伴わない準定常熱伝導問題、(2)相変化の伴う氷の生成問題および(3)相変化の伴う氷の融解問題を扱い本手法の妥当性、適用可能性について検討を行う。なお、空間の離散化に用いた選点数  $M$  は著者らのこれまでの研究成果<sup>11)</sup>に基づき  $M=11$  とした。

### (1) 相変化の伴わない準定常熱伝導問題

解析は、水面( $x=0$ )で温度が次式のように周期的に変動する場合について行う。

$$\theta = \theta_0 \cos(2\pi/T) \quad (28)$$

ここで、 $\theta_0$  は表面における温度変動の振幅、 $T$  は変動の周期であり、それぞれ  $\theta_0 = 1$  [°C]、 $T = 365 \times 24$  [hr] とする。また温度伝導率は  $a = 4.73 \times 10^{-4}$  [m<sup>2</sup>/hr] とした。なお、本手法の解との比較に用いた厳密解は次式となる。

$$\theta = \theta_0 \exp(-x\sqrt{\pi/(aT)}) \cos(2\pi/T - x\sqrt{\pi/(aT)}) \quad (29)$$

図-3(a)および図-3(b)は、図-1に示した  $\xi = 1$  への収束の度合いを表す尺度  $L$  を  $L=1, 10$  とし、時間刻み幅  $\Delta t = 24$  [hr] を用いた場合のそれぞれ指数写像および代数写像による任意の位置  $x$  の温度履歴である。○、△および□印は本解析法の結果を、無印の実線は厳密解のそれである。図より本解析結果は、 $L$  が大きい場合には写像関数によらず、ほぼ妥当な解を得られていることがわかる。

### (2) 相変化を伴う氷の生成問題

ここでは図-2で、1層目が氷、2層目が氷の場合を扱う。式(3)～式(8)に現れる定数は以下のものである。

$$\begin{aligned} a_1 &= 4.53 \times 10^{-3} [\text{m}^2/\text{hr}], & a_2 &= 4.73 \times 10^{-4} [\text{m}^2/\text{hr}] \\ \lambda_1 &= 1.91 [\text{kcal}/(\text{m} \cdot \text{hr} \cdot ^\circ\text{C})], & \lambda_2 &= 0.48 [\text{kcal}/(\text{m} \cdot \text{hr} \cdot ^\circ\text{C})] \\ \rho_1 &= \rho_2 = 1000 [\text{kg}/\text{m}^3], & L &= 80.8 [\text{kcal}/\text{kg}] \\ T_1 &= -20 [^\circ\text{C}], & T_2 &= 10 [^\circ\text{C}], & T_m &= 0 [^\circ\text{C}] \end{aligned}$$

図-4(a)および図-4(b)は  $L=1$  とし、時間刻み幅  $\Delta t$  の解に与える影響を見たものである。結果は写像方法の相違によらず厳密解と良好な一致を示している。以下の計算では  $\Delta t = 24$  [hr] を用いる。なお、収束の判定は  $|(h^r - h^{r-1})/h^{r-1}| \leq 10^{-3}$  とし、繰り返し回数  $r$  は2~3回であった。なお、厳密解は付録Aを参照されたい。

図-5(a)および図-5(b)は、種々の  $L$  の解  $h(t)$  に与える影響を見たものである。図より明らかなように指数写

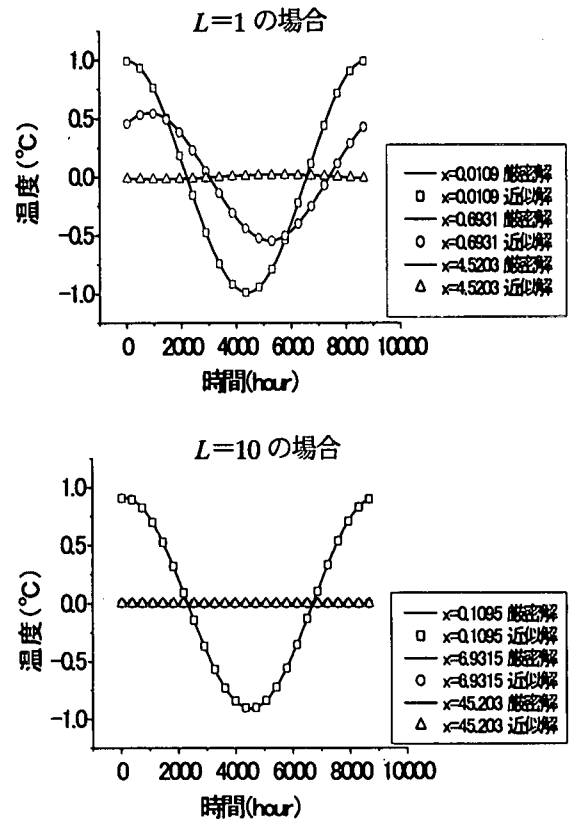


図-3(a)  $L$  の解に与える影響(指数写像)

