

エネルギー原理に基づく材料非線形トラス構造物の構造形状および断面寸法を設計変数とした最適設計法

Optimum Design Method for Nonlinear Truss Structures based on Energy Principle
considering Configuration and Sizing Variables

谷脇一弘*, 大久保禎二**, 松友啓志***, 風川喜彦****

Kazuhiro TANIWAKI, Sadaji OHKUBO, Hiroshi MATSUTOMO and Yoshihiko KAZEKAWA

*正会員 博士(工学) 愛媛大学助手 工学部環境建設工学科 (〒790-8577 松山市文京町3)

**フェロー会員 工学博士 愛媛大学名誉教授 工学部環境建設工学科 (〒790-8577 松山市文京町3)

***修士(工学) 鉄建建設(株) 福岡支店 (〒810-0062 福岡県福岡市中央区荒戸2-1-5)

****修士(工学) 極東工業(株) (〒732-0052 広島市東区光町2-6-31)

This paper presents a unified and efficient optimum design method for nonlinear truss structures dealing with configuration and sizing variables. The necessary conditions for analysis problem are derived from the total complementary energy minimization problem and those are approximated with respect to configuration design variables. In the optimization process, the structural behaviors in addition to configuration and sizing variables are improved while satisfying both the primary design constraints and the approximated necessary conditions by using the gradient projection method without calculation of behavior sensitivities. The rigorousness, efficiency and reliability of the proposed method are demonstrated in the numerical examples.

Key Words : material nonlinear truss, configuration and sizing optimization, energy principle

1. まえがき

構造物の非線形挙動を正確に考慮し、合理的かつ能率的に構造物の設計を行うことができる最適設計法を確立することはきわめて重要な研究課題にもかかわらず、設計問題が複雑となること、従来の最適設計法において必要となる非線形挙動の感度係数の計算が困難となることより、これまでの研究では、断面寸法を設計変数として考慮し、塑性メカニズムに基づき最適化を行う最適塑性設計法に関する研究が主として行われており^{1)~3)}、構造物の非線形挙動を正確に追従し、断面寸法のみならず構造形状をも設計変数として考慮した最適設計法に関する方法論的研究は全く行われていないのが現状である。

ところで近年、大久保および谷脇は、線形・非線形挙動状態にある骨組構造物の断面寸法の最適設計問題をコンプリメンタリーエネルギー最小化の原理および数値計画法を用いて、応力度や変位などの挙動の断面寸法に関する感度係数を用いることなく解くことができる最適設計法を開発し、トラス構造物および剛節骨組構造物の最適設計例に適用し、有効性、能率性および信頼性を明らかにしてきた^{4), 5)}。

本研究では、上記の研究成果を利用し、線形・非線形挙動状態にあるトラス構造物の断面積のみならず構造形状を示す節点座標をも同時に設計変数として考慮し、挙動の設計変数に関する感度係数を用いることなく能率的に最適化を行う方法について研究を行ったものである。

本研究で提案する最適設計法では、まず、最小コンプリメンタリーエネルギーの原理に基づき、トラス構造物の線形・非線形解析問題をコンプリメンタリーエネルギー最小化問題として定式化し、そのラグランジュ関数を導入し、停留条件を用いて、トラス構造物の線形・非線形挙動の解析において満足すべき必要条件式を誘導する。この必要条件式は、断面積についてのみ陽な関数となっており、形状変数をも設計変数として取り扱うためには、形状変数が変化したことによる必要条件式の変化量をも考慮し、形状変数が変化した場合においてもこの必要条件式を満足させる必要がある。そこで、本研究では、上で誘導した必要条件式を形状変数(節点座標)に関して線形近似を行い、近似必要条件式を導入することにより、形状変数をも設計変数として取り扱うことができるようにしている。この近似必要条件式お

および応力度・変位の制約条件を同時に満足させつつ、断面積、形状変数、さらに、各部材の応力度および可動節点変位をも独立な設計変数として考慮し、勾配射影法の手法を用いて改良を行っている。この場合、各部材の応力度および可動節点変位に関する制約条件は、それぞれ応力度および可動節点変位についてのみ線形近似し、部材断面積および節点座標に関する感度係数は使用していない。

設計例において、本研究で述べた方法および挙動の感度係数を用い双対法により最適解を決定する方法の2つの手法により得られた最適解を比較することにより、本研究で述べた方法の能率性および信頼性を明らかにしている。さらに、バイリニアな材料を考慮し、最適解において、主要な部材の弾性係数が非線形領域の微小な値となり、かつ応力度が応力度-ひずみ関係の折点の近傍の値となる場合においても、提案した方法は全域的な最適解を容易に決定することができるすぐれた方法であることを明らかにしている。

2. 原最適設計問題の定式化

本研究では、線形・非線形挙動状態にあるトラス構造物の原最適設計問題の断面寸法に関する設計変数として各部材の断面積 $\mathbf{A} = [A_1, \dots, A_n]^T$ を、構造形状に関する設計変数として節点座標 $\mathbf{Y} = [Y_1, \dots, Y_p]^T$ を考慮している。制約条件として、各部材の応力度 $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_1, \dots, \sigma_n]^T$ および変位 $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \dots, \lambda_m]^T$ に関する制約条件を考慮し、目的関数としてトラス構造物の全重量 $\mathbf{W}$ を最小化する次の最適設計問題を考える。

$$\begin{aligned} \text{Find } & \mathbf{A}, \mathbf{Y}, \quad \text{which} \\ \text{min. } & \mathbf{W}(\mathbf{A}, \mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^n \rho_i A_i l_i(\mathbf{Y}) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{sub.to } & g_{\sigma j}(\mathbf{A}, \mathbf{Y}) = |\sigma_j(\mathbf{A}, \mathbf{Y})| - \sigma_{\sigma j} \leq 0 \\ & \quad (j=1, \dots, n) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & g_{\lambda k}(\mathbf{A}, \mathbf{Y}) = |\lambda_k(\mathbf{A}, \mathbf{Y})| - \lambda_{\lambda k} \leq 0 \\ & \quad (k=1, \dots, m) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & A_i^L \leq A_i \leq A_i^U \quad (i=1, \dots, n) \\ & Y_j^L \leq Y_j \leq Y_j^U \quad (j=1, \dots, P) \end{aligned}$$

