

非圧縮性流体に対するコロケート格子を用いた 陰的計算手法に関する考察

Implicit Computational Method for Incompressible Flows
with Collocated Grid System

牛島 省*・竹村 雅樹**・瀬津 家久***

Satoru USHIJIMA, Masaki TAKEMURA and Iehisa NEZU

*正会員 工博 京都大学大学院助教授 環境地球工学専攻 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

**学生員 京都大学大学院 環境地球工学専攻 修士課程 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

***フェロー会員 工博 京都大学大学院教授 環境地球工学専攻 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

An implicit numerical algorithm (C-ISMAC method), which is based on an implicit-SMAC method in the staggered grid, has been proposed for incompressible flows with the collocated grid system. It has been shown that a CBP (Cell-Boundary Pressure) scheme, which utilizes p^n on cell boundaries in the prediction stage of the MAC method, is effective to deal with the pressure field. Taking account of this result, some distinctive treatments for the pressure variable were employed in developing the C-ISMAC method. As a result of the computations, it was shown that the C-ISMAC method enables us to use higher-order schemes for spatial discretization as well as to decrease the necessary computational time.

Key Words : *collocated grid, incompressible flow, implicit method, C-ISMAC method, QSI scheme, high-speed computation*

1. はじめに

有限差分法に基づく非圧縮性流れの計算では、初期のスタガード格子に代わり、流速成分と圧力がセル中心上で共通に定義されるコロケート格子配置の有用性が示されつつある^{1),2)}。コロケート格子配置は最初に Rhie and Chow³⁾により提案され、SIMPLE 系の解法^{4),5)}が適用された。これに対して、近年の流体解析、例えばチャンネル内乱流のシミュレーション^{1),2)}や内部流動が支配的となる自由水面流れ^{6),7)}などでは、精度の高いスキームが不可欠であるため、高次精度スキームの取り扱いが比較的容易な MAC 法⁸⁾あるいはその改良型の解法^{9),10)}である、いわゆる MAC 系の解法を利用するのが一般的となっている。

しかし、MAC 系の解法では、流速の予測段階が陽的に扱われるので、計算を安定に進めるために、CFL 条件や拡散数をパラメータとする制約が生じ、通常時間刻み Δt を小さく取った長時間の計算が必要となる。これに対して、SIMPLE 系の解法では、それらに対する制限が緩くなるため、計算時間を短縮化できることが多いが、高次精度の計算スキームに基づく離散化式の取扱いが極めて煩雑となる場合が多く、スキームによってはその導出が不可能な場合もある。

これらを考慮すると、コロケート格子上で高速計算が可能な陰的解法のアルゴリズムを利用し、しかも高次精度のスキームの扱いが容易な流体計算法の提案が望まれる。スタガード格子においては、MAC 系解法の予測段階における流速の推定値の残差成分のみに陰的な解法を適用する Implicit SMAC 法^{11),12)}が提案されている。この手法では陰解法の利点が生かされると同時に、高次精度のスキームを陽的に扱えるので、上記の条件に合う流体計算法の一つであると考えられる。しかし、同手法をコロケート格子で用いる場合には、いくつかの工夫が必要となる。

本研究ではまず、コロケート格子では、MAC 系解法の予測段階において、セル中心で圧力勾配を考慮するスキームは適切でなく、圧力はセル境界で考慮することが必要であることを示す。このように、セル中心で圧力勾配を用いない条件では、定常解において流速の推定値の残差成分が 0 に収束するというスタガード格子に見られる特性を利用できないため、Implicit SMAC 法は利用できない。この問題を解決するため、本研究では圧力の取り扱いに考察を加えた手法である、C-ISMAC 法を提案する。C-ISMAC 法をキャビティフローへ適用し、MAC 系解法との比較を通じて、計算時間および解析結果に対して検討を加える。

2. コロケート格子によるMAC系解法

MAC系の解法の手順は、予測段階、圧力計算段階、そして修正段階の3つに区分することができる。コロケート格子配置を用いる場合には、セル中心とセル境界における空間内挿が行われるため、各段階において、計算スキームの構成にいくつかの自由度がある。ここでは、MAC系解法の予測段階と圧力計算段階における圧力の取り扱いに関する考察を加える。

2.1 予測段階における p^n の扱い

MAC系解法においては、予測段階において陽的に流速の推定値が求められる。コロケート格子を利用する場合には、通常セル中心において推定値が計算されるが、圧力の扱いに関して次の3種類の方法が考えられる。1) セル中心の流速の推定値を求める際に、 n ステップの圧力 p^n を用いる方法^{13), 14), 15)}。この方法を以下ではCCP(Cell Center Pressure)スキームと表記する。2) セル中心では p^n を使用せず、流速の推定値をセル境界に空間内挿した後に p^n を用いる方法^{3), 6)}。この方法をCBP(Cell Boundary Pressure)スキームと表す。3) スタガード格子のFractional Step法と同様に、予測段階では圧力を全く考慮しない方法^{16), 17), 18)}。これをFSC(Fractional Step in Collocated grid)スキームとする。ただし、FSCスキームでは自由液面流れの計算等において、流体質量の保存性に関する精度を十分高く保つことが容易ではないと考えられるので⁶⁾、ここではCCPおよびCBPスキームを考察の対象とする。

