

テーパのある梁構造解析における相似形メッシュ法の適用について

Application of the similar mesh generation method for analysis of tapered beam structures

内山義博*・山尾敏孝**・岩坪要***・平井一男****

Yoshihiro UCHIYAMA, Toshitaka YAMAO, Kaname IWATSUBO and Itio HIRAI

* 博(工) 八代工業高等専門学校助教授 土木建築工学科 (〒866-8501 八代市平山新町 2627)

** 工博 熊本大学教授 工学部環境システム工学科 (〒860-8555 熊本市黒髪 2-39-1)

*** 博(工) 八代工業高等専門学校助手 土木建築工学科 (〒866-8501 八代市平山新町 2627)

**** 工博 崇城大学教授 工学部環境建設工学科 (〒860-0082 熊本市池田町 4-22-1)

This paper presents an application of the similar mesh generation method that divides a given system into the subparts with the similar stiffness matrix in the FEM analysis of tapered beam structures subjected to lateral load. A favorable characteristic of this method is its ability to perform an efficient static condensation of the similar stiffness matrix in the FEM analysis. Several problems including material non-linearity are solved, which demonstrates the validity of the proposed method. These results are compared with those obtained using the finite element package program MARC

Keyword: *similar mesh generation method, subparts, FEM analysis, tapered beam structures*

1. はじめに

有限要素法解析において大規模な構造物が対象の場合、いくつかの小さな部分に分割して解析するサブストラクチャー法がある^{1), 2)}。このとき要素分割が等分割や相似分割のように規則正しく行えない場合は、ズーム法^{3), 4)}などを併用することにより解を求めるものとすれば、一般に大部分は規則性のあるメッシュ分割が可能であり、この部分の方程式を如何に効率的に解くかが問題となる。この場合、剛性マトリックスは一般にスパース行列となるので、その特性を活かした直接解法¹⁾や反復法⁵⁾など多くの解法があるが、一般に複雑な処理を必要とする。

著者らは、相似形メッシュに要素分割された大規模な系での、各要素の剛性マトリックスは互いに相似比の関係にあることに着目して系を効率的に解く手法の開発を試みてきた⁶⁾。つまり、要素の相似比を考慮して消去・縮合の演算をすれば、一部の要素の剛性マトリックスで全体の剛性マトリックスの縮合が可能となることを示し、この手法を用いれば、要素分割数を増やして高精度な解を得ることもいたって容易に実施でき、計算時間も短縮できることが明らかになった。

そこで本研究では、テーパのある梁やその集合梁構造物を対象に、系の一部で要素が降伏などの理由で剛性が変化した場合、あるいは一部分に剛性が付加され相似系が壊れた場合の問題に適用を試みた。更に、提案する手

法を拡張して、曲げを受ける棒材のように剛性マトリックス内に異なる次元の成分を含む問題に対しても適用可能であるか調べた。特に、変位の精度のみならず応力分布等においても提案法の妥当性について、数値解析例を通して明らかにするものである。

2. 相似メッシュ系剛性方程式の誘導

2.1 剛性方程式の消去・縮合の方法

ここでは、相似メッシュで構成された系の剛性方程式の消去・縮合を行う方法について簡単に述べる。まず、第一段階として偶数行を消去して融合し、次に第二段階としてその偶数行を同様に消去・縮合する。以下同様にして一行おきに消去と縮合の演算を繰り返せば、上下端に縮合された剛性方程式が得られる。以上のことを一般的な問題として、マトリックス演算で表記すると次のようになる。

図-1 に示す上下端幅 b_n , b_1 , 高さ h のモデルを横方向 m 分割, 縦方向 n 分割した系について, 上下端 Y_{n+1} , Y_1 行への消去・縮

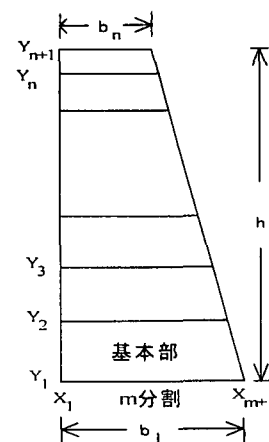


図-1 原系

合を考える。ただし、各段階で偶数行を消去するので縦方向分割数 n は、 $n = 2^p$ (p は正の整数) となる。図-1 より下 2

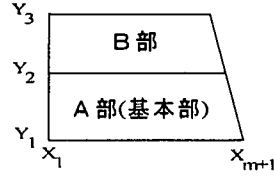


図-2 ユニットパート

層を取り出した系をユニットパートと呼ぶとすると、図-2 の A 部の基本剛性マトリックス K_C は次式で表される。

$$K_C = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ \bar{K}_{21} & \bar{K}_{22} \end{bmatrix} \quad \dots (1)$$

ここで、下添字は Y_1 行、 Y_2 行にそれぞれ対応するものとする。また、B 部の剛性マトリックスは A 部と同一であるので、両者を重ね合わせればユニットパート全体の剛性方程式が、次式のように表される。

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 \\ K_{21} & \bar{K}_{22} & K_{12} \\ 0 & K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \quad \dots (2)$$

ただし、 $\bar{K}_{22} = K_{11} + K_{22}$ であり、 u 、 F はそれぞれ対応する節点変位、節点荷重である。よって図-1 に示す系の 2 層～ n 層は A 部の剛性マトリックスと同じであり、 $Y_1 \sim Y_{n+1}$ 行に対応する節点変位を $u_1 \sim u_{n+1}$ 、節点荷重を $F_1 \sim F_{n+1}$ とすると、式(1)より全体剛性方程式は次のようなバンドマトリックスとなる。

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ K_{21} & \bar{K}_{22} & K_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & K_{21} & \bar{K}_{22} & K_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{21} & \bar{K}_{22} & K_{12} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{21} & \bar{K}_{22} & K_{12} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{21} & \bar{K}_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \bar{K}_{22} & K_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ \dots \\ u_n \\ u_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ \dots \\ F_n \\ F_{n+1} \end{bmatrix} \quad \dots (3)$$

これらを展開して、消去・縮合を行う。式(3)の第 2 行より u_2 は

$$u_2 = -\bar{K}_{22}^{-1}(K_{21}u_1 + K_{12}u_3 - F_2) \quad \dots (4)$$

第 1 行へ代入すると

$$(K_{11} - K_{12}\bar{K}_{22}^{-1}K_{21})u_1 - K_{12}\bar{K}_{22}^{-1}K_{12}u_3 = F_1 - K_{12}\bar{K}_{22}^{-1}F_2 \quad \dots (5)$$

第 4 行より u_4 を求め、 u_2 と共に第 3 行へ代入すると

$$\begin{aligned} & -K_{21}\bar{K}_{22}^{-1}K_{21}u_1 + (K_{22} - K_{21}\bar{K}_{22}^{-1}K_{12} - K_{12}\bar{K}_{22}^{-1}K_{21})u_3 - K_{12}\bar{K}_{22}^{-1}K_{12}u_5 \\ & = F_3 - K_{21}\bar{K}_{22}^{-1}F_2 - K_{12}\bar{K}_{22}^{-1}F_4 \end{aligned} \quad \dots (6)$$