ここに、 n は部材数、 P は形状変数として考慮した座標の数、 m は可動節点の変位成分の数を示す。 ρ_i および l_i は部材 i の単位体積当りの重量および部材長である。 $g_{\sigma j}$ 、 $g_{\lambda k}$ はそれぞれ部材 j の応力度および可動節点変位成分 k の変位に関する制約条件、 $\sigma_{\sigma j}$ 、 $\lambda_{\lambda k}$ はそれぞれ部材 j の許容応力度および可動節点成分 k の許容変位である。 A_i および Y_j の肩文字 L および U

はそれぞれ A_i および Y_j の下限値および上限値を示す。

3. 最小コンプリメンタリーエネルギーの原理に基づくトラス構造物の材料非線形解析法^{6),7)}

変位法による構造解析法、感度解析法および最適化手法を組み合わせた従来の最適設計法では、一般に非線形構造物の感度解析を行うために多大な労力を要し、非線形性の強い問題においては、得られた感度係数の設計変数の改良に有効な範囲も限られたものとなる。ところで、大久保らは、最小コンプリメンタリーエネルギーの原理に基づく解析法を用いることにより、荷重を分割する必要がなく容易に非線形解析を行うことができ、かつ収束性が良好であることを示した^{6),7)}。さらに、大久保および谷脇は、この解析法を基本とし、解析上の必要条件および設計上の制約条件を同時に満足させながら、設計変数、部材力および変位を同時に改良する方法により、構造物の挙動の感度係数を用いることなく能率的に非線形構造物の最適設計を行うことができる最適設計法を提案し、最小コンプリメンタリーエネルギーの原理に基づく解析法が最適化問題に容易に拡張可能であることを明らかにした^{4),5)}。そこで、本研究においても、最適化過程で必要となる非線形トラス構造物の解析法として、文献^{6),7)}に示した最小コンプリメンタリーエネルギーの原理に基づく方法により行うこととした。ここでは、この解析法の概略について述べる。

トラス構造物の部材 i のコンプリメンタリーエネルギー $\Pi_{c_i}(N_i)$ は、コンプリメンタリーエネルギー密度 $\beta_i(N_i)$ を用いて次式で表わされる。

$$\Pi_{c_i}(N_i) = \beta_i(N_i) A_i l_i \quad (4)$$

$$\text{ここに、} \beta_i(N_i) = \int_0^{\sigma_i} \varepsilon(N) d\sigma$$

n 個の部材からなるトラス構造物の全コンプリメンタリーエネルギー $\Pi_c(\mathbf{N})$ は、式(4)で表わされる部材 i のコンプリメンタリーエネルギー $\Pi_{c_i}(N_i)$ を、全ての部材について加え合わせるにより次式より求められる。

$$\Pi_c(\mathbf{N}) = \sum_{i=1}^n \Pi_{c_i}(N_i) \quad (5)$$

トラス構造物の各部材要素に使用する材料が異なる場合には、式(5)の $\Pi_{c_i}(N_i)$ として、各部材に使用する材料の応力度-ひずみ関係に対応した関数を用いなければならない。

与えられた断面積 $\mathbf{A}^0$ および構造形状 $\mathbf{Y}^0$ のもとで、

トラス構造物の真の部材力 $\mathbf{N}^*$ を決定する問題は、最小コンプリメンタリーエネルギーの原理に従い、次のような $\mathbf{N}$ を変数とするコンプリメンタリーエネルギー最小化問題として定式化することができる。

$$\begin{aligned} & \text{Find } \mathbf{N}, \quad \text{which} \\ & \min. \quad \Pi_c(\mathbf{N}) = \sum_{i=1}^n \Pi_{c_i}(N_i) \quad (6) \\ & \text{sub.to } g_j(\mathbf{N}) = P_j + \sum_{i=1}^n C_{ji} N_i = 0 \quad (j=1, \dots, m) \quad (7) \end{aligned}$$

ここに、 C_{ji} は軸力 N_i の可動節点成分 j への方向余弦、 P_j は可動節点成分 j に作用する外力である。

本研究では、式(6)、(7)の全コンプリメンタリーエネルギー最小化問題を逐次二次計画法 (SQP) を用いて解いている。構造物の全コンプリメンタリーエネルギー $\Pi_c(\mathbf{N})$ を $\Delta \mathbf{N}$ の二次形式で近似するとともに、制約条件 $\mathbf{g}(\mathbf{N})$ を $\Delta \mathbf{N}$ の一次関数として表現することにより、 k 回目の改良段階における部材力 $\mathbf{N}^k$ の改良のための変化量 $\Delta \mathbf{N}^k$ を決定する近似二次計画問題を次のように導入することができる。

$$\begin{aligned} & \text{Find } \Delta \mathbf{N}^k, \quad \text{which} \\ & \min. \quad \mathbf{Q}_c^k = \nabla \Pi_c^k \Delta \mathbf{N}^k + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{N}^{kT} \mathbf{H}_c^k \Delta \mathbf{N}^k \quad (8) \\ & \text{sub.to } h_j(\Delta \mathbf{N}^k) = g_j(\mathbf{N}^k) + \sum_{i=1}^n C_{ji} \Delta N_i^k = 0 \\ & \quad j = (1, \dots, m) \quad (9) \end{aligned}$$