両スキームの本質的な特徴を把握するため、図1に示す1次元場の等間隔コロケート格子での離散化を考える。

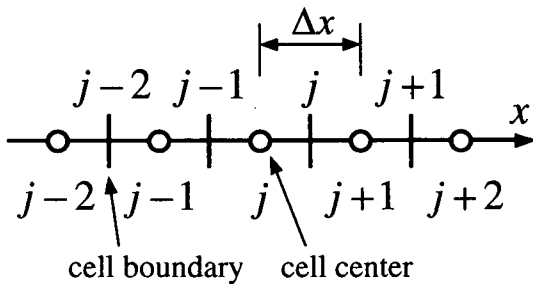


図-1 1次元場におけるコロケート格子配置

MAC系の解法で利用される、時間方向にのみ離散化した1次元の連続式と運動方程式は次のように表される。

$$\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$u^{n+1} = u^n - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x} + CD^n \Delta t \quad (2)$$

ここに、 Δt は1ステップの時間増分、 ρ は流体の密度である。式(2)の CD は移流項と拡散項、そして外力項を含む項であり、コロケート格子配置では通常セル中心で評価される。式(2)では、簡単のため CD にはEuler陽解法を用いた。

CCPスキームでは、式(2)の圧力に p^n を用いて、流速の推定値 u^* を次式から求める。

$$u^* = u^n - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial x} + CD^n \Delta t \quad (3)$$

セル中心を基準として式(3)の空間的な離散化を行うと次式が得られる。

$$u_{c,j}^* = u_{c,j}^n - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{p_{j+1}^n - p_{j-1}^n}{2\Delta x} + CD_j^n \Delta t \quad (4)$$

ここで、下添字の c は、セル中心で定義された変数であることを示す。なお、 p および CD は常にセル中心で定義されるので、下添字の c を略している。コロケート格子配置に基づく流体計算では、式(4)で得られた $u_{c,j}^*$ をセル境界へ空間内挿して、これを次の圧力計算段階で用いる。等間隔格子であるので、空間内挿として単純平均を用いる。実際に代入計算を行って、セル境界へ空間内挿された離散化式を求めると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} u_{b,j}^* &= \frac{u_{c,j+1}^* + u_{c,j}^*}{2} \\ &= \frac{u_{c,j+1}^n + u_{c,j}^n}{2} + \frac{CD_{j+1}^n + CD_j^n}{2} \Delta t \\ &\quad - \frac{\Delta t}{2\rho} \left(\frac{p_{j+2}^n - p_j^n + p_{j+1}^n - p_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

下添字 b は、セル境界で定義された変数であることを示す。式(5)の $u_{b,j}^*$ が、CCPスキームで得られる流速の推定値である。

次に、CBPスキームでは、式(3)の代りに次式を用いる。

$$u^* = u^n + CD^n \Delta t \quad (6)$$

これに対して、 $\hat{u}$ を次のように定義する。

$$\hat{u} = u^* - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial x} \quad (7)$$

CBPスキームでは、式(6)をセル中心、式(7)をセル境界で離散化する。同様に代入計算を行うと、式(7)の離散化式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \hat{u}_{b,j} &= \frac{u_{c,j+1}^n + u_{c,j}^n}{2} + \frac{CD_{j+1}^n + CD_j^n}{2} \Delta t \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{p_{j+1}^n - p_j^n}{\Delta x} \end{aligned} \quad (8)$$

式 (8) の $\hat{u}_{b,j}$ が, CBP スキームにおける流速の推定値に相当する. 式 (5) と式 (8) で示されるセル境界における流速の推定値を比較すると, CBP スキームでは近接する圧力からその勾配が評価されており, CCP スキームよりもコンパクトな構成となっている. このため, CBP スキームの方が, 圧力勾配を適切に評価できると推察される.

2.2 圧力計算段階における p^n の扱い

圧力計算段階では, 予測段階で得られたセル境界上の流速の推定値 $u_{b,j}^*$ あるいは $\hat{u}_{b,j}$ と連続式から導かれる $\phi (= p^{n+1} - p^n)$ に関する連立方程式を解く. 予測段階における p^n の扱いの相違により, 圧力計算段階における基礎式が異なる.