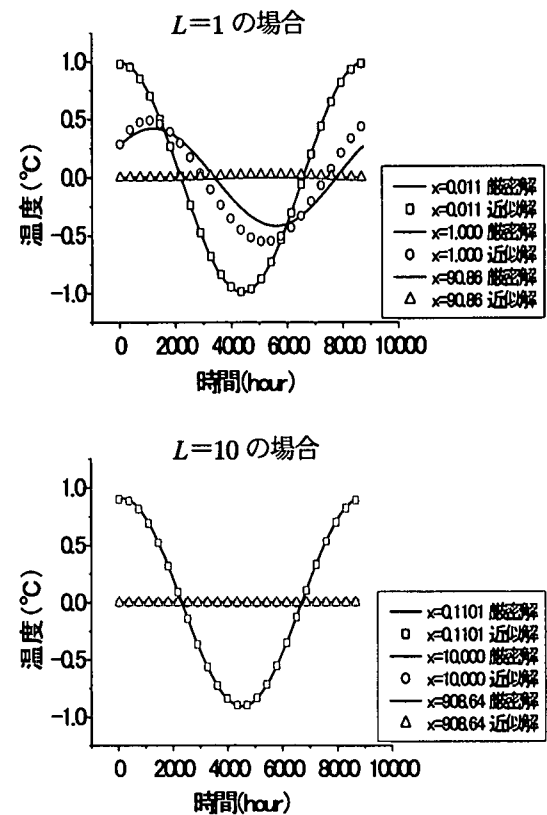


図-3(b)  $L$  の解に与える影響(代数写像)

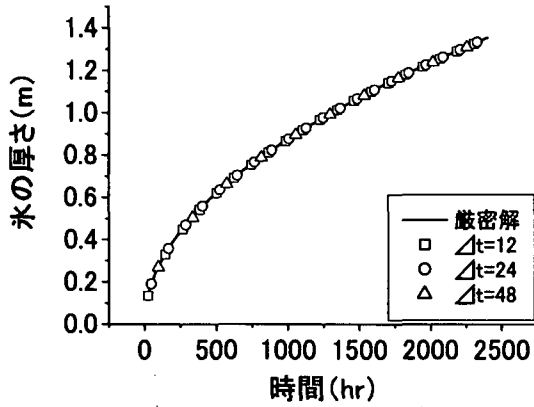


図-4(a)  $\Delta t$ の解に与える影響(指数写像)

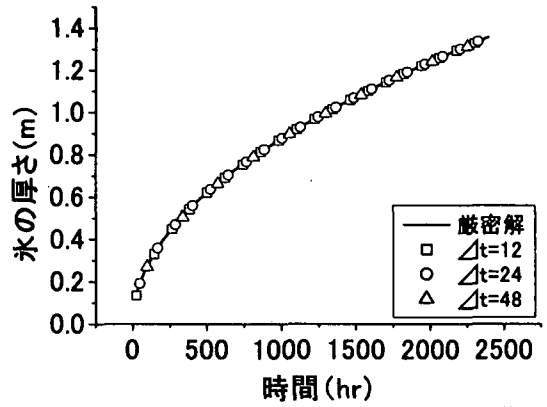


図-4(b)  $\Delta t$ の解に与える影響(代数写像)

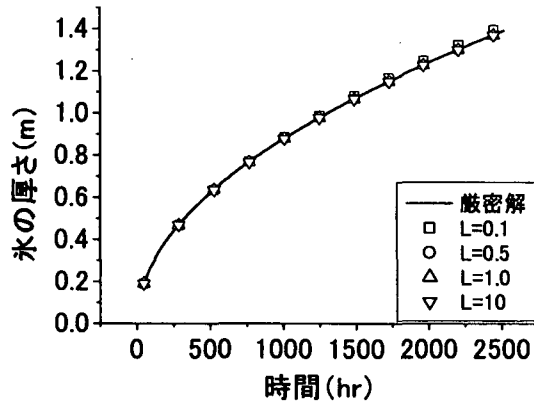


図-5(a)  $L$ の解に与える影響(指数写像)