ここに、

$$\Delta \mathbf{N}^k = [\Delta N_1^k, \dots, \Delta N_n^k]^T, \quad \nabla \Pi_c^k = \left[\frac{\partial \Pi_c}{\partial N_1^k}, \dots, \frac{\partial \Pi_c}{\partial N_n^k} \right]^T$$

$\mathbf{H}_c^k$ は正定値係数行列であり、BFGS 公式により改良する。上記の全コンプリメンタリーエネルギーの偏微分係数 $\nabla \Pi_c^k$ の計算は次式により簡単に計算することができる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_c}{\partial N_i^k} & \approx \frac{\Pi_c(N_1^k, \dots, N_i^k + \Delta N_i, \dots, N_n^k) - \Pi_c(\mathbf{N}^k)}{\Delta N_i} \\ & \approx \frac{\Pi_{c_i}(N_i + \Delta N_i) - \Pi_{c_i}(N_i)}{\Delta N_i} \\ & = \frac{1}{\Delta N_i} \Delta \sigma_i \varepsilon_i A_i l_i = \varepsilon_i l_i \quad (10) \end{aligned}$$

上記の近似二次計画問題を勾配射影法を用いて解き、最適な改良値 $\Delta \mathbf{N}_{opt}^k$ を求める。この $\Delta \mathbf{N}_{opt}^k$ を用いて $\mathbf{N}^k$ を $\mathbf{N}^{k+1} = \mathbf{N}^k + \Delta \mathbf{N}_{opt}^k$ として改良する。このようにして求めた $\mathbf{N}$ の改良解 $\mathbf{N}^{k+1}$ を新たな初期値として $g_j(\mathbf{N})$ ($j=1, \dots, m$)、 $\nabla \Pi_c(\mathbf{N})$ および $\Pi_c^k(\mathbf{N})$ を修正し、 $\mathbf{N}^{k+1}$ に対する新たな近似二次計画問題を作成する。このようにして $\mathbf{N}$ の改良を繰り返し、 $\Pi_c(\mathbf{N})$ および $\mathbf{N}$

の値が一定値に収束した時点で真の部材力 $\mathbf{N}^*$ を決定することができる。

非線形トラス構造物の各可動節点の変位 λ の値は、式(6)および式(7)で与えられた全コンプリメンタリーエネルギー最小化問題のラグランジュ関数 $L(\mathbf{N}, \lambda)$ の停留値 $L(\mathbf{N}^*, \lambda^*)$ のラグランジュ乗数 λ^* の値として求めることができることより、本研究では、以下に述べる方法により変位を求めている。

ラグランジュ関数 $L(\mathbf{N}, \lambda)$ の N_i ($i=1, \dots, n$) に関する停留条件より次式が得られる。

$$\frac{\partial L(\mathbf{N}, \lambda)}{\partial N_i} = \frac{\partial \Pi_c(\mathbf{N})}{\partial N_i} + \mathbf{C}_i^T \lambda = 0 \quad (i=1, \dots, n) \quad (11)$$

上式をマトリックス表示すると次式のように表すことができる。

$$\nabla \Pi_c(\mathbf{N}) + \mathbf{C}^T \lambda = 0 \quad (12)$$

ここに、 $\mathbf{C} = [\mathbf{C}_1^T, \dots, \mathbf{C}_i^T, \dots, \mathbf{C}_n^T]^T$ ($m \times n$ の行列)

上式の両辺に $\mathbf{C}$ を左積することにより、

$$\mathbf{C} \cdot \nabla \Pi_c(\mathbf{N}) + \mathbf{C} \mathbf{C}^T \lambda = 0 \quad (13)$$

が得られ、ラグランジュ乗数 (変位) $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_m]^T$ は次式より求められる。

$$\lambda = -(\mathbf{C} \mathbf{C}^T)^{-1} \mathbf{C} \cdot \nabla \Pi_c(\mathbf{N}) \quad (14)$$

したがって、荷重による真の各可動節点変位 λ^* は、上で求めた真の部材力 $\mathbf{N}^*$ を代入することにより、次式により求めることができる。

$$\lambda^* = -(\mathbf{C} \mathbf{C}^T)^{-1} \mathbf{C} \cdot \nabla \Pi_c(\mathbf{N}^*) \quad (15)$$

4. トラス構造物の線形・非線形解析問題における必要条件の誘導

本研究の方法は、文献 4,5) の考え方にに基づき、解析上の必要条件を満足させつつ、設計変数を改良する最適設計アルゴリズムとなる。そこで、本節では、トラス構造物の線形・非線形解析問題における必要条件を誘導する。