以下同様に、偶数行の消去、奇数行への縮合を行うと、消去・縮合後の最下の Y_1 行と最上の Y_{n+1} 行は次式となる。

$$\begin{aligned} & (K_{11} - K_{12}\bar{K}_{22}^{-1}K_{21})u_1 - K_{12}\bar{K}_{22}^{-1}K_{12}u_3 \\ & = {}_1K_{11}u_1 + {}_1K_{12}u_3 = {}_1F_1 \end{aligned} \quad \dots (7)$$

$$\begin{aligned} & -K_{21}\bar{K}_{22}^{-1}K_{21}u_{n+1} + (K_{22} - K_{21}\bar{K}_{22}^{-1}K_{12})u_{n+1} \\ & = {}_1K_{21}u_{n+1} + {}_1K_{22}u_{n+1} = {}_1F_{n+1} \end{aligned} \quad \dots (8)$$

中間の Y_j 行も、同様に次式で表される。

$$\begin{aligned} & -K_{21}\bar{K}_{22}^{-1}K_{21}u_{j-2} + (K_{22} - K_{21}\bar{K}_{22}^{-1}K_{12} - K_{12}\bar{K}_{22}^{-1}K_{21})u_j - K_{12}\bar{K}_{22}^{-1}K_{12}u_{j+2} \\ & = {}_1K_{21}u_{j-2} + ({}_1K_{11} + {}_1K_{22})u_j + {}_1K_{12}u_{j+2} \\ & = {}_1K_{21}u_{j-2} + {}_1K_{22}u_j + {}_1K_{12}u_{j+2} = {}_1F_j \end{aligned} \quad \dots (9)$$

ここで、 ${}_1K_{11} = K_{11} - K_{12}\bar{K}_{22}^{-1}K_{21}$

$${}_1K_{12} = -K_{12}\bar{K}_{22}^{-1}K_{12} = {}_1K_{21}^T$$

$${}_1K_{22} = K_{22} - K_{21}\bar{K}_{22}^{-1}K_{12}$$

$${}_1\bar{K}_{22} = {}_1K_{11} + {}_1K_{22} \quad \dots (10)$$

$${}_1F_1 = F_1 - K_{12}\bar{K}_{22}^{-1}F_2$$

$${}_1F_{n+1} = F_{n+1} - K_{21}\bar{K}_{22}^{-1}F_n$$

$${}_1F_j = F_j - K_{21}\bar{K}_{22}^{-1}F_{j-1} - K_{12}\bar{K}_{22}^{-1}F_{j+1}$$

従って、偶数行縮合後の 1 回目の剛性マトリックス ${}_1K$ 、荷重項 ${}_1F$ は、式(1)の基本剛性マトリックス K_{11} 、 K_{12} 、 K_{21} 、 K_{22} で表され、剛性方程式は次式となる。

$$\begin{bmatrix} {}_1K_{11} & {}_1K_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ {}_1K_{21} & {}_1\bar{K}_{22} & {}_1K_{12} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & {}_1K_{21} & {}_1\bar{K}_{22} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & {}_1\bar{K}_{22} & {}_1K_{12} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & {}_1K_{21} & {}_1K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \\ u_5 \\ \dots \\ u_{n-1} \\ u_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_1F_1 \\ {}_1F_3 \\ {}_1F_5 \\ \dots \\ {}_1F_{n-1} \\ {}_1F_{n+1} \end{bmatrix} \quad \dots (11)$$

第二段階の消去・縮合は、縮合された Y_1 、 Y_3 行よりなる部分を新しい基本部とすると、基本剛性マトリックスの要素は先に得られた ${}_1K_{11} \sim {}_1K_{22}$ であり、それを重ね合わせて図-2 のユニットパートを作成、 Y_2 行を消去・縮合すれば、必要な ${}_2K_{11} \sim {}_2K_{22}$ が得られるので、これらを重ね合わせれば第二段階の縮合マトリックスとなる。以下同様に消去・縮合を p 回繰り返せば上下に縮合された剛性マトリックスを求めることができる。また荷重項についても式(10)より、同様に計算すれば、縮合された剛性方程式が求められる。

図-1 の系では、横 m 、縦 $n (= 2^p)$ 分割であり、内部行を全て消去するのに、直接演算では、 $2(m+1) \times (n+1)$ のマトリックスについて $n-1$ 回の消去・縮合を必要とするのに対し、本法では大きさ $2(m+1) \times 3$ のマトリックスでよく、しかも p 回の消去・縮合で済むことになり、計算容量の低減、計算時間の短縮が期待できる。なお、荷重項は、各段階において全て求め、記憶しておく必要があるが、荷重はベクトルであるから、計算時間あるいは容量的にもあまり問題にならない。

2.2 非相似系への適用

相似メッシュ系で、一部の要素の剛性が、例えば降伏などの理由で変化(図-3(a))する場合、また最初から一部剛性が付加(図-3(b))された場合などは、相似メッシュ系ではなくなる。しかし、影響する範囲が小範囲であれば、

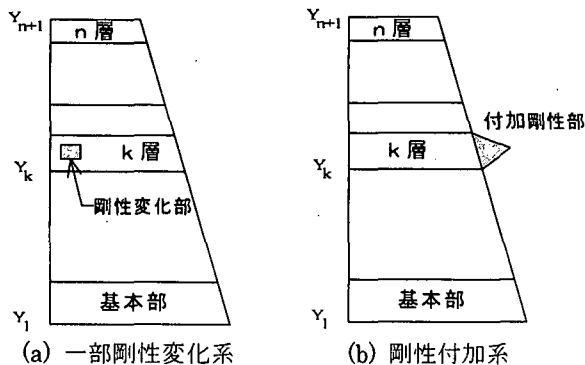


図-3 一部非相似を有する系

以下に述べるように相似メッシュ系の一部修正として、影響部のみの取扱ですみ、相似系の消去・縮合法が有効に使える。

図-3(a)で、原系の剛性マトリックスを K_A 、節点変位を u_A 、節点荷重を F_A とすると、原系の剛性方程式は次式で表される。

$$K_A u_A = F_A \quad \dots (12)$$

なお、前節の消去・縮合によって、原系の各段階での K_A の縮合剛性マトリックス並びに節点変位ベクトル u_A は求められているものとする。今、図-3(a)のように k 層部の斜線部に剛性変化 ΔK が生じたとすると、修正後の剛性マトリックスは、 $K_B = K_A + \Delta K$ に、それに伴って節点変位ベクトルも u_B と変化すると考えると、修正後の剛性方程式は

$$K_B u_B = (K_A + \Delta K) u_B = F_A \quad \dots (13)$$

変形すると、

$$K_A u_B = F_A - \Delta K u_B = F_B \quad \dots (14)$$

ここで、 u_B は ΔK 部に対応する節点変位ベクトルである。従って、 ΔK 部に対応する修正後の節点変位ベクトル u_B が得られれば、原系である相似系に外力 F_B の作用する問題として、相似系の消去・縮合法が適用できる。式(13)より

$$(I + f_A \Delta K) u_B = f_A F_A = u_A \quad \dots (15)$$

ここに、 $f_A = K_A^{-1}$ である。 $f_A \Delta K$ は、 K_A つまり系全体の逆マトリックスである f_A を含むからこのままでは問題である。しかし、一部修正を対象にしているので、 ΔK は全体の大きさに比べ小部分であり、 f_A も次に示すように ΔK に対応する小部分のみですむ。 k 層部が修正部であるから、分割マトリックスで表すと

$$f_A \Delta K = \begin{bmatrix} 0 & f_{1k} \Delta K & 0 \\ 0 & f_{kk} \Delta K & 0 \\ 0 & f_{3k} \Delta K & 0 \end{bmatrix} \quad \dots (16)$$