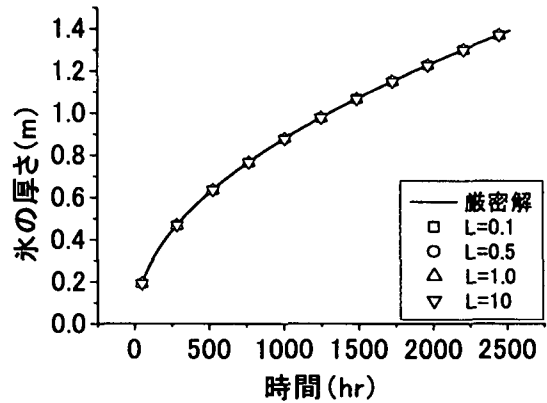


図-5(b)  $L$ の解に与える影響(代数写像)

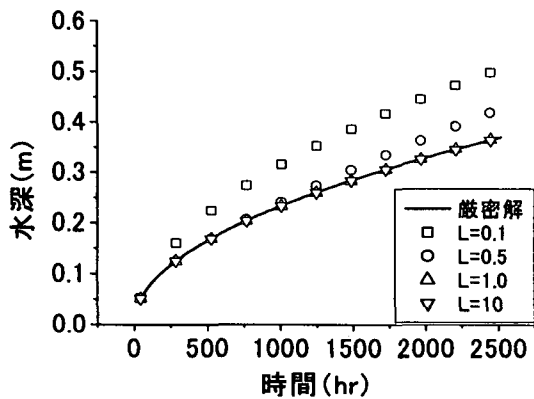


図-6(a)  $L$ の解に与える影響(指数写像)

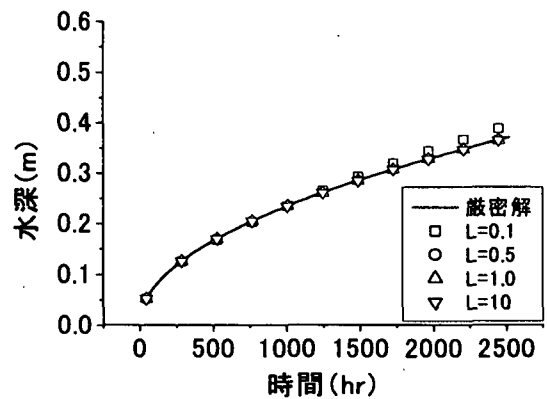


図-6(b)  $L$ の解に与える影響(代数写像)

像, 代数写像とも良好な結果を与えている. なお, 図では数値的比較が半然としないので表-1(a)と表-1(b)に厳密解との比較で示す.

### (3) 相変化の伴う水の融解問題

ここでは図-2で, 1層目が水, 2層目が氷の場合を取り扱ったものである. これは4. 離散化で記述した内容において, 1層目を温度 $\theta_2$ , 2層目を温度 $\theta_1$ として扱えばよい. なお, 境界条件は水の表面で $20[^\circ\text{C}]$ , 氷の底面で $-10[^\circ\text{C}]$ とし, 他の熱定数等は(2)相変化を伴う水の生成問題と同じである.

図-6に図-5と同様な目的の結果を示す. これによ

ば, 指数写像を用いた $L$ の小さい場合に厳密解との差が大きく, 一方代数写像による場合 $L$ によらず良好な解が得られていることがわかる(付録B).

## 6. まとめ

本研究では一次元半無限移動境界問題の近似解析手法とし, 写像変換により半無限領域を有限領域に変換し, 空間領域には選点法および時間領域には時間積分法を適用して支配微分方程式を離散化する手法を提案し, その妥当性の検討を行なったものである. なお著者らは, 既

表 - 1(a) 数値的比較(指数写像)

表 - 1(b) 数値的比較(代数写像)

時間 [hour]	厳密解	L=0.1	L=1	L=10
24	0.136	0.136	0.136	0.136
600	0.678	0.679	0.676	0.677
1200	0.958	0.968	0.957	0.957
1800	1.174	1.191	1.172	1.172
2400	1.355	1.380	1.354	1.354
3000	1.515	1.546	1.514	1.514
3600	1.660	1.696	1.659	1.659
4200	1.793	1.834	1.792	1.792
4800	1.917	1.962	1.916	1.916