3. で述べたコンプリメンタリーエネルギー最小化によるトラス構造物の非線形解析法においては、部材力 $\mathbf{N}$ を変数とする最小化問題として定式化を行ったが、最適設計問題においては断面積 $\mathbf{A}$ および形状変数 $\mathbf{Y}$ を設計変数として考慮し、かつ σ を独立な設計変数として考慮するため、 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{Y}$ 、 σ の関数の項を明確にし、 $\mathbf{N} = \sigma \mathbf{A}$ の関係を用いて σ を未知数とする下記の全コンプリメンタリーエネルギー最小化問題を定式化する。

$$\begin{aligned} \text{Find } & \sigma, \quad \text{which} \\ \text{min. } & \Pi_c(\mathbf{A}, \mathbf{Y}, \sigma) = \sum_{i=1}^n \Pi_{c_i}(\mathbf{A}, \mathbf{Y}, \sigma_i) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \text{sub.to } & \bar{g}_j(\mathbf{A}, \mathbf{Y}, \sigma) = P_j + \sum_{i=1}^n C_{ji}(\mathbf{Y}) \sigma_i A_i = 0 \\ & (j=1, \dots, m) \end{aligned} \quad (17)$$

式(16),(17)で表されるトラス構造物の線形・非線形解析問題において、解が満足すべき必要条件を求めため、式(16),(17)の全コンプリメンタリーエネルギー最小化問題のラグランジュ関数 $L(\sigma, \lambda)$ を導入する。

$$L(\sigma, \lambda) = \Pi_c(\mathbf{A}, \mathbf{Y}, \sigma) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \bar{g}_j(\mathbf{A}, \mathbf{Y}, \sigma) \quad (18)$$

ここに、 λ_j は $\bar{g}_j(\mathbf{A}, \mathbf{Y}, \sigma)$ に関するラグランジュ乗数であるが、3. で述べたように可動節点変位成分 j の変位と同一の値となる。

式(18)のラグランジュ関数 $L(\sigma, \lambda)$ の極値が満足すべき必要条件是、 $L(\sigma, \lambda)$ の σ および λ に関する停留条件より、次式のように誘導することができる。

$$\frac{\partial L(\sigma, \lambda)}{\partial \sigma_i} = \frac{\partial \Pi_c(\mathbf{A}, \mathbf{Y}, \sigma)}{\partial \sigma_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial \bar{g}_j(\mathbf{A}, \mathbf{Y}, \sigma)}{\partial \sigma_i} = 0 \quad (i=1, \dots, n) \quad (19)$$

$$\frac{\partial L(\sigma, \lambda)}{\partial \lambda_j} = \bar{g}_j(\mathbf{A}, \mathbf{Y}, \sigma) = 0 \quad (j=1, \dots, m) \quad (20)$$

式(19)における $\partial \Pi_c(\mathbf{A}, \mathbf{Y}, \sigma) / \partial \sigma_i$ の値は式(10)と同様にして次式により与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_c(\mathbf{A}, \mathbf{Y}, \sigma)}{\partial \sigma_i} & \approx \frac{\Pi_c(\sigma_1, \dots, \sigma_i + \Delta \sigma_i, \dots, \sigma_n) - \Pi_c(\sigma)}{\Delta \sigma_i} \\ & = \varepsilon_i(\sigma_i) A_i l_i(\mathbf{Y}) \end{aligned} \quad (21)$$

ここに、 $\varepsilon_i(\sigma_i)$ は部材 i の σ_i に対応するひずみ量である。また、式(19)における $\partial \bar{g}_j(\mathbf{A}, \mathbf{Y}, \sigma) / \partial \sigma_i$ の値も式(17)より次式のように容易に求めることができる。

$$\frac{\partial \bar{g}_j(\mathbf{A}, \mathbf{Y}, \sigma)}{\partial \sigma_i} = C_{ji}(\mathbf{Y}) A_i \quad (22)$$

式(21)および式(22)により、式(19)および式(20)は次式のように表される。

$$\frac{\partial L(\sigma, \lambda)}{\partial \sigma_i} = \varepsilon_i(\sigma_i) l_i(\mathbf{Y}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j C_{ji}(\mathbf{Y}) = 0 \quad (i=1, \dots, n) \quad (23)$$

$$\frac{\partial L(\sigma, \lambda)}{\partial \lambda_j} = \sum_{i=1}^n C_{ji}(\mathbf{Y}) \sigma_i A_i + P_j = 0 \quad (j=1, \dots, m) \quad (24)$$

このように $\partial L / \partial \sigma_i$ および $\partial L / \partial \lambda_j$ の右辺の各項は、すべて解析的にきわめて容易に求めることができる。ここで、式(23)は各可動節点変位および各部材の伸びに関する適合条件式、式(24)は各可動節点変位成分における外力と軸力の釣合条件式となっている。

ところで、本研究では、断面積 $\mathbf{A}$ のみならず構造形状 $\mathbf{Y}$ をも設計変数として考慮し、 $\mathbf{A}$ および $\mathbf{Y}$ が変化した場合においても式(23), (24)の必要条件を満足しなければならない。しかし、式(23), (24)は $\mathbf{Y}$ の陽な関数として表現されておらず、 $\mathbf{Y}$ を設計変数として考慮するためには、 $\mathbf{Y}$ が変化したことによる必要条件の変化をも考慮できるようにする必要がある。そこで、本研究では、式(23)および(24)を $\mathbf{Y}$ に関してテーラー展開した次式で表わされる近似の必要条件式を用いることとした。すなわち、上式(23)および(24)において形状変数 $\mathbf{Y}$ が $\Delta \mathbf{Y}$ だけ変化した場合には次式のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\sigma, \lambda)}{\partial \sigma_i} & \equiv \varepsilon_i(\sigma_i) \left\{ l_i(\mathbf{Y}^0) + \sum_{k=1}^p \frac{\partial l_i}{\partial Y_k} \Delta Y_k \right\} \\ & + \sum_{j=1}^m \lambda_j \left\{ C_{ji}(\mathbf{Y}^0) + \sum_{k=1}^p \frac{\partial C_{ji}}{\partial Y_k} \Delta Y_k \right\} = 0 \end{aligned} \quad (i=1, \dots, n) \quad (25)$$

$$\frac{\partial L(\sigma, \lambda)}{\partial \lambda_j} \equiv \sum_{i=1}^n \left\{ C_{ji}(\mathbf{Y}^0) + \sum_{k=1}^p \frac{\partial C_{ji}}{\partial Y_k} \Delta Y_k \right\} \sigma_i A_i + P_j = 0 \quad (j=1, \dots, m) \quad (26)$$

