

## 膜構造に対する ALE 有限要素法

An Arbitrary Lagrangian Eulerian Finite Element Method for Elastic Membrane

山田貴博

Takahiro YAMADA

正会員 学博 横浜国立大学 大学院環境情報研究院 (〒 240-8501 横浜市保土ヶ谷区常盤台 79-7)

Large deformation analyses of membranes often encounter instability, since membranes lack bending rigidity. The shape designs of such structures with consideration of geometrical non-linearity are also difficult tasks. In this work, an arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) finite element method, which enables us to deform the initial shape during calculations, is applied to elastic membrane for the purpose of overcoming such difficulties. By this procedure, the deformed shape of the membrane with a loose initial shape, which is difficult to treat from lack of tensile stress, can be derived from the solution corresponding to tighten initial shape.

**Key Words:** arbitrary Lagrangian-Eulerian, membrane, large deformation analysis, instability

## 1. 序

曲げ剛性のない膜構造は、内部に生じた張力による幾何剛性によって形状を保持する構造であり、非常に不安定である。たとえば、弛みのある初期形状から出発し、荷重を漸増することで得られる連続な釣合経路を考えた場合には、その経路上には多数の分岐点が存在することとなる。したがって、このような大変形解析では分岐解析を併用するか、分岐点を通過するための工夫が必要となる。

一方、膜構造では補強のためケーブルが膜面に張られることが多いが、補強ケーブルと膜は固定されておらず変形とともにケーブルは膜面上を移動することとなる。このとき、ケーブルに沿って膜の勾配は不連続となることから、通常の Lagrange 型変形記述に基づく有限要素解析法でこのような問題を取り扱うためには、特殊な要素<sup>1)</sup>などを導入する必要がある。また、このような問題に対応する手法として、未知関数を変形後形状のみに設定するのではなく、変形後の位置を固定し、初期形状の物質位置を未知とすることが可能な ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) 型変形記述を導入した解析手法も提案されている<sup>2),3)</sup>。

これに対して本研究は、筆者等の提案する ALE 有限要素法<sup>4)</sup>を膜構造の大変形解析に適用することにより、ケーブルと膜の滑りを考慮するための手法としてのみならず、不安定な膜構造の問題を分岐解析等を用いることなく取り扱う新しい大変形解析手法として提案するものである。筆者等の提案する ALE 有限要素法では、Total Lagrange 型変形記述を拡張し、初期形状は可変としている。その結果、ひとつの釣り合い経路を追跡するのではなく、初期形状の変更により移動可能な釣り合い経路上の解を順次求めることで、最終的に所定の初期形状に対応する変形後形状を分岐点を回

避しながら決定することが可能となる。本研究は、膜に対するこのような ALE 型変形記述に基づく定式化と有限要素解析手法を提案するものである。

## 2. ALE 型変形記述による大変形解析

本研究では、Total Lagrange 型変形記述により問題が記述される履歴不依存な超弾性体の境界値問題を考える。Total Lagrange 型変形記述においては、初期形状から変形後形状への写像である変形写像  $\varphi$  によって変形は定義され、超弾性体の境界値問題は、この変形写像  $\varphi$  を未知関数とする問題として定式化される。したがって、大変形問題においては、変形写像  $\varphi$  を釣り合い経路上において順次求めることとなる。

このような非線形問題に対して、超弾性体に対する Total Lagrange 型変形記述を基本とした ALE 型変形記述<sup>4)5)</sup>を適用する。ALE 型変形記述においては、初期形状と変形後形状の両方に独立な仮想的な参照形状を導入し、参照形状から初期形状への写像  $\phi_0$  と参照形状から変形後形状への写像  $\phi$  を考える。この時、変形写像  $\varphi$  は次の合成写像として表わされる。(図-1 参照)

$$\varphi = \phi \circ \phi_0^{-1} \quad (1)$$

したがって、変形写像  $\varphi$  を求める問題は、釣り合い経路上の像  $\phi_0$  と  $\phi$  の組を求める問題に書き換えられる。そこで、適当な制約条件<sup>4)</sup>の下で境界条件に対応する  $\phi_0$  と  $\phi$  を求めることで、1つの釣り合い経路上の初期形状に対応する変形後形状を求めることができる。特に、 $\phi_0$  を固定し、 $\phi$  を未知数とする場合は、初期形状を  $\phi_0^{-1}$  によって座標変換した参照形状によって記述を行う Lagrange 型変形記述に対応し、 $\phi$  を固定し、 $\phi_0$  を未知数とする場合は、変形後形状において注目する物質点の初期形状における位置を求める一種の Euler 型