時間 [hour]	厳密解	L=0.1	L=1	L=10
24	0.136	0.136	0.136	0.136
600	0.678	0.676	0.676	0.676
1200	0.958	0.957	0.957	0.957
1800	1.174	1.173	1.172	1.172
2400	1.355	1.354	1.354	1.354
3000	1.515	1.514	1.514	1.514
3600	1.660	1.658	1.659	1.659
4200	1.793	1.790	1.792	1.792
4800	1.917	1.913	1.916	1.916

設トンネルの変状対策として、トンネル内空側に断熱材を施工するときの厚さ算定式を提案<sup>12)</sup>しているが、ここでは地山の凍結深さの検討はされていない。今後は本手法を地山の凍結深さの推定に適用し、より合理的な変状対策に結びつけていく考えである。

### 参考文献

- 1) Budhia, H. and Kreith, F.: Heat transfer with melting or freezing in a wedge, *Int. j. heat mass transfer*, Vol.16, pp. 195-211, 1973.
- 2) Tao, L.: The Stefan problem with an imperfect thermal contact at the interface, *J. Appl. Mech. ASME*, Vol.49, pp.715-720, 1982.
- 3) Bell, G and Wood, A.: On the performance of the enthalpy method in the region of a singularity, *Int. j. numer. methods eng.*, Vol.19, pp.1583-1592, 1983.
- 4) O'Neill, K.: Boundary integral equation solution of moving boundary phase change problem, *Int. j. numer. methods eng.*, Vol.19, pp.1825-1850, 1983.
- 5) Zabarar, N. and Mukherjee, S.: An analysis of solidification problems by the boundary element method, *Int. j. numer. methods eng.*, Vol.24, pp.1879-1900, 1987.
- 6) Salcudean, M. and Abdullah, Z.: On the numerical modeling of heat transfer during solidification, *Int. j. numer. methods eng.*, Vol.25, pp.445-473, 1988.
- 7) Voller, V., Swaminathan, C. and Thomas, B.: Fixed grid techniques for phase change problems: a review, *Int. j. numer. methods eng.*, Vol.30, pp.875-898, 1990.
- 8) Dalhuijsen, A. and Segal, A.: Comparison of finite element techniques for solidification problems, *Int. j. numer. methods eng.*, Vol. 23, pp. 1807-1829, 1986.
- 9) 木下誠一：凍土の物理学，森北出版，1982.
- 10) Grosh, C. E. and Orszag, S. A.: Numerical solution of problems in unbounded regions, *J. of comput. physics*, Vol.25,

pp.273-296, 1977.

11) 三上隆：空間領域に選点法を用いた回転殻の静的および動的問題の解析，土木学会論文報告集，第341号，pp.69-78, 1984.

12) 三上隆，岡田正之，芳村仁：既設トンネルの外部断熱材の厚さの算定について，構造工学論文集，Vol.42A, pp.43-48, 1996.

### 付録 A

相変化を伴う氷の生成問題の厳密解は以下である。

$$\frac{e^{-p^2}}{\operatorname{erf}(p)} - \left( \frac{T_2 - T_m}{T_m - T_1} \right) \frac{\lambda_2 \sqrt{a_1/a_2}}{\lambda_1} \frac{e^{-p^2 a_1/a_2}}{1 - \operatorname{erf}(p \sqrt{a_1/a_2})} = \frac{\sqrt{\pi} L a_1}{(T_m - T_1) \lambda_1 \rho_1} p \quad (\text{A-1})$$

ここで、 $\operatorname{erf}$  は誤差関数であり、 $p$  は次式で与えられる。

$$p = \frac{h}{2\sqrt{a_1 t}} \quad (\text{A-2})$$

$h(t)$  は超越方程式(A-1)を満たす  $p$  を求めれば、(A-2)より求められる。

### 付録 B

例えば、式(29)の指数部分のみを  $f(x)=\exp(-x)$  と略記し検討を加える。式(1)、式(2)の写像を用いると  $f(x)$  は以下となる。

$$\text{指数写像: } f_1(\xi) = (1-\xi)^L \quad (\text{B-1})$$

$$\text{代数写像: } f_2(\xi) = \exp\{-L\xi/(1-\xi)\} \quad (\text{B-2})$$

ここで  $\xi=1(x \rightarrow \infty)$  での関数および1次微分の値は、 $L \leq 1$  のときの  $f_1(1)/d\xi \rightarrow \infty$  を除き零となる。

(2002年4月19日受付)