上式において、 $\partial l_i / \partial Y_k$ および $\partial C_{ji} / \partial Y_k$ は差分法を用いることにより単純に計算することができる。

5. 線形・非線形トラス構造物の形状および断面寸法の最適設計法

5.1 最適設計問題の再定式化

本研究では、式(1)~(3)の原最適設計問題において、応力度および変位の不等号制約条件に加えて 4. で誘導した解析上の必要条件式(25)および(26)を等号制約条件として付加する。さらに、断面積 $\mathbf{A}$ および形状変数 $\mathbf{Y}$ に加えて、各部材の応力度 σ および可動節点変位 λ をも独立変数として考慮することにより、解析上の必要条件を満足させつつ設計変数の改良を行う。したがって、 $\mathbf{A}, \mathbf{Y}, \sigma, \lambda$ を設計変数として考慮した線形・非線形トラス構造物の最小重量設計問題を、次式のように再定式化することができる。

$$\begin{aligned} \text{Find } & \mathbf{A}, \mathbf{Y}, \sigma, \lambda, \quad \text{which} \\ \text{min. } & \mathbf{W}(\mathbf{A}, \mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^n \rho_i A_i \left\{ l_i(\mathbf{Y}^0) + \sum_{k=1}^p \frac{\partial l_i}{\partial Y_k} \Delta Y_k \right\} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\text{sub.to} \quad g_{ei}(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\lambda}) = \varepsilon_i(\sigma_i) \left\{ l_i(\mathbf{Y}^0) + \sum_{k=1}^p \frac{\partial l_i}{\partial Y_k} \Delta Y_k \right\} \\ + \sum_{j=1}^m \lambda_j \left\{ C_{ji}(\mathbf{Y}^0) + \sum_{k=1}^p \frac{\partial C_{ji}}{\partial Y_k} \Delta Y_k \right\} = 0 \quad (i=1, \dots, n) \quad (28)$$

$$g_{ej}(\mathbf{A}, \mathbf{Y}, \boldsymbol{\sigma}) = \sum_{i=1}^n \left\{ C_{ji}(\mathbf{Y}^0) + \sum_{k=1}^p \frac{\partial C_{ji}}{\partial Y_k} \Delta Y_k \right\} \sigma_i A_i \\ + P_j = 0 \quad (j=1, \dots, m) \quad (29)$$

$$g_{ak}(\boldsymbol{\sigma}) = |\sigma_k| - \sigma_{ak} \leq 0 \quad (k=1, \dots, n) \quad (30)$$

$$g_{li}(\boldsymbol{\lambda}) = |\lambda_l| - \lambda_{li} \leq 0 \quad (l=1, \dots, m) \quad (31)$$

$$A_i^L \leq A_i \leq A_i^U \quad (i=1, \dots, n)$$

$$Y_j^L \leq Y_j \leq Y_j^U \quad (j=1, \dots, P)$$

5.2 最適設計問題の解法

式(27)～(31)の最適設計問題における目的関数 $\mathbf{W}(\mathbf{A}, \mathbf{Y})$ を $\mathbf{A}$ 、変位の適合条件式 $g_{ei}(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\lambda})$ を $\boldsymbol{\sigma}$ および $\boldsymbol{\lambda}$ 、力の釣合条件式 $g_{ej}(\mathbf{A}, \mathbf{Y}, \boldsymbol{\sigma})$ を $\mathbf{A}$ および $\boldsymbol{\sigma}$ 、応力度に関する制約条件 $g_{ak}(\boldsymbol{\sigma})$ を $\boldsymbol{\sigma}$ 、可動節点変位に関する制約条件 $g_{li}(\boldsymbol{\lambda})$ を $\boldsymbol{\lambda}$ に関してそれぞれテーラー展開し、 $\mathbf{A}, \mathbf{Y}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\lambda}$ に関する一次の偏微分係数の項までを考慮して線形近似することにより $\Delta \mathbf{A}, \Delta \mathbf{Y}, \Delta \boldsymbol{\sigma}, \Delta \boldsymbol{\lambda}$ を設計変数とする最適設計問題を導入する。この線形近似問題において、次に示す ΔA_i および ΔY_j の改良幅を決定する move limit の制約条件を付加している。

$$|\Delta A_i| \leq \xi_1 A_i^0 \quad (i=1, \dots, n) \quad (32)$$

$$|\Delta Y_j| \leq \xi_2 Y_j^0 \quad (j=1, \dots, P) \quad (33)$$

ここに、 ξ_1, ξ_2 はそれぞれ ΔA_i および ΔY_j の改良幅を決定する move limit のパラメータであり、本研究では、 ξ_1 として 0.20～0.65、 ξ_2 として 0.10～0.15 を用いている。

各部材の応力度および可動節点変位に関する制約条件は、それぞれ応力度および可動節点変位についてのみ線形近似し、部材断面積および節点座標に関する感度係数は使用していない。このことは、提案した方法の最適化を行う上での大きな利点である。