CCP スキームでは, まず式 (2) と (3) から次式を導く.

$$u^{n+1} = u^* - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (9)$$

ここで, ϕ は圧力と同様にセル中心で定義される. 式 (9) はセル境界を基準として次のように離散化される.

$$u_{b,j}^{n+1} = u_{b,j}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\phi_{j+1} - \phi_j}{\Delta x} \quad (10)$$

式 (1) の連続式をセル境界流速を用いて離散化する.

$$\frac{u_{b,j}^{n+1} - u_{b,j-1}^{n+1}}{\Delta x} = 0 \quad (11)$$

式 (10) を式 (11) へ代入すると, 次式が得られる.

$$\begin{aligned} & \frac{\phi_{j+1} - 2\phi_j + \phi_{j-1}}{\Delta x^2} \\ &= \frac{\rho}{\Delta t} \frac{u_{c,j+1}^n - u_{c,j-1}^n}{2\Delta x} + \rho \frac{CD_{j+1}^n - CD_{j-1}^n}{2\Delta x} \\ & \quad - \frac{p_{j+2}^n - 2p_j^n + p_{j-2}^n}{4\Delta x^2} \end{aligned} \quad (12)$$

式 (12) が CCP スキームを用いた場合の ϕ の連立 1 次方程式であり, これを適当な解法で解くことにより, 圧力計算段階における解を得る.

次に, CBP スキームでは, 式 (2) と式 (6) から次式が得られる.

$$u^{n+1} = u^* - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x} \quad (13)$$

さらに, 式 (7) と式 (13) から次式が得られる.

$$u^{n+1} = \hat{u} - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (14)$$

式 (13) をセル境界で離散化する.

$$u_{b,j}^{n+1} = \hat{u}_{b,j} - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\phi_{j+1} - \phi_j}{\Delta x} \quad (15)$$

式 (15) を式 (11) へ代入すると, 次式が導かれる.

$$\begin{aligned} & \frac{\phi_{j+1} - 2\phi_j + \phi_{j-1}}{\Delta x^2} \\ &= \frac{\rho}{\Delta t} \frac{u_{c,j+1}^n - u_{c,j-1}^n}{2\Delta x} + \rho \frac{CD_{j+1}^n - CD_{j-1}^n}{2\Delta x} \\ & \quad - \frac{p_{j+1}^n - 2p_j^n + p_{j-1}^n}{\Delta x^2} \end{aligned} \quad (16)$$

式 (16) が CBP スキームの圧力計算段階の基礎式に相当する. 式 (12) と式 (16) の右辺第 3 項を比較すると, p^n の 2 階微分の離散化式として, CBP スキームではセル幅 Δx の中央差分が用いられているが, CCP スキームではセル幅 $2\Delta x$ の中央差分が使用されていることがわかる.

2.3 CBP および CCP スキームの適用性

上記の考察で明らかになったように, CCP スキームでは圧力 p^n の 2 階微分値がセル幅 $2\Delta x$ の中央差分で評価されている. このため, CCP スキームでは図 1 の格子配置で表現できる最小波長 $2\Delta x$ 圧力振動あるいは自由水面流れにおける水面振動が生じたときに, これを正しく検出できない可能性がある. 図 2 は, 水深を h として, このときの水面振動と格子配置を模式的に示したものである.

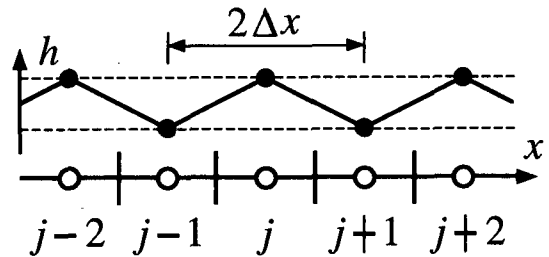


図-2 波長 $2\Delta x$ の水面振動と格子配置

この問題点を確認するため, 波長 $2\Delta x$ の水面変動を初期値として与えた場合の計算を行った. 計算にはコロケート格子配置を用いる既報⁷⁾の計算手法を利用した. 計算セル数は 15×15 とし, Δt は 0.01 とした. また, 動粘性係数を 0.01 とすることにより, 流体の粘性によって初期の水面変動が徐々に減衰する条件とした. 図 3 に初期状態 ($t = 0.0$) の水面形状と, $t = 5.0$ における計算結果を示す. 同図中では, プロット点は $\Delta x/2$ ごとに付されている. 図 3 に示すように, CBP スキームによる計算では, 初期条件により引き起こされた水面変動は減衰して, $t = 5.0$ ではほぼ水平な水面形状となる. 一方, CCP スキームによる計算結果では, 図 3 に示されるように, $t = 5.0$ では水面変動が増幅してしまう不自然な結果となった. このように, CCP スキー