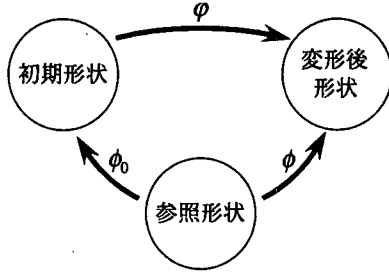


図-1 ALE 変形記述

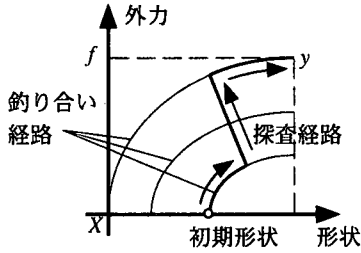


図-2 ALE に基づく大変形解析

変形記述を意味している。

また、大変形解析の途中で  $\phi_0$  を変化させる、すなわち初期形状の変更を計算途中に行うことも可能となる。このような ALE 型変形記述による計算では、図-2 に示すようにある初期形状から出発した釣り合い経路上の点から、異なる初期形状から出発した経路上の点へ移動しながら、所定の初期形状に対応する変形後形状を求めることとなる。このとき、所定の初期形状から出発した釣り合い経路上に分岐点が存在したとしても、異なる初期形状から出発した経路を経由することにより分岐点を迂回することが可能となる。

### 3. 膜の ALE 定式化

本研究では、Simo 等によって提案された超弾性体に対するシェルの定式化<sup>6)</sup>にならって、ALE 型変形記述を導入した膜の定式化を行う。

2次元のパラメータ  $\xi^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) を用いることにより、図-3 のように初期形状  $\phi_0(\xi^1, \xi^2) \in \mathbb{R}^3$  および変形後形状  $\phi(\xi^1, \xi^2) \in \mathbb{R}^3$  の膜の中央面を表すことができる。

変形の測度としては、Simo 等の定式化に従い、次の Green-Lagrange ひずみを膜ひずみとして考える。

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\phi_{,\alpha} \cdot \phi_{,\beta} - \phi_{0,\alpha} \cdot \phi_{0,\beta}) \quad (2)$$

ここで、下付き添え字  $\alpha, \beta$  は  $\xi^\alpha$  に関する偏微分を表す。

一方、応力としては、式 (2) で定義された Green-Lagrange ひずみの速度に関して双対なものとして、第2種の Piola-Kirchhoff 応力  $S^{\alpha\beta}$  を厚さ方向に積分した次の合応力  $\sigma^{\alpha\beta}$  を考える。

$$\sigma^{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} S^{\alpha\beta} dt \quad (3)$$

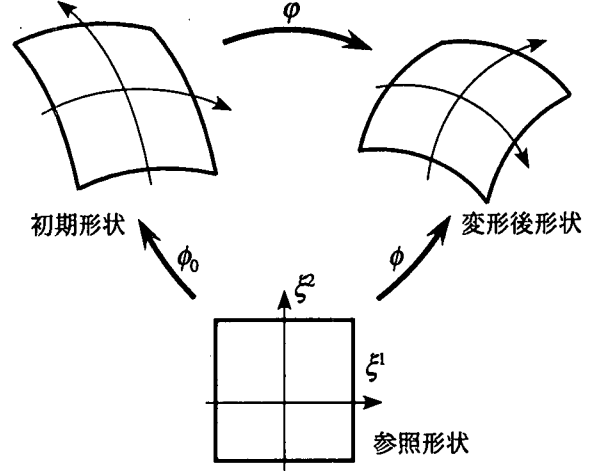


図-3 膜に対する変形の記述

ここで、 $t$  は厚さ方向の座標、 $h$  は膜厚である。

本研究では、膜に対する履歴不依存な超弾性体として、Green-Lagrange ひずみ  $\epsilon_{\alpha\beta}$  で定義される St. Venant-Kirchhoff 材料を考える。いま、初期形状に対する共変計量テンソル  $a_{0\alpha\beta}$ 、反変計量テンソル  $a_0^{\alpha\beta}$  は

$$a_{0\alpha\beta} = \phi_{0,\alpha} \cdot \phi_{0,\beta}, \quad a_0^{\alpha\beta} a_{0\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha \quad (4)$$

と定義されることから、ひずみエネルギー密度関数  $W(\epsilon_{\alpha\beta}, a_0^{\alpha\beta})$  は次式で表される。

$$W(\epsilon_{\alpha\beta}, a_0^{\alpha\beta}) = \frac{1}{2} H^{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon_{\gamma\delta} \quad (5)$$

このとき、合応力  $\sigma^{\alpha\beta}$  は、次式のように Green-Lagrange ひずみ  $\epsilon_{\alpha\beta}$  に関して線形関係で表される。

$$\sigma^{\alpha\beta} = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{\alpha\beta}} = H^{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\gamma\delta} \quad (6)$$