上で述べた線形近似最適設計問題を解く方法として種々の方法が考えられるが、本研究では、アクティブとなる制約条件群のみに着目して効率的に設計変数の改良を行うことができる勾配射影法を用いて線形近似最適設計問題を解き $\Delta \mathbf{A}, \Delta \mathbf{Y}, \Delta \boldsymbol{\sigma}, \Delta \boldsymbol{\lambda}$ を求めている。勾配射影法を用いた最適化アルゴリズムは文献5)を参照していただきたい。

上で求めた $\Delta \mathbf{A}, \Delta \mathbf{Y}, \Delta \boldsymbol{\sigma}, \Delta \boldsymbol{\lambda}$ を用いて設計変数 $\mathbf{A}, \mathbf{Y}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\lambda}$ を次式により改良する。

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}'^T, \mathbf{Y}'^T, \boldsymbol{\sigma}'^T, \boldsymbol{\lambda}'^T]^T &= [\mathbf{A}^{0T}, \mathbf{Y}^{0T}, \boldsymbol{\sigma}^{0T}, \boldsymbol{\lambda}^{0T}]^T \\ &+ [\Delta \mathbf{A}^T, \Delta \mathbf{Y}^T, \Delta \boldsymbol{\sigma}^T, \Delta \boldsymbol{\lambda}^T]^T \end{aligned} \quad (34)$$

上記で改良された $\mathbf{A}', \mathbf{Y}', \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\lambda}'$ を新たな初期値 $\mathbf{A}^0, \mathbf{Y}^0, \boldsymbol{\sigma}^0, \boldsymbol{\lambda}^0$ として、最小コンプリメンタリーエネルギー原理に基づき構造物の線形・非線形解析を行い、再び線形近似最適設計問題を導入し、勾配射影法を用いて設計変数を改良する過程を、全重量 $\mathbf{W}$ 、断面積 $\mathbf{A}$ 、節点座標 $\mathbf{Y}$ 、応力度 $\boldsymbol{\sigma}$ および可動節点変位 $\boldsymbol{\lambda}$ が一定値に収束するまで繰り返すことにより最適解 $\mathbf{W}_{opt}$ および $\mathbf{A}_{opt}, \mathbf{Y}_{opt}$ を決定することができる。

6. 最適設計例

本論文で提案した方法の信頼性、汎用性および効率性について検討を行うため、種々の線形・非線形材料よりなるトラス構造物について、本論文で提案した方法(Proposed-M)および挙動の感度係数を用い双対法により最適化を行う方法(Dual-M)の2つの手法により得られた最適解の比較検討を行ったが、ここでは、図-1に示す2部材トラス、15部材トラス、25部材トラスおよび31部材トラスの最適解の比較検討を行った結果について述べる。本研究で提案したアルゴリズムの信頼性を検討するため用いた材料として、弾性係数が $2.0 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2 (1.96 \times 10^5 \text{ N/mm}^2)$ となる線形材料および図-2の(a),(b)に示す非線形材料を仮定し、トラス構造物の各部材はすべて同一の応力度-ひずみ関係を有する材料よりなるものとしている。本研究では、トラス構造物の最適な断面積の分布および構造形状のみならず、最適な部材配置をも決定することを目的としており、許容応力度 σ_s を線形材料および図-2(a)に示す非線形材料の場合は $2500 \text{ kgf/cm}^2 (245.17 \text{ N/mm}^2)$ 、(b)の場合には $2700 \text{ kgf/cm}^2 (264.60 \text{ N/mm}^2)$ の一定値とし、最小断面積を 1.0 cm^2 と微小な値に設定することにより、最適化過程において重量最小化の観点から不必要となる部材の断面積が最小断面積となり、最適な部材配置が得られるようにしている。

設計例において、各部材の単位体積当りの重量 ρ を $7.85 \text{ gf/cm}^3 (0.077 \text{ N/cm}^3)$ と仮定し、各部材の初期断面積を 100.0 cm^2 に設定した。なお、挙動の感度係数を用い双対法により最適化を行う方法の最適化アルゴリズムの詳細は文献8)を参照していただきたい。

6.1 2部材トラスの最適設計例

図-1に示す2部材トラスの節点③のY座標および各部材の断面積を設計変数として考慮し、線形材料を用い、Yの初期値を 5.0 m 、許容変位 $\lambda_s = 2.2 \text{ cm}$ とし

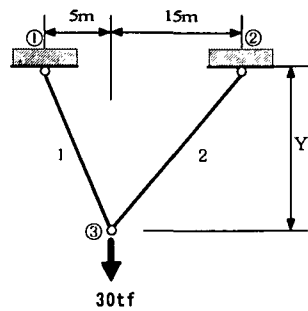
表-1 2部材トラスの Proposed-M および Dual-M による最適解の比較

解法	Proposed-M		Dual-M	
材料	線形		線形	
設計変数	断面積 (cm ²)	応力度 (kgf/cm ²)	断面積 (cm ²)	応力度 (kgf/cm ²)
A ₁	10.42	2495	10.39	2500
A ₂	6.00	2500	6.00	2500
Y	865.1cm		865.5	
W (kgf)	163.32		163.16	
$\lambda_{\max}$ (cm)	2.16		2.17	
ITE ¹⁾	9		9	
Move limit ²⁾	$\xi_1=0.50, \xi_2=0.10$		$\xi_2=0.15$	
Active な制約条件	σ		σ	