ムでは波長 $2\Delta x$ の水面振動や圧力変動を適切に扱えない場合があることが示された。

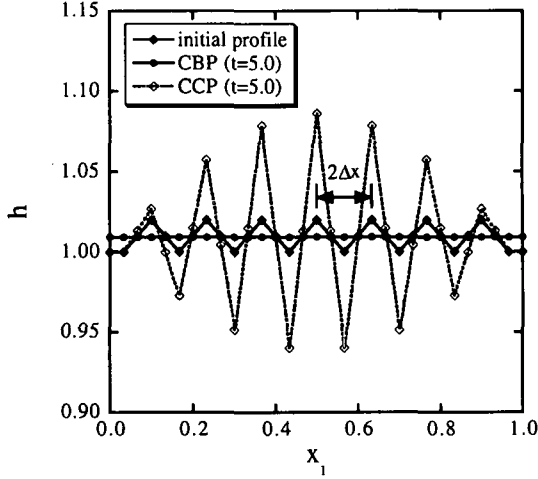


図-3 水面形の比較

3. C-ISMAC 法の概要

Ikohagi & Shin¹¹⁾はスタガード格子配置に基づき、SMAC 法の予測段階における流速の推定値を陰的に計算する Implicit SMAC 法を提案した。スタガード格子では、流速が定義される格子点上において、圧力項を含む運動方程式の全ての項が離散化表示される。このため、計算結果が定常解に漸近するに従い、流速の推定値に対する残差成分が 0 に収束する。Implicit SMAC 法はこれを利用して、陰的解法が用いられる残差成分には 1 次風上差分などの低次のスキームを適用し、陽的に計算が可能な成分には高次精度スキームを利用する手法である。

一方、コロケート格子配置を用いる場合には、圧力勾配をセル中心で評価するスキームよりも、これをセル境界で扱う CBP スキームが適切であることが以上の考察により示されている。CBP スキームでは、スタガード格子の場合と異なり、セル中心における流速の推定値には圧力勾配が含まれていないため、残差成分が 0 に漸近しない。以下ではこの問題を解決するための工夫を行った陰的解法を collocated grid の頭文字を用いて、C-ISMAC 法と表記し、その具体的な計算手順を示す。

基本変数を直交座標系 x_i の流速成分とする場合、自由水面を持たない閉領域内の Navier-Stokes 式と連続式は一般座標系 ξ_m 上でそれぞれ以下のように表される。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_i}{\partial t} + U_m \frac{\partial u_i}{\partial \xi_m} \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \quad (17) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial (JU_m)}{\partial \xi_m} = 0 \quad (18)$$

ここに、 U_m は流速の反変成分であり、 ν は動粘性係数、 J は変換のヤコビアンである。

式 (17) の移流項と拡散項に梯形則を用いて時間方向に離散化すると次のように表される。

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \\ &\quad - \alpha U_m^n \frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial \xi_m} \Delta t - (1 - \alpha) U_m^n \frac{\partial u_i^n}{\partial \xi_m} \Delta t \\ &\quad + \beta \nu \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \Delta t \\ &\quad + (1 - \beta) \nu \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\frac{\partial u_i^n}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \Delta t \quad (19) \end{aligned}$$

本研究では、Ikohagi & Shin¹¹⁾と異なり、式 (19) に示されるように、移流項と拡散項の時間差分を独立に扱えるように、 $n+1$ ステップにおける各項には、それぞれ α と β を乗じている。

式 (19) を利用して流速の推定値 u_i^* を求める。CBP スキームでは、セル中心において圧力項を除く次式から u_i^* が計算される。

$$\begin{aligned} u_i^* &= u_i^n - \alpha U_m^n \frac{\partial u_i^*}{\partial \xi_m} \Delta t - (1 - \alpha) U_m^n \frac{\partial u_i^n}{\partial \xi_m} \Delta t \\ &\quad + \beta \nu \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \Delta t \\ &\quad + (1 - \beta) \nu \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\frac{\partial u_i^n}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \Delta t \quad (20) \end{aligned}$$

ここで、流速の推定値を次式のように残差成分 $\tilde{u}_i$ を用いて表示する。

$$u_i^* = u_i^n + \tilde{u}_i \quad (21)$$

スタガード格子を用いる場合には、流速の推定値に圧力項が考慮されているので、定常解では $\tilde{u}_i$ は 0 へ収束する。しかし、式 (20) では、圧力項が含まれていないため、残差成分が 0 へ漸近しない。このため、C-ISMAC 法では、セル中心における推定値の算出に一時的に圧力勾配を考慮して、その離散化式から残差成分 $\tilde{u}_i$ に対する連立方程式を導く。そして、計算により得られた $\tilde{u}_i$ を用いてセル中心の流速の推定値を求め、これより圧力勾配を差し引く。その結果得られるセル中心での流速の推定値は、CBP スキームにおける推定値と同様に扱うことができ、セル境界へ空間内挿した後に圧力勾配を再び考慮すればよい。以下に具体的な計算手順を示す。まず、流速の推定値に対して次式のように圧

力勾配を考慮する。

$$\begin{aligned}
u_i^* &= u_i^n - \alpha U_m^n \frac{\partial u_i^*}{\partial \xi_m} \Delta t - (1 - \alpha) U_m^n \frac{\partial u_i^n}{\partial \xi_m} \Delta t \\
&+ \beta \nu \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \Delta t \\
&+ (1 - \beta) \nu \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\frac{\partial u_i^n}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \Delta t \\
&- \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \quad (22)
\end{aligned}$$