ここで、等方性を仮定すると  $H^{\alpha\beta\gamma\delta}$  は、ヤング率  $E$ 、ポアソン比  $\nu$  によって、

$$H^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ \nu a_0^{\alpha\beta} a_0^{\gamma\delta} + \frac{1}{2}(1-\nu)(a_0^{\alpha\delta} a_0^{\beta\gamma} + a_0^{\alpha\gamma} a_0^{\beta\delta}) \right\} \quad (7)$$

と表される。

仮想変位  $v$  を用いると、パラメータ  $\xi^\alpha$  で表される領域  $A$  における変形後形状  $\phi$  を未知数とする平衡方程式の弱表現は、次式で表される。

$$G(\varphi; v) = \int_A \sigma^{\alpha\beta} v_{(\alpha,\beta)} j_0 d\xi^1 d\xi^2 - G_{\text{ext}}(\varphi; v) = 0 \quad (8)$$

ここで、 $j_0$  は曲面のヤコビアン、 $v_{(\alpha,\beta)}$  は  $v$  に対する仮想ひずみでありそれぞれ以下のように表される。

$$j_0 = |\phi_{0,1} \times \phi_{0,2}| \quad (9)$$

$$v_{(\alpha,\beta)} = \frac{1}{2}(\phi_{,\alpha} \cdot v_{,\beta} + \phi_{,\beta} \cdot v_{,\alpha}) \quad (10)$$

また、 $G_{\text{ext}}(\mathbf{v})$  は外力の仮想仕事であり、膜面に作用する圧力  $p$  と境界  $\Gamma_r$  に作用する線荷重  $\mathbf{t}$  を考えると、次式により表される。

$$G_{\text{ext}}(\varphi; \mathbf{v}) = \int_A p \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} j d\xi^1 d\xi^2 + \int_{\Gamma_r} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} ds \quad (11)$$

ここで、 $\mathbf{n}$  は変形後形状の膜に対する単位法線ベクトル、 $j$  は次の変形後形状における曲面のヤコビアンである。

$$j = |\phi_{,1} \times \phi_{,2}| \quad (12)$$

上述の定式化においては、膜を記述するパラメータ  $\xi^\alpha$  を参照形状の座標と考えれば、初期形状を表す  $\phi_0$  と変形後形状を表す  $\phi$  がそのまま2節で述べた ALE 型変形記述に対応する。このとき、平衡方程式の弱表現は  $\phi_0$  と  $\phi$  によって、次式のように表されるものとする。

$$G(\varphi; \mathbf{v}) = G(\phi_0, \phi; \mathbf{v}) \quad (13)$$

弱形式(13) は非線形方程式であることから、線形化を行うことによって得られる増分形を用い、Newton-Raphson 法によって反復を行い解を求めることが必要となる。いま、初期形状の移動量  $\mathbf{U}$  と増分変位  $\mathbf{u}$  によって、弱形式(13) の増分形は次のように表される。

$$\begin{aligned} G(\phi_0 + \mathbf{U}, \phi + \mathbf{u}; \mathbf{v}) \\ \simeq G(\phi_0, \phi; \mathbf{v}) + D_{\phi_0} G(\phi_0, \phi; \mathbf{v}) \cdot \mathbf{U} \\ + D_{\phi} G(\phi_0, \phi; \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} \end{aligned} \quad (14)$$

ここで、 $D_{\phi} f \cdot \mathbf{u}$  は  $f$  の  $\phi$  に関する  $\mathbf{u}$  方向微分を表す。

式(14)の右辺第3項は、増分変位に対する通常の接線剛性であり、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} D_{\phi} G(\phi_0, \phi; \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} \\ = \int_A (H^{\alpha\beta\gamma\delta} u_{(\alpha,\beta)} v_{(\delta,\gamma)} + \sigma^{\alpha\beta} u_{,\alpha} \cdot v_{,\beta}) j_0 d\xi^1 d\xi^2 \\ - \int_A p(\mathbf{u}_{,1} \times \phi_{,2} + \phi_{,1} \times \mathbf{u}_{,2}) \cdot \mathbf{v} d\xi^1 d\xi^2 \end{aligned} \quad (15)$$

ここで、式(15)の右辺第1積分項の第1、2項はそれぞれ材料接線剛性と幾何剛性を意味する。また、式(15)の右辺第2積分項は変形に伴う法線方向の変化から導かれる圧力に関する荷重補正項である。