従って、式(15)は、式(16)を使用して、次式となる。

$$(I + f_A \Delta K) u_B = \begin{bmatrix} I & f_{1k} \Delta K & 0 \\ 0 & I + f_{kk} \Delta K & 0 \\ 0 & f_{3k} \Delta K & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{B1} \\ u_{Bk} \\ u_{B3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_{A1} \\ u_{Ak} \\ u_{A3} \end{bmatrix} \quad \dots (17)$$

ここで、修正部 k に対応する節点変位 u_{Bk} は、次式で得られることになる。

$$u_{Bk} = (I + f_{kk} \Delta K)^{-1} u_{Ak} \quad \dots (18)$$

従って u_{Bk} 、即ち式(14)の u_B は、修正部 k の大きさ ΔK のマトリックス演算で求められる。また、 K_A の縮合剛性マトリックスは求められているから、 f_{kk} は k 部の各点に次々と単位の節点荷重が作用するときの k 部の節点変位として、相似系の消去・縮合法で求めることができる。求めた u_{Bk} を、式(14)に代入すれば u_B が得られ、修正変位 u_B は相似系の消去・縮合法で計算できる。この場合の問題は、系全体に対する修正部の大きさであり、修正量の大小は問題にならない。

一方、図-3(b)のように、一部剛性が付加されて相似系が壊れた場合についても、 ΔK が異なるのみで上記と同様に取り扱うことができる。

相似系部を K 、付加部を ΔK 、 $\bar{K}_{22} = K_{22} + \Delta K_{11}$ とおき、付加部が行列の最後になるように並べ替えると、剛性方程式は次式で表される。

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 \\ K_{21} & \bar{K}_{22} & \Delta K_{12} \\ 0 & \Delta K_{21} & \Delta K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \quad \dots (19)$$

これを展開し、第3式の u_3 を第2式へ代入すると

$$K_{21} u_1 + (\bar{K}_{22} - \Delta K_{12} \Delta K_{22}^{-1} \Delta K_{21}) u_2 = F_2 - \Delta K_{12} \Delta K_{22}^{-1} F_3 \quad \dots (20)$$

まとめると次式となる。

$$K_{21} u_1 + (K_{22} + \Delta K) u_2 = \bar{F}_2 \quad \dots (21)$$

ここに $\Delta K = \Delta K_{11} - \Delta K_{12} \Delta K_{22}^{-1} \Delta K_{21}$

$$\bar{F}_2 = F_2 - \Delta K_{12} \Delta K_{22}^{-1} F_3 \quad \dots (22)$$

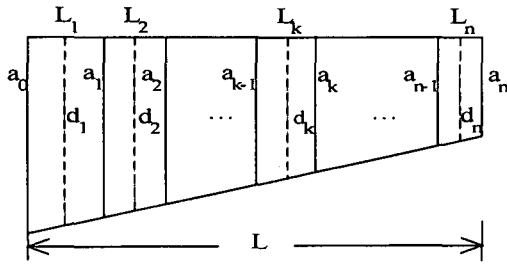
さらに、式(19)の第1式と合わせると次式で表示できる。

$$(K + \Delta K) u = F \quad \dots (23)$$

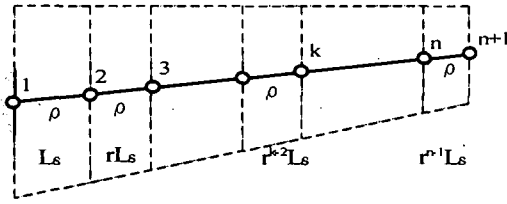
すなわち、付加部の影響を式(22)を用いて剛性、荷重の変化として表しておけば、式(13)で示した剛性変化の場合と同様に取り扱うことができることになる。

2.3 テーパーを有する片持ち梁の1次元解析

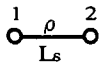
1次元の棒要素の剛性マトリックスは、マトリックス内にたわみ、たわみ角という異なる次元の成分を含むから相似系の場合、マトリックス内の成分が変化する。これを避けるために、剛性マトリックス成分の無次元化を行う。図-4(a)に示すような n ($=2p$: $p=1, 2, \dots$)要素に分割された高さが左端: a_0 、右端: a_n で、スパン: L なる片持ち梁を考える。相似比 r は、 $r = \sqrt{a_n/a_0}$ であり、1番目の要素の長さを L_s とすると k 番目の要素については、長さ: $L_k = r^{k-1} L_s$ 、右高さ: $a_k = r^k a_0$ 、平均高さ: $d_k = 0.5 r^{k-1} (1+r) a_0$ で表されるから、幅1、高さ d_k の矩形断面とすると、要素剛性 ρ は次式で表され各要素



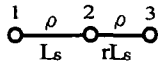
(a) 相似要素寸法



(b) 棒要素モデル



(c) サブパート



(d) ユニットパート

図-4 相似要素分割

とも同一となる。

$$\rho_k = \frac{E b}{96} \left(\frac{a_0 - a_n}{L} \frac{1+r}{1-r} \right)^3 \quad \dots (24)$$

従って、1-2材で無次元化された剛性マトリックスは

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ \overline{M}_1 \\ Y_2 \\ \overline{M}_2 \end{Bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 \\ -6 & 4 & 6 & 2 \\ -12 & 6 & 12 & 6 \\ -6 & 12 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \overline{\theta}_1 \\ v_2 \\ \overline{\theta}_2 \end{Bmatrix} \quad \dots (25)$$

ここで、 $\overline{M} = M/L_s$, $\overline{\theta} = \theta L_s$ である。

2-3材については、 $L_2 = r L_s$, $\overline{M}_{23} = M_{23}/L_2$ より

$$\begin{Bmatrix} Y_2 \\ \overline{M}_2 \\ Y_3 \\ \overline{M}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \overline{M}_2 \\ Y_3 \\ \overline{M}_3 \end{Bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 \\ -6 & 4 & 6 & 2 \\ -12 & 6 & 12 & 6 \\ -6 & 12 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \overline{\theta}_2 \\ v_3 \\ \overline{\theta}_3 \end{Bmatrix} \quad \dots (26)$$