式 (22) に式 (21) を代入して整理すると次式が導かれる。

$$\begin{aligned}
[1 + D(\alpha, \beta)] \tilde{u}_i &= -D(1, 1) u_i^n - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \quad (23)
\end{aligned}$$

ここに、 $D(\alpha, \beta)$ は次式で定義される微分演算子である。

$$\begin{aligned}
D(\alpha, \beta) &= \alpha \Delta t U_m^n \frac{\partial}{\partial \xi_m} \\
&- \beta \Delta t \nu \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \quad (24)
\end{aligned}$$

式 (22) には圧力項が含まれるので、定常解では 残差成分 $\tilde{u}_i$ は十分小さい値となる。このため、式 (23) 左辺に含まれる移流項と拡散項に対する空間的な離散化には低次のスキームを利用し、右辺の対応する項には高次精度のスキームを適用する。左辺の移流項に 1 次風上差分、拡散項に中央差分を利用する場合には、式 (23) は次のような $\tilde{u}_i$ の連立 1 次方程式に帰着する。

$$\begin{aligned}
\sum_{p,q=-1,0,1} a_{j+p,k+q} \tilde{u}_{i,j+p,k+q} \\
= -U_{m,j,k}^n C_{im1,j,k}^n + DF_{i,j,k}^n \quad (25)
\end{aligned}$$

ここで、 (j, k) は 2 次元場における格子点を示し、 $a_{j+p,k+q}$ は n ステップの流速と座標変換に関するテンソル量から得られる係数である。本研究では、式 (23) 右辺の移流項には 5 次精度の QSI スキーム¹⁷⁾を用いており、 $C_{im1,j,k}^n$ は、写像空間中において、格子点 (j, k) に対して ξ_m 方向に並ぶ 6 個の格子点上の u_i^n を 5 次スプライン関数で表現したときの 1 次の項の係数である。また、式 (25) 右辺の $DF_{i,j,k}^n$ は拡散項であり、ここでは左辺と同様の中央差分を用いた。上記のように、C-ISMAC 法では、高次精度スキームを適用した項を陰的に扱わないで済むので、SIMPLE 系の解法と比較して離散化式の導出が容易である。特に、QSI スキームの場合などのように、陰的な表現自体が困難なスキームにおいては Implicit SMAC 法は極めて有効である。

式 (25) は、適当な行列解法を適用して解くことができ、得られた $\tilde{u}_i$ を式 (21) に用いて、セル中心におけ

る流速の推定値 u_i^* が求められる。次に、C-ISMAC 法では、以下のように u_i^* から圧力項を取り除く。

$$\hat{u}_i^* = u_i^* + \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \quad (26)$$

この操作により、 $\hat{u}_i^*$ は CBP スキームで利用されるものと同等の圧力を含まない流速の推定値となる。

得られた $\hat{u}_i^*$ をセル境界へ空間内挿し、そこで再び圧力を考慮した推定値を求める。反変成分で表示すると次式が得られる。

$$\hat{U}_{b,m} = U_{b,m}^* - \frac{\Delta t}{\rho} g^{mj} \frac{\partial p^n}{\partial \xi_j} \quad (27)$$

ここに、 $\hat{U}_{b,m}$ はセル境界における流速の推定値の反変成分、 $U_{b,m}^*$ は $\hat{u}_i^*$ をセル境界に空間内挿した値の反変成分であり、 g^{mj} は基本テンソルの反変成分である。これに対して、 $n+1$ ステップで成り立つべき式は次のように与えられる。

$$U_{b,m}^{n+1} = U_{b,m}^* - \frac{\Delta t}{\rho} g^{mj} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial \xi_j} \quad (28)$$

ここで、 $U_{b,m}^{n+1}$ に対して次の連続式が成り立つとする⁸⁾。

$$\frac{\partial (JU_{b,m}^{n+1})}{\partial \xi_m} = 0 \quad (29)$$

式 (27) と式 (28) の差を取り、式 (29) に用いると次式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(J g^{mj} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_j} \right) = \frac{\rho}{\Delta t} \frac{\partial}{\partial \xi_m} (JU_{b,m}^*) \quad (30)$$

非圧縮性流れでは、流体質量を精度良く保存させることが重要であるので、式 (28) と式 (30) を利用して C-HSMAC 法⁶⁾により圧力と流速を同時緩和することが有効である。得られた ϕ を用いて次式より p^{n+1} を定める。

$$p^{n+1} = p^n + \phi \quad (31)$$

セル中心における u_i^{n+1} は、圧力項を含まない $\hat{u}_i^*$ に圧力勾配を加えて、次式より計算される。

$$u_i^{n+1} = \hat{u}_i^* - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \quad (32)$$