また、式(14)の右辺第2項の初期形状変化に関する項は、平衡方程式に対する初期形状を変更したときの感度であり、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} D_{\phi_0} G(\phi_0, \phi; \mathbf{v}) \cdot \mathbf{U} \\ = \int_A \left\{ \sigma^{\alpha\beta} a_0^{\gamma\delta} - 2(H^{\alpha\beta\gamma\delta} + \bar{H}^{\alpha\beta\gamma\delta}) \right\} \\ v_{(\alpha,\beta)} U_{<\gamma,\delta>} j_0 d\xi^1 d\xi^2 \end{aligned} \quad (16)$$

ここで、

$$U_{<\alpha,\beta>} = \frac{1}{2}(\phi_{0,\alpha} \cdot U_{,\beta} + \phi_{0,\beta} \cdot U_{,\alpha}) \quad (17)$$

$$\bar{H}^{\alpha\beta\gamma\delta} = a_0^{\nu\gamma} a_0^{\mu\delta} \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{\alpha\beta} \partial a_0^{\nu\mu}} \quad (18)$$

である。

#### 4. 有限要素近似

Isoparametric 仮定に基づく有限要素近似において、親要素の座標を参照形状のパラメータ  $\xi^\alpha$  と考えれば、上述の ALE 型変形記述は、変形後形状における節点座標だけではなく初期形状における節点座標も可変とするものとして近似を行うこととなる。

いま、要素  $e$  において補間関数  $N_a(\xi^1, \xi^2)$  を用いて、初期形状  $\phi_0$  と変形後形状  $\phi$  を次のように近似する。

$$\phi_0(\xi^1, \xi^2) = \sum_{a=1}^{Nen} N_a(\xi^1, \xi^2) \mathbf{X}_a \quad (19)$$

$$\phi(\xi^1, \xi^2) = \sum_{a=1}^{Nen} N_a(\xi^1, \xi^2) \mathbf{y}_a \quad (20)$$

ここで、 $\mathbf{X}_a$ 、 $\mathbf{y}_a$  はそれぞれ初期形状、変形後形状の節点  $a$  の座標、 $Nen$  は要素当たりの節点数である。仮想変位  $\mathbf{v}$  についても、節点ベクトル  $\mathbf{v}_a$  を用いることによって次のように近似される。

$$\mathbf{v}(\xi^1, \xi^2) = \sum_{a=1}^{Nen} N_a(\xi^1, \xi^2) \mathbf{v}_a \quad (21)$$

まず、平衡方程式の弱表現(8)の近似を考える。式(10)に対応する仮想ひずみに対するベクトルは次のように与えられる。

$$\left\{ \begin{array}{c} v_{(1,1)} \\ v_{(2,2)} \\ 2v_{(1,2)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \phi_{,1} \cdot \mathbf{v}_{,1} \\ \phi_{,2} \cdot \mathbf{v}_{,2} \\ \phi_{,1} \cdot \mathbf{v}_{,2} + \phi_{,2} \cdot \mathbf{v}_{,1} \end{array} \right\} = \sum_{a=1}^{Nen} \mathbf{B}_a \mathbf{v}_a \quad (22)$$

ここで、 $\mathbf{B}_a$  は次の変位-ひずみ変換行列である。

$$\mathbf{B}_a = \left[ \begin{array}{ccc} \phi_{1,1} N_{a,1} & \phi_{2,1} N_{a,1} & \phi_{3,1} N_{a,1} \\ \phi_{1,2} N_{a,2} & \phi_{2,2} N_{a,2} & \phi_{3,2} N_{a,2} \\ \left( \begin{array}{c} \phi_{1,1} N_{a,2} \\ + \phi_{1,2} N_{a,1} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} \phi_{2,1} N_{a,2} \\ + \phi_{2,2} N_{a,1} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} \phi_{3,1} N_{a,2} \\ + \phi_{3,2} N_{a,1} \end{array} \right) \end{array} \right] \quad (23)$$

また、合応力に対するベクトルを次のように定義する。

$$\boldsymbol{\sigma} = \left[ \begin{array}{ccc} \sigma_{11} & \sigma_{22} & \sigma_{12} \end{array} \right]^t \quad (24)$$

このとき、式(8)の第2式第1項から導かれる要素  $e$  の節点  $a$  に関する内力ベクトル  $\mathbf{f}_a^{\text{int}}$  は次式で表される。

$$\mathbf{f}_a^{\text{int}} = \int_{A_e} \mathbf{B}_a^t \boldsymbol{\sigma} j_0 d\xi^1 d\xi^2 \quad (25)$$