であるから

$$\begin{Bmatrix} Y_2 \\ \overline{M}_2 \\ Y_3 \\ \overline{M}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \end{bmatrix} K_s \begin{Bmatrix} v_2 \\ \overline{\theta}_2 \\ v_3 \\ \overline{\theta}_3 \end{Bmatrix}$$

$$F_{23} = K_{23} u_{23} = r K_s r u_{23} \quad \dots (27)$$

となる。ここで、 r は相似比マトリックスであり

$$r = \begin{bmatrix} r_0 & 0 \\ 0 & r_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \end{bmatrix} \quad \dots (28)$$

これより、一般に k 要素の剛性マトリックスは

$$F_{kk+1} = K_{kk+1} u_{kk+1} = r^{k-1} K_s r^{k-1} u_{kk+1} \quad \dots (29)$$

であり、基本マトリックスの左右から相似比マトリックス

ス倍すれば求められる。

縮合法では、基本マトリックス K_s を作成、 K_s を係数倍したものと K_s の重ね合わせでユニットマトリックス K_U を作成し、中間行の消去・縮合を行い、得られたマトリックスを次の ${}_1K_s$ として繰り返し縮合を行う。このためには、任意パートのマトリックス並びにその縮合マトリックスそれぞれが K_U と縮合された ${}_1K_s$ の係数倍で表されることが必要である。まず、1-2要素よりなる基本ユニットマトリックス ${}_1K_U$ で、他のマトリックスが表される事を示す。まず、 ${}_1K_U$ は

$${}_1K_s = K_{123} = \begin{bmatrix} K_s & \\ & r K_s r \end{bmatrix} \quad \dots (30)$$

3-4要素よりなるユニットマトリックスは

$$\begin{aligned} K_{345} &= \begin{bmatrix} r^2 K_s r^2 & \\ & r^3 K_s r^3 \end{bmatrix} \\ &= R^2 \begin{bmatrix} K_s & \\ & r K_s r \end{bmatrix} R^2 = R^2 \cdot {}_1K_U \cdot R^2 \end{aligned} \quad \dots (31)$$

であり、基本ユニットマトリックス ${}_1K_U$ の R^2 倍となる。従って、任意のユニットマトリックスは ${}_1K_U$ を R の累乗倍すれば得られる。ここで R は

$$R = \begin{bmatrix} r_0 & 0 & 0 \\ 0 & r_0 & 0 \\ 0 & 0 & r_0 \end{bmatrix} \quad \dots (32)$$

次に、ユニットパートの剛性方程式を式(33)、また、 Y_2 行を消去・縮合したサブパートの剛性方程式を式(34)とする。ここで、 a_{ij} は、1-2材の剛性マトリックス成分であり、 b_{ij} は、2-3材の剛性マトリックスの成分である。

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} + b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad \dots (33)$$

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_3 \end{Bmatrix} = {}_1K_s u_{13} \quad \dots (34)$$

次に、 $\overline{Y}_k = r_0^2 Y_k$, $\overline{u}_k = r_0^2 u_k (k=3,4,5)$ とおくと、3,4番目の要素よりなるユニットの剛性方程式は式(31)より式(35)となる。

$$\overline{Y}_k = {}_1K_U \overline{u}_k \quad \dots (35)$$

式(35)の剛性マトリックスの成分は式(33)と同一であるから、 Y_4 行の消去・縮合の結果は、式(34)と同一である。つまり

$$\begin{Bmatrix} Y_3 \\ Y_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_5 \end{Bmatrix} \quad \dots (36)$$

$$\therefore \overline{Y}_{35} = {}_1K_s \overline{u}_{35} \quad \dots (37)$$

従って、 $r^2 \cdot Y_{35} = {}_1K_s \cdot r^2 \cdot u_{35}$

$$\therefore Y_{35} = r^2 \cdot {}_1K_s \cdot r^2 \cdot u_{35} \quad \dots (38)$$

マトリックス表示すると

$$\begin{Bmatrix} Y_3 \\ Y_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r_0^2 & 0 \\ 0 & r_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0^2 & 0 \\ 0 & r_0^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_5 \end{Bmatrix} \quad \dots (39)$$

であり、サブユニットの消去・縮合の結果 $1Ks$ に左右から r^2 倍すればよい。残りのユニットの縮合マトリックスも一般に以下のように $1Ks$ で表される。

$$Y_{kk+2} = r^{k-1} \cdot 1Ks \cdot r^{k-1} \cdot u_{kk+2} \quad \dots (40)$$

第2段階以降も同様に $2Ks, 3Ks, \dots$ で表される。従って、消去・縮合は各段階で1回行えばよく、縮合法が適用できる。

3. 数値計算結果と考察

3.1 テーパーを有する片持ち梁の解析

テーパーを有する相似メッシュ系モデルの一例として、図-5に示すような左端固定、右端自由の境界条件で、自由端部の高さが変化する片持ち梁について数値計算を行った。ここでは、同条件でテーパーの相違による影響を調べるために、図-5(a)~(c)のような下テーパー付モデル(U-T)、上テーパー付モデル(O-T)と両テーパー付モデル(D-T)梁を選んだ。モデルは左端の高さを $b = 1m$ と固定し、自由端の高さ a を $0.1m, 0.5m, 0.9m$ と変化させた。

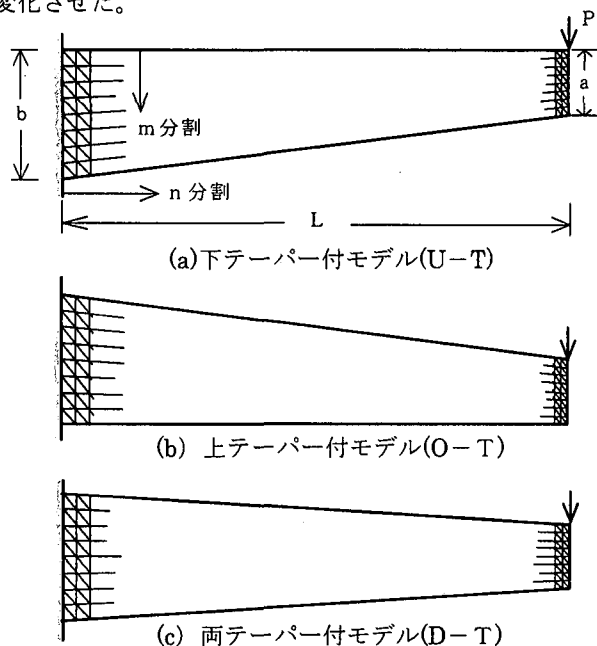


図-5 解析モデル

表-1 テーパー付片持ち梁諸元

諸元	数値
左端(b)	1.0m
右端(a)	0.1m, 0.5m, 0.9m
スパン(L)	4.0m
厚さ(t)	0.01m
ポアソン比(ν)	0.3
ヤング係数(E)	200.0 GPa
相似比(r)	$r = \sqrt[n]{a_0/a_n}$