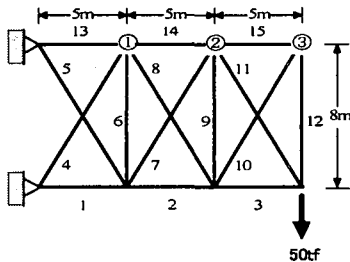
1) 最適解を得るために要した繰り返し回数

2) ξ_1 : 断面積の改良幅を規定する move limit,

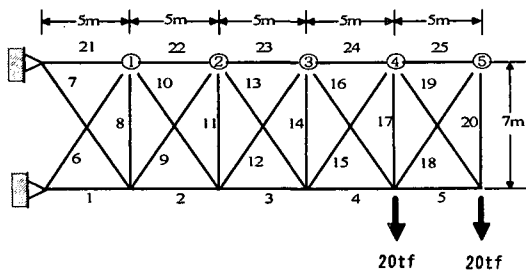
ξ_2 : Y の改良幅を規定する move limit



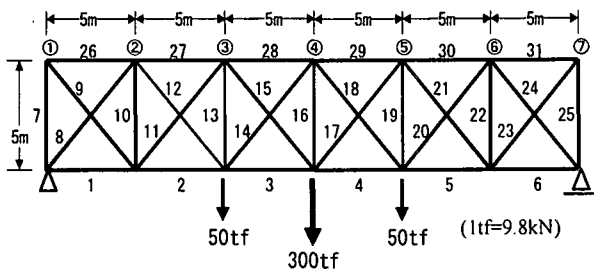
(a) 初期 2 部材トラス



(b) 初期 15 部材トラス



(c) 初期 25 部材トラス



(d) 初期 31 部材トラス

図-1 初期 2 部材トラス, 15 部材トラス, 25 部材トラスおよび 31 部材トラス

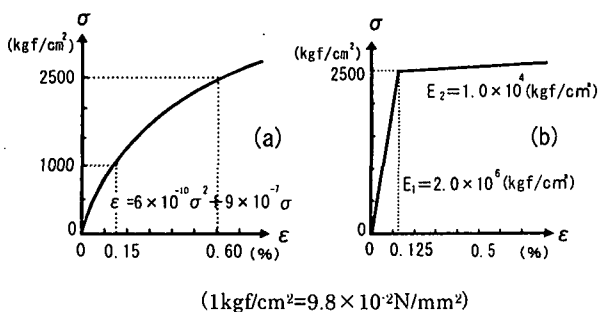


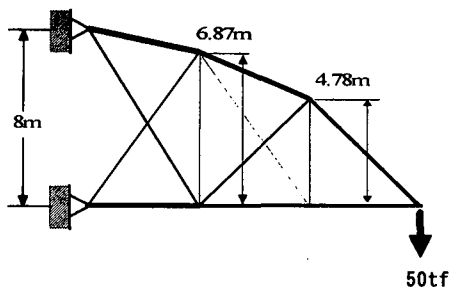
図-2 非線形材料 (a), (b) の応力度-ひずみ関係

た場合の Proposed-M および Dual-M により得られた最適解の比較を表-1 に示す。この設計例においては、最適解において応力度が active な制約条件となり、厳密解は $Y=8.66\text{m}$, $A_1=10.39\text{cm}^2$, $A_2=6.00\text{cm}^2$ となる設計問題であるが、Proposed-M および Dual-M とともに、9 回の反復改良により、厳密解とほぼ等しい解が得られている。

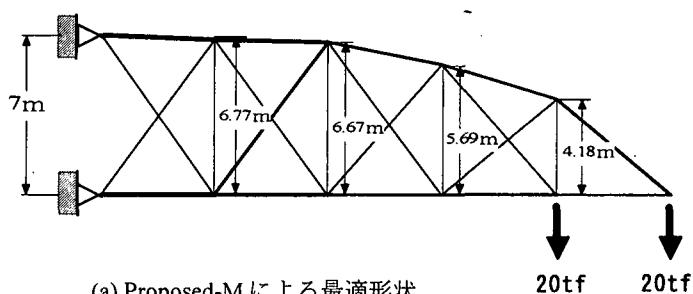
6.2 15 部材トラスの最適設計例

図-1 に示す 15 部材トラスの上弦材の節点①～③の Y 座標 ($Y_1 \sim Y_3$) および各部材の断面積を設計変数として考慮し、Proposed-M および Dual-M により得られた最適解の比較を行った結果について以下に述べる。

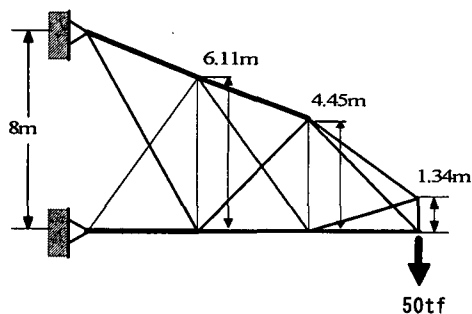
各部材の材料が図-2 の (a) に示す非線形材料よりなり、許容変位 $\lambda_o=30.0\text{cm}$ とした場合の Proposed-M および Dual-M により得られた最適解の比較を表-2 に、最適形状の比較を図-3 に示す。この設計例においては、最適解において応力度および変位の制約条件が active な制約条件となっている。Proposed-M では、A および Y の改良幅を規定する move limit の制約条件のパラメータ値 ξ_1, ξ_2 をそれぞれ 0.20, 0.10 に規定し、線形近似問題の導入および勾配射影法による改良過程を 29 回くり返すことにより最適解が得られた。Dual-M では、Y の改良幅を規定する move limit のみを設定し、そのパラメータの値 ξ_2 を 0.20 とし、最適解は 43 回の双対法の反復改良により得られた。最適形状は、 Y_1 が 76.0cm, Y_2 が 33.0cm の差となっており、Proposed-M の場合には節点③に接続するすべての部材 10, 12, 15 の断面積は最小断面積の 1.0cm^2 となり、節点③は重量最小化の観点から不必要な節点となっている。一方、Dual-M の場合には、10, 12, 15 部材の