一方、線形化によって得られた Lagrange 変位に関する接線剛性 (15) に対応する剛性行列を表すために、以下の材料接線行列  $\mathbf{D}$  を導入する。

$$\mathbf{D} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} a_0^{11} a_0^{11} \left( \begin{matrix} \nu a_0^{11} a_0^{22} \\ + (1-\nu) a_0^{12} a_0^{12} \end{matrix} \right) & a_0^{11} a_0^{12} \\ a_0^{22} a_0^{22} & a_0^{22} a_0^{12} \\ \text{sym.} & \left( \begin{matrix} \frac{1+\nu}{2} a_0^{12} a_0^{12} \\ + \frac{1-\nu}{2} a_0^{11} a_0^{22} \end{matrix} \right) \end{bmatrix} \quad (26)$$

また、幾何剛性行列を表すために以下のベクトル、行列を準備する。

$$\begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} \\ u_{1,2} \\ u_{2,2} \\ u_{3,2} \end{Bmatrix} = \sum_{a=1}^{Nen} \gamma_a \mathbf{u}_a, \quad \gamma_a = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 N_{a,1} \\ \mathbf{I}_3 N_{a,2} \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \mathbf{I}_3 & \sigma_{12} \mathbf{I}_3 \\ \sigma_{12} \mathbf{I}_3 & \sigma_{22} \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \quad (28)$$

ここで、 $\mathbf{I}_3$  は  $3 \times 3$  の単位行列である。以上から、接線剛性 (15) に対応する要素  $e$ 、節点  $a, b$  に関する要素剛性行列は次式のように表される。

$$\mathbf{k}_{ab}^L = \int_{A_e} (\mathbf{B}_a^t \mathbf{D} \mathbf{B}_b + \gamma_a^t \mathbf{S} \gamma_b) j_0 d\xi^1 d\xi^2 \quad (29)$$

また、圧力荷重に対する荷重補正行列は同様に次式で表される。

$$\mathbf{k}_{ab}^P = \int_{A_e} N_a \mathbf{P} \gamma_b d\xi_1 d\xi_2 \quad (30)$$

ここで、

$$\mathbf{P} = p \begin{bmatrix} 0 & \phi_{3,2} & -\phi_{2,2} & 0 & -\phi_{3,1} & \phi_{2,1} \\ -\phi_{3,2} & 0 & \phi_{1,2} & \phi_{3,1} & 0 & -\phi_{1,1} \\ \phi_{2,2} & -\phi_{1,2} & 0 & -\phi_{2,1} & \phi_{1,1} & 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

である。

さらに、初期形状を変更したときの感度に対する行列を表すために式 (17) に対応するベクトルを次式で定義する。

$$\begin{Bmatrix} U_{<1,1>} \\ U_{<2,2>} \\ 2U_{<1,2>} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_{0,1} \cdot \mathbf{U}_{,1} \\ \phi_{0,2} \cdot \mathbf{U}_{,2} \\ \phi_{0,1} \cdot \mathbf{U}_{,2} + \phi_{0,2} \cdot \mathbf{U}_{,1} \end{Bmatrix} \\ = \sum_{a=1}^{Nen} \mathbf{B}_a^{\#} \mathbf{U}_a \quad (32)$$

ここで、

$$\mathbf{B}_a^{\#} = \begin{bmatrix} \phi_{0,1,1} N_{a,1} & \phi_{0,2,1} N_{a,1} & \phi_{0,3,1} N_{a,1} \\ \phi_{0,1,2} N_{a,2} & \phi_{0,2,2} N_{a,2} & \phi_{0,3,2} N_{a,2} \\ \left( \begin{matrix} \phi_{0,1,1} N_{a,2} \\ + \phi_{0,1,2} N_{a,1} \end{matrix} \right) & \left( \begin{matrix} \phi_{0,2,1} N_{a,2} \\ + \phi_{0,2,2} N_{a,1} \end{matrix} \right) & \left( \begin{matrix} \phi_{0,3,1} N_{a,2} \\ + \phi_{0,3,2} N_{a,1} \end{matrix} \right) \end{bmatrix} \quad (33)$$

である。式(18) に対応する行列は、次のように表すこととする。

$$\bar{\mathbf{H}} = \bar{\mathbf{H}}' \mathbf{T} \quad (34)$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} a_0^{11} a_0^{11} & a_0^{12} a_0^{12} & a_0^{12} a_0^{11} \\ a_0^{21} a_0^{21} & a_0^{22} a_0^{22} & a_0^{21} a_0^{22} \\ 2a_0^{11} a_0^{21} & 2a_0^{12} a_0^{22} & a_0^{11} a_0^{22} + a_0^{12} a_0^{12} \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$\mathbf{H}' = \frac{Eh}{1-\nu^2}$$