荷重は自由端に鉛直荷重 $P=20kN$ が鉛直下方向へ作用するものとした。解析モデルの材料定数や形状寸法の諸元を表-1に示す。なお、分割方法については、縦方向は等 m 分割、横方向には $n (=2^p)$ 分割で、メッシュ縦横比が1となるように分割した。解析には、内部メモリ256MBを持つパーソナルコンピュータを用い、Fortran言語による倍精度計算を行った。また、汎用FEM解析プログラムMARC⁷⁾でも計算を行った。計算時間の比較検討については文献⁶⁾に示したので、本研究では特に応力分布の比較を試みた。

図-6は、各モデルの分割数の増加と自由端変位の収束状況について示したものである。解析変位 v は自由端各節点の鉛直方向変位の平均値を用い、せん断変形を考慮した初等梁理論の自由端変位を理論たわみ v_T とした。縦軸は、解析値と理論値との比 v/v_T を示し、横軸は要素の縦分割数 m である。 $a/b = 0.9, 0.5, 0.1$ とテーパーの勾配が大きくなるにつれて要素分割数の影響が大きくなるが、いずれも高さ方向分割数が128(全要素数131072)以上であればほぼ収束しているのが分かる。解が収束する傾向として、テーパー勾配の小さい $a/b = 0.9$ (図-6(a))の梁では、要素数の増加につれて3モデルとも一定値に収束するのに対し、勾配が大きい梁(図-6(b), (c))では、上または下の一方のみにテーパーを有

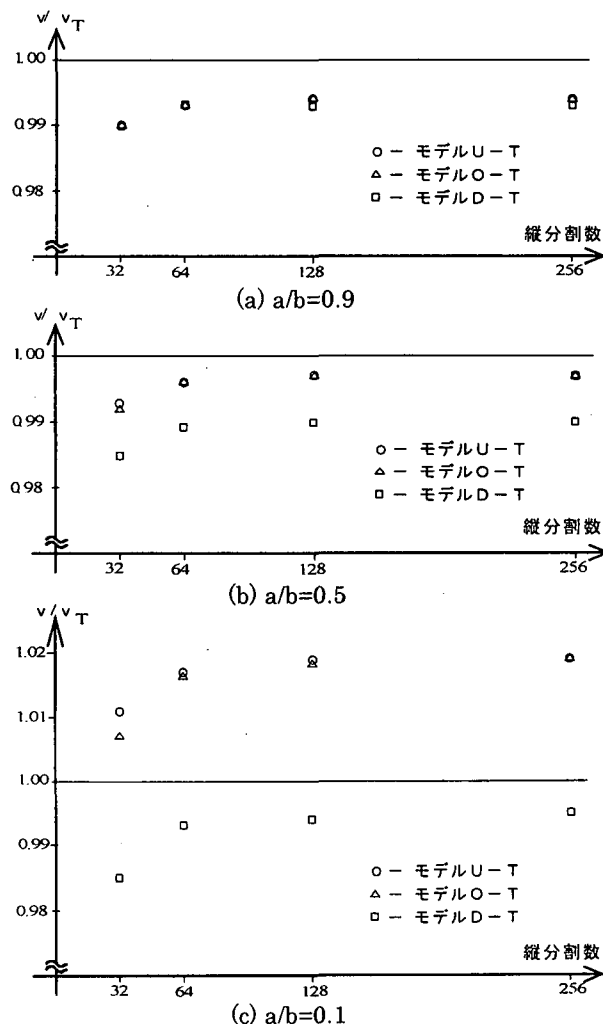
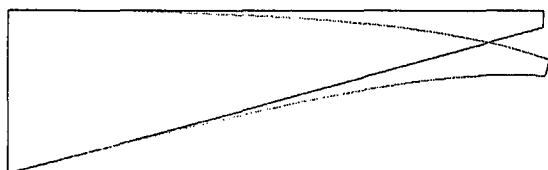


図-6 自由端たわみと分割数の関係



(a) 提案法による変形図



(b) MARC による変形図とせん断応力分布図

図-7 U-T モデルの変形図($a/b=0.1$)

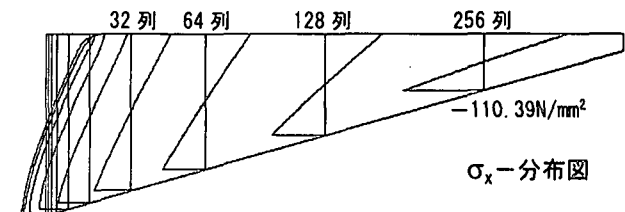
表-2 自由端たわみ(mm)

モデル	解析法	自由端高さ(a)		
		0.1m	0.5m	0.9m
U-T	理論値	10.8288	4.3560	2.9003
	提案法	11.0352	4.3467	2.8820
O-T	MARC	11.0268	4.3461	2.8817
	提案法	11.0345	4.3466	2.8820
D-T	MARC	11.0268	4.3461	2.8817
	提案法	10.7727	4.3154	2.8812
分割数		提案法: 高さ 256 × 軸 1024	MARC: 高さ 64 × 軸 256	

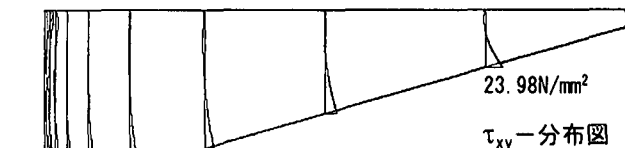
するモデルと上下にテーパを持つモデルとでは収束状況に多少差があることが分かった。また、テーパ勾配が大きい $a/b=0.1$ で、片方のみにテーパを持つモデルでは理論値より上で収束した。これは、図-7 に示す変形図に見られるように、先端部が極端に細く、その部分で急激なたわみが生じた結果である。表-2 には、高さ方向分割数 256 の場合の自由端たわみ値を示す。なお、比較に用いた MARC では、高さ 64 × 軸 256 が解析可能な最大分割数であったのでこの時の値を使用した。誤差は、モデル U-T ($a/b=0.1$) で 1.9%，モデル D-T ($a/b=0.5$) で 1%，他は全て 1%未満と僅少である。

図-8 は、テーパ勾配 $a/b=0.1$ について高さ方向分割 128、軸方向分割 512 の場合の垂直応力(σ_x)とせん断応力(τ_{xy})の分布状況を表したものである。図は、上側に垂直応力、下側にせん断応力を示し、固定端(左辺)から 1 列目要素、2 列目要素、4 列目要素、…と 2 の累乗列目要素を 256 列目まで 9 列の要素について表示した。結果より、垂直応力については、いずれも固定端の近傍ではテーパによってかなり影響を受けるが、固定端から離れるにつれていわゆる三角形分布となり、テーパの勾配にかかわらず似たような分布となった。一方、せん断応力分布については、Timoshenko⁹⁾等が述べているように固定端の近傍では上下端に大きな値を持つ放物線分布となった。均等断面梁では、固定端から離れた断面においては自由境界すなわち、梁の上下端で 0、中央部で最