4. 計算結果と考察

実際の流体計算における C-ISMAC 法の適用性を確認するため、移動壁を有するキャビティ内の流れ²⁰⁾の計算を行った。計算対象とする流れのレイノルズ数は 1,000 である。計算セル数は 25×25 とし、境界適合座標系を利用して壁面近傍で格子間隔が密になるよう配

置した。計算格子点の分布を座標系等と合わせて図4に示す。本研究では、1つの計算セルが9個の格子点から構成されている。図4に示すように、高さおよび幅が1.0の正方形領域内において上壁面が速度1.0で移動する。直交座標系の原点は左下隅にとり、 x, y 方向の流速成分をそれぞれ u, v とする。

計算時間と精度を比較するため、既報¹⁷⁾で示した予測段階を陽的に扱う条件との比較を行う。以下ではこの条件の計算を標準計算(図中では explicit)と表記する。定常解は、標準計算の時間ステップを基準として、その間における流速の変化の最大値が $\epsilon_U = 1.0 \times 10^{-5}$ となった時点の計算結果とする。式(30)の計算における収束のしきい値 ϵ_ϕ とC-HSMAC法による流速ベクトルの発散値のしきい値 ϵ_D はともに 1.0×10^{-10} とし、定常解に対してこれらの条件が満足されるものとした。また、C-ISMAC法における式(25)の計算にはSOR法を用い、その収束判定基準は $\epsilon_R = 1.0 \times 10^{-10}$ とした。また、 $\alpha = \beta = 1.0$ とした。

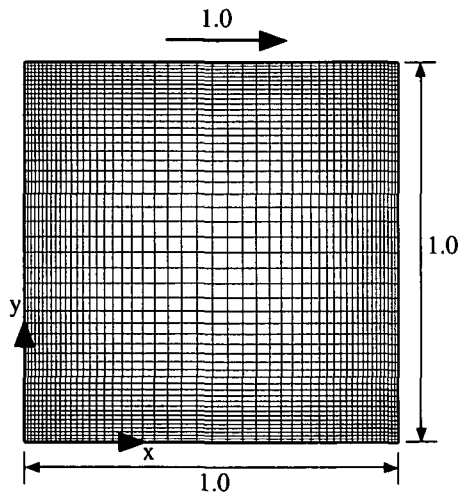


図-4 計算格子点の分布と座標系および計算条件

図4に示した格子点を用いる場合、標準条件では $\Delta t = 1.0 \times 10^{-2}$ で安定な計算を行えたが、 $\Delta t = 2.5 \times 10^{-2}$ では計算が不安定となった。これに対して、C-ISMAC法を用いる場合、 $\Delta t = 1.0 \times 10^{-1}$ としても安定な計算が可能となった。この計算で得られた流速ベクトルの分布を図5に示す。

表-1 計算時間、クーラン数および拡散数の比較

計算手法	Δt	T_n	$1/T_n$	C_{nm}	D_{nm}
標準計算	1.0×10^{-2}	1.00	1.00	0.37	0.05
C-ISMAC	2.5×10^{-2}	0.95	1.05	0.94	0.13
C-ISMAC	5.0×10^{-2}	0.54	1.85	1.90	0.26
C-ISMAC	1.0×10^{-1}	0.32	3.15	3.74	0.51

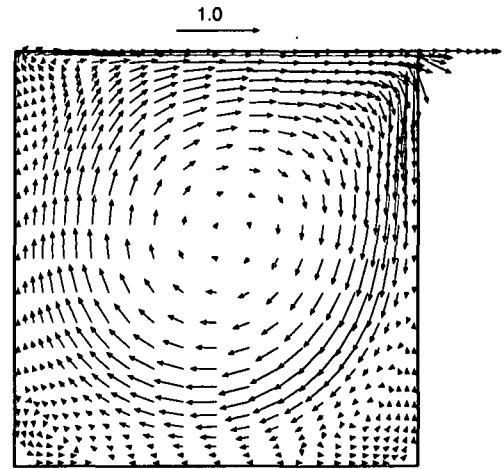


図-5 C-ISMAC法で計算された流速ベクトルの分布($\Delta t = 1.0 \times 10^{-2}$)

表1に標準計算とC-ISMAC法を用いたときの計算時間 T_n を示す。計算時間 T_n は標準計算の値を基準として正規化したものである。その逆数は計算速度の向上比に相当する。また、表1の C_{nm} と D_{nm} は、それぞれ定常解における計算領域内のクーラン数と拡散数の最大値である。ここで2次元場のクーラン数 C_n は次式で定義される。

$$C_n = \sum_m \frac{U_m \Delta t}{\Delta \xi_m} \quad (33)$$

また、拡散数 D_n は次式から計算される値とした。

$$D_n = \nu \Delta t \sum_m \sum_j \frac{1}{\Delta \xi_m^2} \left(\frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \right)^2 \quad (34)$$