$$\begin{bmatrix} \left( \begin{matrix} 2(1-\nu) a_0^{12} \epsilon_{12} \\ + (2-\nu) a_0^{11} \epsilon_{11} \\ + \nu \bar{\epsilon} \end{matrix} \right) & \nu a_0^{11} \epsilon_{22} & \left( \begin{matrix} a_0^{11} \epsilon_{12} + \\ (1-\nu) a_0^{12} \epsilon_{22} \end{matrix} \right) \\ \nu a_0^{22} \epsilon_{11} & \left( \begin{matrix} 2(1-\nu) a_0^{12} \epsilon_{12} \\ + (2-\nu) a_0^{22} \epsilon_{22} \\ + \nu \bar{\epsilon} \end{matrix} \right) & \left( \begin{matrix} a_0^{22} \epsilon_{12} + \\ (1-\nu) a_0^{12} \epsilon_{11} \end{matrix} \right) \\ \left( \begin{matrix} a_0^{12} \epsilon_{11} + \\ (1-\nu) a_0^{22} \epsilon_{12} \end{matrix} \right) & \left( \begin{matrix} a_0^{12} \epsilon_{22} + \\ (1-\nu) a_0^{11} \epsilon_{12} \end{matrix} \right) & \left( \begin{matrix} \frac{1}{2} \{ \nu \bar{\epsilon} + \\ (1-\nu) (a_0^{11} \epsilon_{11} \\ + a_0^{22} \epsilon_{22}) + \\ 2a_0^{12} \epsilon_{12} \} \end{matrix} \right) \end{bmatrix} \quad (36)$$

以上より、式(16) に対応する要素  $e$ 、節点  $a, b$  に関する行列は次のように表される。

$$\mathbf{k}_{ab}^E = \int_{A_e} \mathbf{B}_a^t \{ -(\mathbf{D} + \bar{\mathbf{H}}) + \sigma [a_0^{11} a_0^{22} a_0^{12}] \} \mathbf{B}_b^{\#} j_0 d\xi^1 d\xi^2 \quad (37)$$

以上の要素ベクトル、行列をすべての要素について組み立てると次の近似方程式が得られる。

$$(\mathbf{K}^L - \mathbf{K}^P) \mathbf{u} + \mathbf{K}^E \mathbf{U} = \mathbf{f}^{\text{ext}} - \mathbf{f}^{\text{int}} \quad (38)$$

いま、 $\mathbf{u}$  と  $\mathbf{U}$  のすべての自由度を未知数とすると、変形写像を一意に決定することができなくなるため、近似解を求めることはできない。そこで、各節点自由度に対して変形後形状の位置と初期形状における位置のどちらかが未知量で、他方が既知量であることを仮定し、未知量と既知量を整理する。変形後形状の位置を未知数とする部分に対応する変形後形状の増分変位ベクトルを  $\mathbf{u}_1$ 、初期形状の位置を未知数とする部分に対応する初期形状の増分移動量ベクトルを  $\mathbf{U}_2$  とする。いま、 $\mathbf{u}_1$  の自由度に対する初期形状の増分移動量ベクトル  $\mathbf{U}_1$  と  $\mathbf{U}_2$  の自由度に対する変形後形状の増分変位ベクトル  $\mathbf{u}_2$  は既知量と考え、さらに幾何学的境界条件が課せられる部分として、初期形状と変形後形状の両方に既知の増分ベクトル  $\mathbf{U}_3$  および  $\mathbf{u}_3$  が与えられているものとする。このとき、近似方程式は次のように整理できる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^L - \mathbf{K}_{11}^P & \mathbf{K}_{12}^E \\ \mathbf{K}_{21}^L - \mathbf{K}_{21}^P & \mathbf{K}_{22}^E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1^{\text{ext}} - \mathbf{f}_1^{\text{int}} \\ \mathbf{f}_2^{\text{ext}} - \mathbf{f}_2^{\text{int}} \end{Bmatrix} \\ - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^E & \mathbf{K}_{12}^L - \mathbf{K}_{12}^P \\ \mathbf{K}_{21}^E & \mathbf{K}_{22}^L - \mathbf{K}_{22}^P \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix} \\ - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{13}^L - \mathbf{K}_{13}^P & \mathbf{K}_{13}^E \\ \mathbf{K}_{23}^L - \mathbf{K}_{23}^P & \mathbf{K}_{23}^E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{U}_3 \end{Bmatrix} \quad (39)$$