大となる放物線分布となるが、テーパがある場合はテーパ部に最大値を持つ放物線分布となった。固定端近傍での分布状況を明確にするために、モデル U-T と D-T について $a/b=0.5$ とした時のせん断応力を拡大表示した分布図を図-10 に示す。固定端部近傍でのせん断応力分布の特異性がよく見て取れる。なお、モデル O-T の分布は、図(a)モデル U-T と上下逆の分布となりテ



σ_x -分布図



τ_{xy} -分布図

(a) モデル U-T

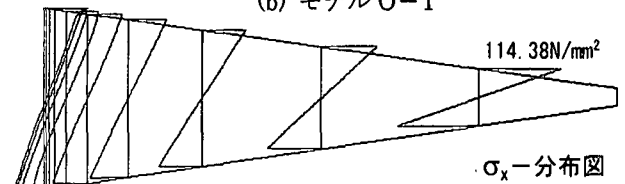


σ_x -分布図

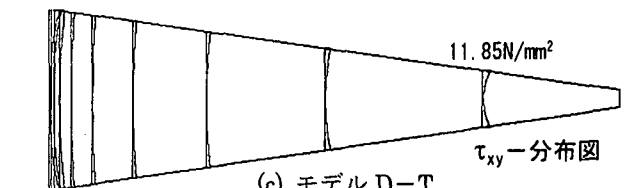


τ_{xy} -分布図

(b) モデル O-T



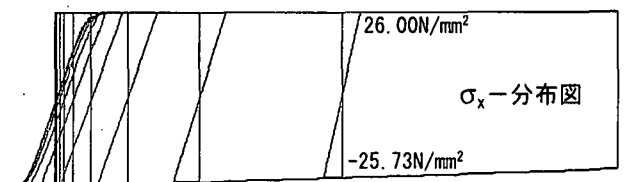
σ_x -分布図



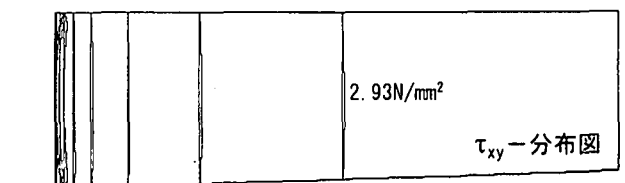
τ_{xy} -分布図

(c) モデル D-T

図-8 応力分布図($a/b=0.1$)



σ_x -分布図



τ_{xy} -分布図

図-9 モデル U-T の応力分布($a/b=0.9$)

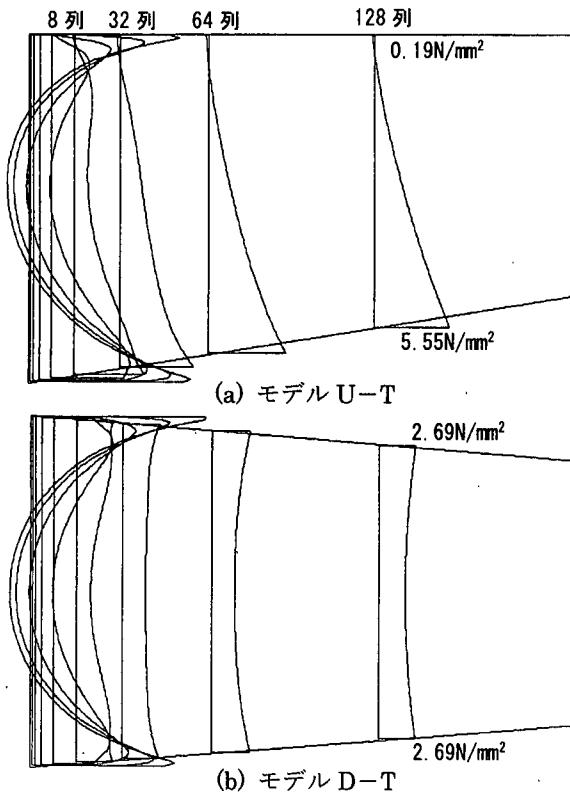


図-10 せん断応力分布の拡大図(a/b=0.5)

ーパ側に最大応力が生じる。また、図(b)よりモデル D-T の応力は、モデル O-T とモデル U-T の応力を平均したような分布図となっている様子が見られる。

3.2 異なるテーパを持つ梁からなる構造物の解析

サブストラクチャーの一例として、図-11 に示すようなテーパ勾配が異なる複数の部材からなる構造物の解析を行った。構造物は、3 つの梁 (I, II, III) よりなり、ここでは、これをモデル M-T と呼ぶ。荷重は中央

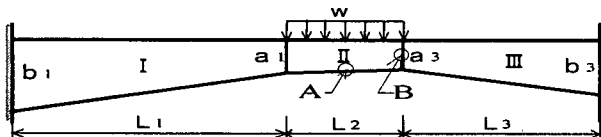


図-11 モデル M-T

表-3 解析モデル M-T の諸元

諸元	数値
等分布荷重 (w)	20.0kN/m
I 部左端 (b ₁)	1.0m
I 部右端 (a ₁)	0.5m
I 部スパン (L ₁)	4.0m
III 部左端 (a ₃)	0.45m
III 部右端 (b ₃)	0.8m
III 部スパン (L ₃)	2.5m
II 部スパン (L ₂)	1.0m
厚さ (t)	0.01m
ポアソン比 (ν)	0.3
ヤング係数 (E)	200.0 GPa

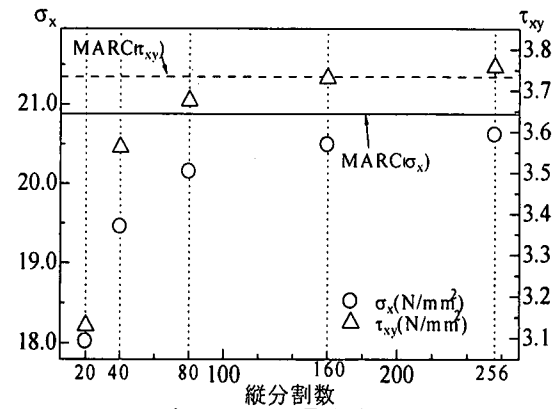


表-4 縦分割数と応力値との関係

高さ分割数	系全体の分割数			応力値 (N/mm²)	
	I 部	II 部	III 部	σ _x (A)	τ _{xy} (B)
MARC	20480	2560	10240	20.880	3.7331
20	5120	640	2560	18.020	3.1309
40	20480	5120	10240	19.452	3.5622
80	81920	20480	40960	20.151	3.6754
160	327680	81920	163840	20.492	3.7304
256	1048576	262114	524288	20.618	3.7575