C-ISMAC法では、流速の推定値の計算が陰的に行われるので、標準計算よりも1ステップの計算負荷が大きくなる。しかし、クーラン数や拡散数の制限が緩くなるため、表1に示すように Δt を大きくとることができ、結果的に計算時間を短縮化することが可能となっている。ただし、 Δt を増加させると収束速度が低下するため、 Δt の増加に比例した計算時間の短縮化は見られない。また、表1に示されるように、 Δt を 5.0×10^{-2} 以下とする条件では、 $D_{nm} < 0.5$ なる安定条件を満足するので、 $\beta = 0$ としても安定な計算が可能である。特に、 $\beta = 0$ とすることにより、計算時間を表1の値よりも若干短縮化することが可能であった。

また、定常解が得られた段階では、計算領域内における $|\bar{u}_i|$ の最大値と平均値は、それぞれ約 1.0×10^{-5} および 2.0×10^{-6} となっており、これらは Δt の値にかかわらず、表1のすべてのC-ISMAC法を用いた計算で同オーダーの値であった。なお、 $|\bar{u}_i|$ の値は定常解の判定条件 ϵ_U に関係するが、 ϵ_U を小さくすることによ

りさらに0に近づけることができた。このように、残差成分の連立方程式を導く際にセル中心で一旦圧力を考慮することで、残差成分 $|\bar{u}_i|$ は計算結果が定常解に近づくにつれ、実際に十分小さい値に収束することが確認された。

これらの計算で得られた流速分布を図6と図7に示す。図中に示されるように、 Δt を標準計算の10倍の値としても、標準計算と比較した場合の流速分布の相違はごくわずかであり、移流項に用いられたQSIスキームの精度を大きく劣化させることはない。表1より、本節の計算条件ではCFL条件による制約がやや強いと考えられるが、以上の計算結果から、クーラン数を2.0～3.0程度の値とすることにより、標準計算と同程度の精度を有する計算が2～3倍の計算速度で行えることが示された。

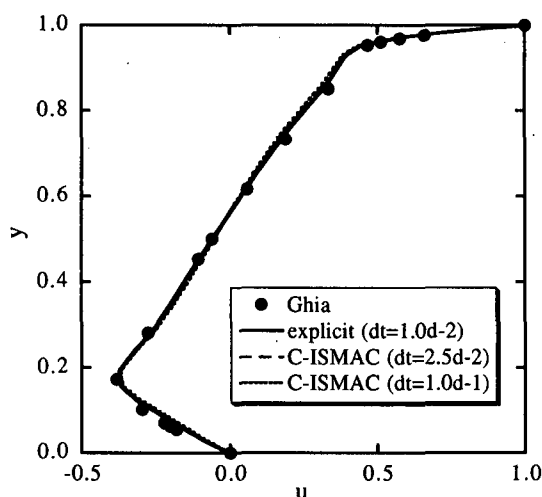


図-6 水平方向流速 u の分布

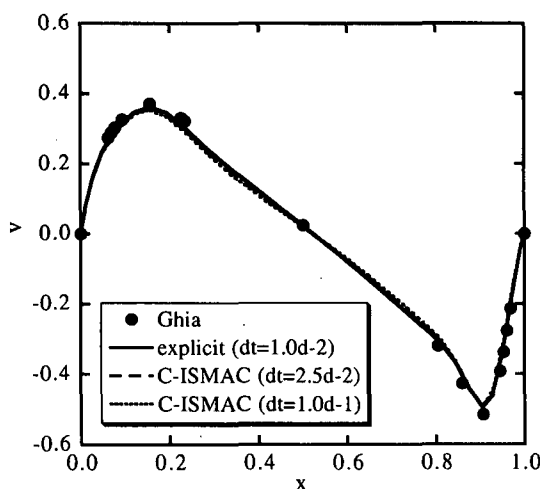


図-7 鉛直方向流速 v の分布

5. おわりに

コロケート格子において、高次精度のスキームの扱いが容易な陰的解法を用いる流体計算法を得ることを目的として、同格子におけるMAC系解法の予測段階における圧力の取り扱いに考察を加え、これを考慮したC-ISMALC法を示した。

最初に、予測段階における p^n の扱いが異なるCBPスキームとCCPスキームを示し、圧力計算段階で扱われる ϕ の基礎式の相違を明らかにした。さらに、CCPスキームでは、波長 $2\Delta x$ の水面振動あるいは圧力変動を捕えることが困難であり、初期の水面振動が不自然に増幅したり、自由水面流れの計算過程で同様の水面振動が生ずる場合があることを示した。

次に、この結果を考慮して、コロケート格子上のCBPスキームに対してImplicit SMAC法を適用する解法である、C-ISMALC法を提案した。C-ISMALC法では、セル中心で一旦圧力を含めて残差成分の連立方程式を導き、得られた流速の推定値から圧力を除去してCBPスキームと同等の推定値を得る。離散化の際には、残差成分のみを陰的に扱い、これに低次のスキームを用いる一方、高次精度スキームを適用する変数は陽的に扱うことができるため、SIMPLE系の解法と異なり、離散化式の導出が極めて容易である。