この方程式は未知数と方程式の数が一致した連立一次方程式となる。

なお、本研究では、有限要素近似として、形状、変位について3角形1次要素を用いた。

## 5. 数値計算例

### 5.1 滑りを考慮した大変形問題

図-4 のように2辺を固定し、 $x_1$  方向の  $1/3$  の位置を直線ローラで支持し、 $2/3$  の位置で剛な直線ローラにより鉛直载荷を行う問題を考える。ローラにおいては  $x_1, x_2$  の2方向には摩擦はないものとする、ローラ位置の節点については、 $x_1$  方向成分は変形後形状の位置を固定し、初期形状位置を未知数とする Euler 記述とすれば、変形後形状におけるローラとの接触状態を考慮することができる。図-5 に初期条件として与えたメッシュを示す。計算はこのメッシュを参照形状として行ったものとも考えることもできる。なお、この問題では材料定数としてポアソン比は  $0.45$  とする。

図-6 に载荷ローラの  $x_3$  変位が  $1.0$  となった状態の初期形状と変形後形状のメッシュを示す。変形後形状において、ローラの位置は固定され、膜の勾配が不連続となることが表現できている。また、ローラ位置での節点は、初期形状において変形後形状で直線となるような位置に移動している。

### 5.2 弛んだ膜の大変形問題

境界が正方形となる膜に圧力が作用する問題の計算を行う。ここでは、弛んだ初期形状に対する変形後形状を求めるために次のような計算プロセスを考える。

1. 初期形状として、等張力が導入される全体縮小した形状を図-7 のように与え、Lagrange 変位として自明な変形後形状を求める。(図-8 A 点)
2. 圧力荷重を作用させ、Lagrange 変位として変形後形状を求める。(図-8 A 点から B 点)
3. 圧力が作用している状態で、Euler 変位を与えることにより、1 で導入した張力が開放される初期形状に変更し、その時の変形後形状を Lagrange 変位として求める。(図-8 B 点から C 点、図-9)
4. Euler 変位を与えることにより初期形状を圧力の方向とは逆方向にたわんだ形状に変更し、その時変化する変形後形状を Lagrange 変位として求める。(図-8 C 点から D 点)
5. 圧力を増加させ、変形後形状を Lagrange 変位として求める。(図-8 D 点以降、図-10)

ここで、図-8 における中央点変位は、初期形状と変形後形状の鉛直位置の差として求めたものである。

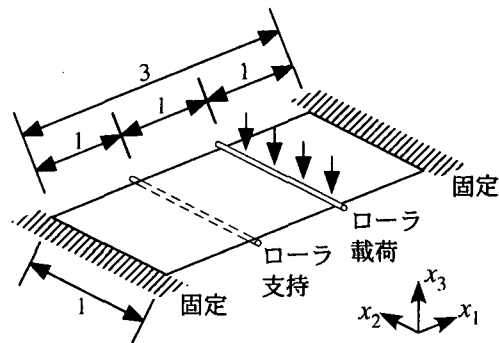


図-4 ローラ支持された長方形膜

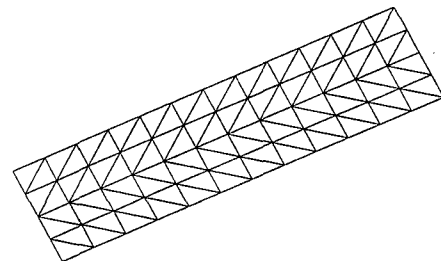
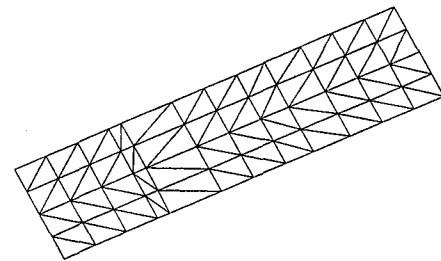
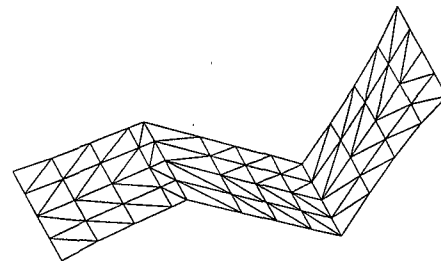


図-5 長方形膜の初期メッシュ (参照形状)



(a) 初期形状



(b) 変形後形状

図-6 ローラ支持された膜の初期形状と変形後形状

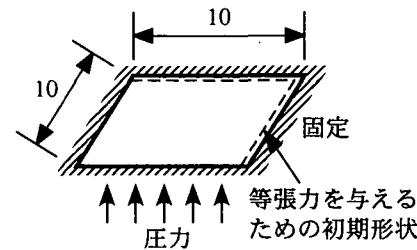


図-7 正方形膜

膜は張力が導入されていない状態では不安定であることから、図-10 (a) のように弛んだ状態を初期形状とし、図-10 (b) の変形後形状へ移行するには、その釣り合い経路上に多数の分岐点が存在する。したがって、