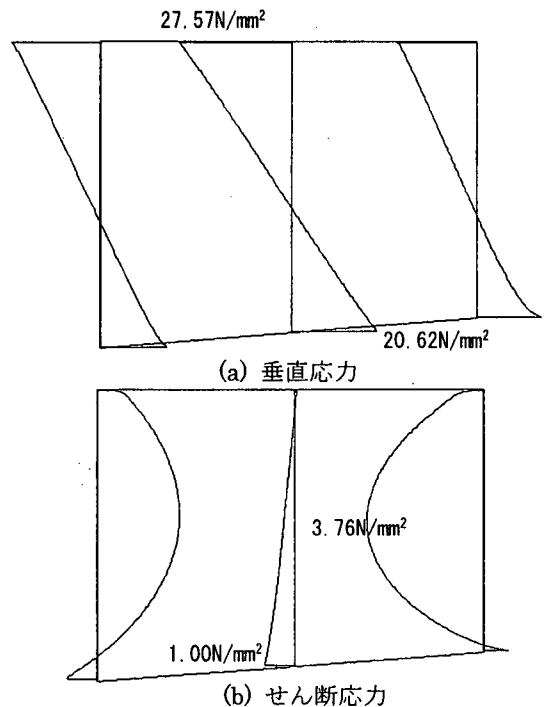


図-13 応力分布 (II 部)

部 (II 部) に等分布で鉛直方向に作用させ、境界は両端固定とした。解析モデルの諸元を表-3 に示す。

解析は、各部で消去・縮合を行い、左右境界に縮合、境界で結合して境界の変位を求め、後退代入で系の全変位を算定、応力を計算した。また、比較のために汎用計算機 MARC の解析結果も示している。高さ方向分割数を 20~256 に変化させた場合について、高さ方向分割数と垂直応力およびせん断応力との関係を図-12 に示す。

図で、A点の垂直応力 σ_x は、荷重の影響のないⅡ部スパン中央で梁下端(図-11A点)の応力であり、B点のせん断応力 τ_{xy} は、Ⅱ部右端の最大応力(図-11B点)の応力である。図より垂直応力、せん断応力とも縦分割数256でMARCの結果に対応しているのが分かる。次に、高さ方向分割数と各パートの要素数、両応力値の関係を表-4に示す。応力値が安定する軸方向が256分割では、180万要素以上とかなりの分割数が必要である。従って、さらに大規模な問題の場合は並列コンピュータの使用が考えられる。また、中央Ⅱ部の両境界と中央列についての応力分布を図-13に示す。中央Ⅱ部のテーパ勾配は小さいが、垂直応力、せん断応力ともやはりテーパの影響が見られる。

3.3 一部付加剛性を持つ梁の解析

非相似系の例として、図-14に示すように3.1節で用いたモデルU-Tの固定端部の上下に要素を付加した片持ち梁(モデルU-TM)について解析を行った。付加前の梁部分のモデル諸元は表-1と同様とし、自由端の高

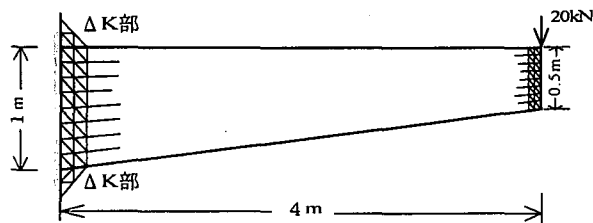


図-14 付加剛性を持つ片持ち梁の解析(U-TM)

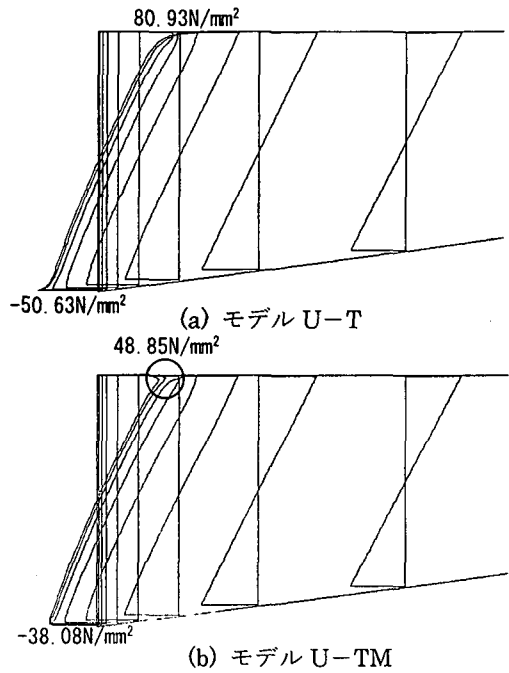


図-15 垂直応力の応力分布拡大表示図

さは0.5mとした。付加要素は、上下各4要素、計8要素とし、その高さは左2列の長さ(21.63mm)とした。高さ方向分割数128の場合のモデルU-TMとモデルU-Tについて、拡大した垂直応力、せん断応力の分布図を図-15に示す。図-15(a)、(b)より、付加剛性付モデル

U-TMの垂直応力の最大値は、梁上下で極端に応力がかかるモデルU-Tに比べ応力が緩和され、図(b)の円で示した部分に生じ、付加剛性がないモデルU-Tの約6割となっている。また、付加剛性と結合している第2列目までは、応力緩和が見られるが、第3列目はやはり大きな応力となっている。一方、図には示していないがせん断応力に関しては、垂直応力ほど極端な変化は見られず、モデルU-TMの方が付加剛性との境界で大きな応力を生じ、逆に大きくなった。これは、剛性付加部分と梁部の両境界部で応力集中が生じた結果であると考えられる。なお、自由端での両者の平均たわみは、モデルU-TMで $v_{CM}=4.343\text{mm}$ 、モデルU-Tで $v_C=4.366\text{mm}$ とその誤差は0.06%であり、ほとんど影響がなく、MARCの結果とも一致した。

3.4 降伏により一部剛性が変化する梁の解析

修正系への適用例として、図-5(a)に示すモデルU-Tについて、荷重の増大とともに要素が降伏し、剛性が次々と変化した場合について、荷重Pの増加に伴う降伏の進展及び変位状況を追跡したものである。モデル諸元を表-1に示し、自由端の高さは0.5mとした。なお、要素分割はMARCによる検討を考え縦20分割とした。要素の降伏判定は、2次元問題におけるvon Misesの降伏条件式である次式、

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \quad \dots (41)$$

を用い、 $\sigma_v=240\text{MPa}$ で降伏するものとした。降伏した要素の剛性は、降伏後それ以上の耐力は負担しないものとして、初期剛性の1/10倍と仮定した。図-16に、MARCによる解析によって得られた荷重-たわみ曲線と提案法で得られた結果(図上の○)をプロットしている。一部降伏程度が一部修正系への適用に対応することより、提案法はMARCの結果とよく対応していることがわかる。図-17は、提案法とMARCで解析した降伏開始時の結果を示したもので、MARCでの分割要素は四角形要素を用い軸方向20分割、高さ方向60分割とした。図-17の(a)の本法結果では、MARCの塑性開始時と対応して降伏要素40個まで求めている。