C-ISMALC法の有効性を確認するため、ベンチマーク計算として広く用いられている移動壁を有するキャピティフローの計算を行った。その結果、計算時間を短縮化できると同時に、QSIスキームを用いたMAC系解法と同等の精度を有する計算が可能であることが確認された。C-ISMALC法は上記の特性に加えて、コロケート格子配置の有用性を保持しているため、非圧縮性流体の解法が適用される各種の水理計算において、有効な手法として位置づけられると期待される。

参考文献

- 1) Y. Zang, R. L. Street, and J. R. Koseff. A non-staggered grid, fractional step method for time-dependent incompressible Navier-Stokes equations in curvilinear coordinates. *J. Comp. Phys.*, Vol. 114, pp. 18-33, 1994.
- 2) 梶島 岳夫, 太田 貴士, 岡崎 和彦, 三宅 裕. コロケート格子による非圧縮流れの高次差分解析. 機械学会論文集B編, Vol. 63, No. 614, pp. 3247-3254, 1997.
- 3) C. M. Rhie and W. L. Chow. Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation. *AIAA Journal*, Vol. 21, pp. 1525-1532, 1983.
- 4) L. S. Caretto, A. D. Gosman, S. V. Patankar, and D. B. Spalding. Two calculation procedures

- for steady, three-dimensional flows with recirculation. *Proc. 3rd Int. Conf. Numer. Meth. Fluid Dyn.*, Vol. II, pp. 60–68, 1972.
- 5) S. V. Patankar (水谷幸夫, 香月 正司共訳). コンピュータによる熱移動と流れの数値解析. 森北出版, 1995.
 - 6) 牛島省, 棚津家久. 移動一般座標系を用いたコロケート格子による自由水面流れの数値解析手法. 土木学会論文集, No. 698/II-58, pp. 11–19, 2002.
 - 7) 牛島省, 棚津家久. 5 次精度 QSI スキームを用いた自由液面流れの数値解析法. 日本機械学会論文集 (B 編), Vol. 68, No. 669, pp. 1322–1328, 2002.
 - 8) F. H. Harlow and J. E. Welch. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Phys. Fluids*, Vol. 8, No. 12, pp. 2182–2189, 1965.
 - 9) A. A. Amsden and F. H. Harlow. A simplified MAC technique for incompressible fluid flow calculations. *J. Comp. Phys.*, Vol. 6, pp. 322–325, 1970.
 - 10) C. W. Hirt and J. L. Cook. Calculating three-dimensional flows around structures and over rough terrain. *J. Comp. Phys.*, Vol. 10, pp. 324–340, 1972.
 - 11) T. Ikohagi and B. R. Shin. Finite-difference schemes for steady incompressible Navier-Stokes equations in general curvilinear coordinates. *Computers and Fluids*, Vol. 19, No. 3/4, pp. 479–488, 1991.
 - 12) B. R. Shin, T. Ikohagi, and H. Daiguji. An unsteady implicit SMAC scheme for two-dimensional incompressible Navier-Stokes equations. *JSME International Journal*, Vol. 36, No. 4, pp. 598–606, 1993.
 - 13) 大岡龍三, 村上周三, 持田灯. LES におけるコロケーショングリッドのエネルギー非保存性の検討. 生産研究, Vol. 49, No. 1, pp. 19–26, 1997.
 - 14) 森西洋平. コロケート格子系差分の運動エネルギー保存特性の改善方法. 日本機械学会論文集 B 編, Vol. 65, No. 630, pp. 505–512, 1999.
 - 15) 梶島岳夫. 乱流の数値シミュレーション. 養賢堂, 1999.
 - 16) 梶島岳夫, 太田貴士, 岡崎和彦, 三宅裕. コロケート格子による非圧縮流れの高次差分解析. 機械学会論文集 B 編, Vol. 63, No. 614, pp. 3247–3254, 1997.
 - 17) 牛島省, 棚津家久, 山上路生, 坂根由季子. 局所 5 次スプライン内挿法 (QSI 法) を利用したコロケート格子による流体解析手法. 土木学会論文集, No. 691/II-57, pp. 73–83, 2001.
 - 18) L. Fuchs and N. Tillmark. *Int. J. Numerical Methods in Fluids*, Vol. 5, p. 311, 1985.
 - 19) 牛島省, 棚津家久, 吉田圭介, 池田大輔. 自由水面流れの数値計算における内部流動の解析精度に関する考察. 水工学論文集, Vol. 46, pp. 409–414, 2002.
 - 20) U. Ghia, K. N. Ghia, and C. T. Shin. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. *J. Comput. Phys.*, Vol. 48, pp. 387–411, 1982.

(2002 年 4 月 19 日 受付)