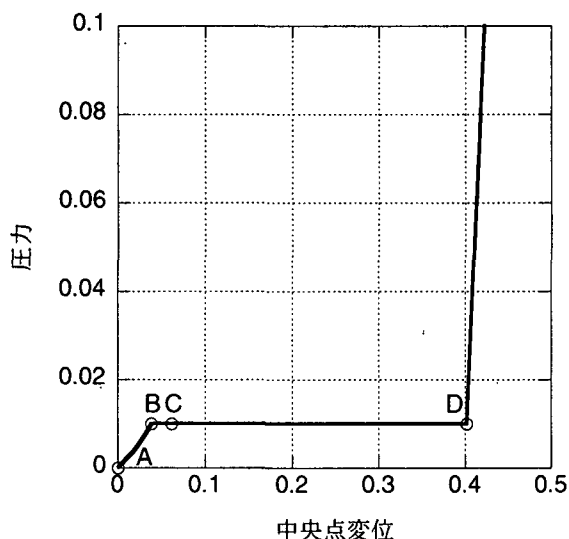
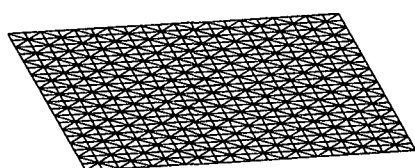
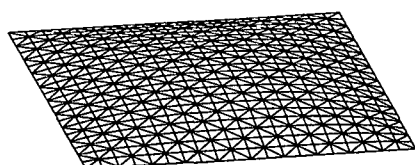


図-8 中央点変位と圧力の履歴

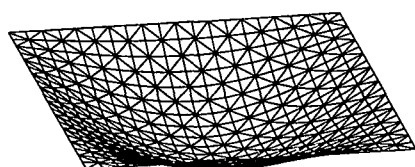


(a) 初期形状

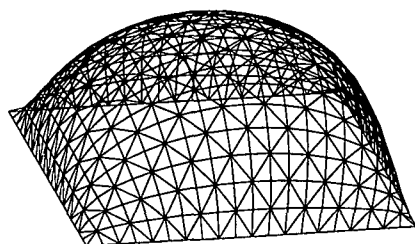


(b) 変形後形状

図-9 平面初期形状と変形後形状



(a) 初期形状



(b) 変形後形状

図-10 弛んだ初期形状と変形後形状

このような問題の計算においては、分岐解析が必須であった。ALE 有限要素法では、安定な自明解から出発し、荷重が作用した状態で初期形状を変更し、弛んだ状態とすることで、このような問題が分岐解析を伴わない準静的解析として容易に計算可能である。

## 6. 結

本研究は、不安定な膜構造の問題を分岐解析等を用いることなく取り扱う新しい大変形解析手法として ALE 型変形記述に基づく定式化とその有限要素解析手法を提案した。提案した手法では、初期形状を連続的に変化させ対応する変形後形状を求めることができることから、設計問題においても有用であると考えられる。

一方、ALE 有限要素法では、求めたい膜の変形後形状に対して荷重条件と境界条件を与えることによって、対応する初期形状を未知数として求める初期形状解析<sup>7)</sup>も考えることができる。しかしながら、膜構造の場合、決められた変形後形状を与える初期形状は、非常に多く存在することから、何らかの制約条件を導入した初期形状決定を行わなければならない。

## 参考文献

- 1) 境治彦, 橘英三郎: "折れ曲がり要素を用いたケーブル補強膜構造の解析に関する研究," 膜構造研究論文集 '95, 1-8, 1995.
- 2) R.B. Haber: "Contact-Slip Analysis Using Mixed Displacements," *J. Engrg. Mech., ASCE*, **1109**(2), 411-429, 1983.
- 3) 川島徹也, 野口裕久: "ALE-EFGM によるケーブル補強膜の幾何学的非線形定式化," 日本機械学会論文集, **67 (660)**, 1276-1282, 2001.
- 4) T. Yamada, and F. Kikuchi, "An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for incompressible hyperelasticity," *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, **102**, 149-177, 1993.
- 5) R.B. Haber: "A Mixed Eulerian-Lagrangian Displacement Model for Large-Deformation Analysis in Solid Mechanics," *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, **43**, 277-292, 1984.
- 6) J.C. Simo D.D. Fox and M.S. Rifai: "On a Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model: Part II The Linear Theory; Computational Aspects," *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, **73**, 53-92, 1989.
- 7) T Yamada: "Finite element procedure of initial shape determination for hyperelasticity," *Structural Engineering & Mechanics*, **6**, 173-183, 1998.

(2002 年 4 月 19 日受付)