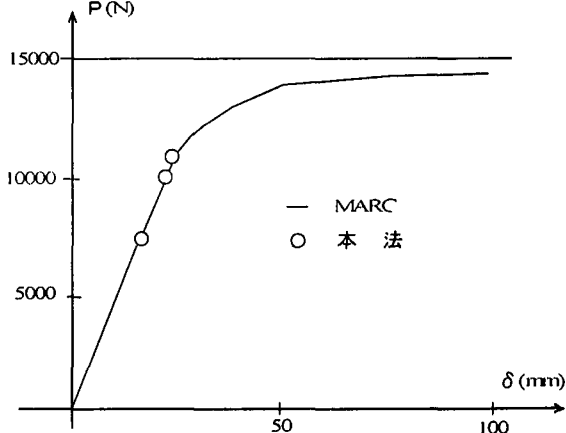


図-16 荷重(P)-たわみ曲線(δ)

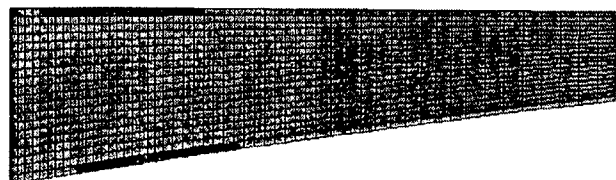
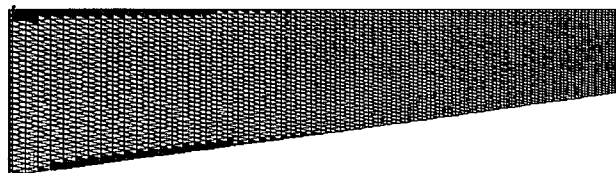


図-17 降伏状況図(図中マーク部：降伏要素)

図(b)の MARC の結果と比較しても、両者はかなりよい対応を示していることがわかる。

3.5 テーパーを有する 1 次元梁の解析

相似系棒要素の解析について検討するために、図-5(a)のU-Tモデルを用いて図-18に示すような棒要素に分割して解析を行った。モデル諸元は、表-1と同様とした。解析は、自由端と固定端の寸法比($\eta = a/b$)を $\eta = 0.01, 0.02, 0.05, 0.1, 0.5$ と変化させた5ケースについて行い、分割数の増加につれて自由端たわみの正解への収束状況を調べた。なお、比較のために等分割要素を用いたモデルについても同様に解析を行った。計算結果を表-5に示す。構造力学で求めた、曲げモーメン

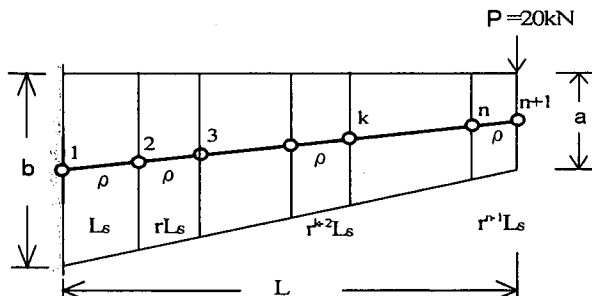


図-18 1次元解析モデル

表-5 分割数とたわみ(mm)

η	0.01	0.02	0.05	0.10	0.50
理論解	24.736	20.007	14.283	10.510	4.1870
要素数 : 32	24.776 26.675	20.036 20.757	14.300 14.420	10.521 10.512	4.1888 4.1887
要素数 : 64	24.746 25.475	20.014 20.215	14.287 14.316	10.512 10.518	4.1874 4.1874
要素数 : 128	24.738 24.941	20.008 20.058	14.284 14.291	10.510 10.512	4.1871 4.1871
要素数 : 256	24.736 24.786	20.007 20.019	14.283 14.285	10.510 10.510	4.1870 4.1870
要素数 : 512	24.736 24.748	20.007 20.010	14.283 14.283	— —	— —

(上段：相似系、下段：等分割系)

トによるたわみを理論解とした．解析結果より相似比に応じた長さで要素分割した相似系のたわみは，要素数が128 もあればテーパー勾配の大小に関わらず理論解によく合致し，提案法の妥当性が確かめられた．一方，同じ長さで分割した等分割系では，テーパー勾配が小さい場合は問題ないが，大きくなると収束が悪くなり，相似系の2~4 倍の分割数を必要とすることがわかった．

なお、応力に関しては、要素剛性マトリックスとして、曲げのみ考慮した棒要素を使用したので、要素数 32 で片持ち梁の曲げ応力、せん断応力と完全に一致した。

4. 結 論

相似形メッシュ法を用いてテーパーを持つ梁問題の解析を行い、その変位や応力分布状況について検討した。複数のテーパーを持つ梁からなる構造物の解析、また、要素剛性の変化や付加剛性によって、相似系が壊れ非相似系となっても、更にたわみとたわみ角という異なる次元の成分を持つ棒要素でも、基本マトリックスと修正部のみの取扱で解析できる式の誘導を行い、数値計算で確かめた。以下に得られた結論をまとめて示す。

- 1) テーパーを持つ片持ち梁では、テーパーの勾配にかかわらず軸方向の要素分割数が 128 あれば、精度良く変位、応力とも求められる。
- 2) テーパーを持つ梁のせん断応力は、テーパー勾配の影響に大きく左右され通常と異なる分布となる。
- 3) 複数のテーパーを持つ集合梁に集中荷重のみならず分布荷重が作用しても、相似形メッシュ法が便利に適用できる。
- 4) 要素剛性の変化や付加剛性系についても、その影響範囲が局所的であれば本法を適用することで簡単に解析できる。

参考文献

- 1)土木学会編：構造工学シリーズ，構造工学における計算力学の基礎と応用，p370～371，1996．
- 2)鷺津久一郎，宮本博，山田嘉昭，山本善之，川本忠彦：有限要素法ハンドブックⅠ基礎編，P77～83，1981．
- 3)I. Hirai, Y. Uchiyama, Y. Mizuta and D. Pilkey：An Exact Zooming Method, Finite Elements in Analysis and Design 1, P61～69, 1985.
- 4)内山義博・水田洋司・平井一男：FEM 修正ズーム法による計算効率化について，土木構造・材料論文集，第11号，P121～126，1995．
- 5)Richard B. , Michael B. , Tony F. Chan, James D. , June D. , Jack D. , Victor E. , Roldan P. , Charles P. and Henk von der Vorst(長谷川里美，長谷川秀彦，藤野 清次共訳)：反復法 Templates, 朝倉書店，1996．
- 6)内山義博，山尾敏孝，片山拓朗，平井一男：相似形メッシュを用いた梁解析の一手法，応用力学論文集，

- P211~218, 2001.
- 7)MARC K7 : Users Manual Vol. A・E, 1997.
- 8)崎元達郎 : 構造力学[下], 森北出版, 1998.
- 9)S. P. Timoshenko and L. N. Goodier : Theory of Elasticity, McGraw-Hill Book Company, P56~59, 1970.
- 10)横山正明 : 高精度計算力学, 朝倉書店, 1998.
- (2002 年 4 月 19 日受付)