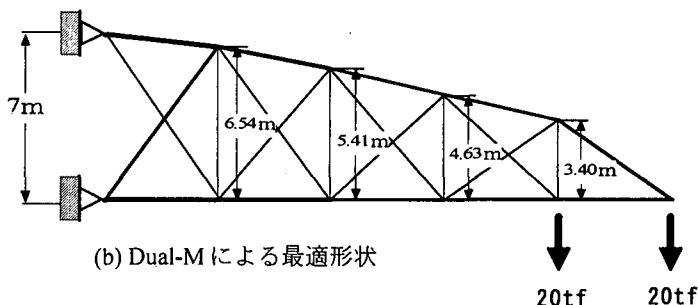
(a) Proposed-M による最適形状



(a) Proposed-M による最適形状



(b) Dual-M による最適形状



(b) Dual-M による最適形状

図-3 15 部材トラスの Proposed-M および Dual-M による最適形状の比較

図-4 25 部材トラスの Proposed-M および Dual-M による最適形状の比較

表-2 15 部材トラスの Proposed-M および Dual-M による最適解の比較

解法	Proposed-M		Dual-M		Proposed-M	
材料	(a)		(a)		(b)	
設計条件	$\sigma_a = 2500 \text{ (kgf/cm}^2\text{)}$ $\lambda_a = 30.0 \text{ (cm)}$		$\sigma_a = 2500 \text{ (kgf/cm}^2\text{)}$ $\lambda_a = 30.0 \text{ (cm)}$		$\sigma_a = 2700 \text{ (kgf/cm}^2\text{)}$ $\lambda_a = 50.0 \text{ (cm)}$	
部材番号	断面積 (cm ²)	応力度 (kgf/cm ²)	断面積 (cm ²)	応力度 (kgf/cm ²)	断面積 (cm ²)	応力度 (kgf/cm ²)
1	33.9	-2466	39.5	-2330	31.1	-2659
2	21.4	-2498	28.1	-2221	19.6	-2700
3	21.6	-2333	12.1	-2208	19.3	-2544
4	8.4	-2029	1.0	-2451	7.4	-2583
5	10.6	1937	8.6	2247	9.0	2517
6	1.0	979	1.0	784	1.0	-1891
7	12.0	-2228	11.4	-2277	9.5	-2618
8	1.0	1969	4.5	2182	1.0	2530
9	1.0	-66	1.0	343	1.0	-763
10	1.0	-2417	12.7	-2396	1.0	-2577
11	28.9	2412	15.7	2281	27.1	2529
12	1.0	1790	10.7	2446	1.0	2164
13	43.7	1943	39.5	2257	33.6	2472
14	32.3	2405	33.5	2382	29.4	2575
15	1.0	1892	15.8	2199	1.0	2383
W (kgf)	1000.4		1002.0		880.0	
$\lambda_{\max}$ (cm)	29.6		30.2		49.9	
CPU TIME (sec) ¹⁾	4.2 (0.894)		4.7 (1.000)		3.4	
ITE ²⁾	29		43		26	
Move limit ³⁾	$\xi_1 = 0.20, \xi_2 = 0.10$		$\xi_2 = 0.20$		$\xi_1 = 0.30, \xi_2 = 0.15$	
Active な制約条件	σ, λ		σ, λ		σ, λ	

1) 233MHz のパーソナルコンピュータによる計算時間

2) 最適解を得るために要した繰り返し回数

3) ξ_1 : 断面積の改良幅を規定する move limit, ξ_2 : Y の改良幅を規定する move limit

断面積は 12.7 cm², 10.7 cm², 15.8 cm² の大きな値を有しており, Y₃ は 134cm となっている. しかし, 最適解における目的関数の値は, Proposed-M の場合が 1000.4kgf (9.804KN), Dual-M の場合が 1002.0kgf (9.820KN) と完全に一致していることより, 解法の違いにより最適な形状と断面積の組み合わせは異なるが, 2つの手法ともに最適解が得られている.

各部材の材料が図-2 の(b)の非線形材料よりなり, バイリニアな応力度-ひずみ関係の材料を考慮し, 許容応力度を 2700kgf/cm² (264.60N/mm²) とすることにより, 最適解において, 主要な部材の弾性係数が非線形領域の微小な値となり, かつ応力度が応力度-ひずみ関係の折点近傍の値となる場合について検討を行った. この問題においては, 許容変位 λ_a = 50cm としている.

Dual-M の場合には, Y のみならず A の move limit もを設定し, ξ₁, ξ₂ を種々変化させて検討を行ったが, いずれの場合も感度係数を用いた近似の変位制約の精度が悪く真の変位量と近似の変位量の値が大きく

異なったため最適解を得ることができなかった. このことに対し, Proposed-M の場合には, ξ₁ = 0.3, ξ₂ = 0.15 とすることにより, 26 回の反復改良により表-2 に示す最適解が得られた. 最適解において, 大きな断面積を有する主要な部材の応力度の絶対値は, 13 部材を除いて 2500kgf/cm² (245.17N/mm²) 以上の非線形領域となり, かつ応力度-ひずみ関係の折点近傍の値となっている. 部材 2 の応力度は -2700 kgf/cm² (-264.60 N/mm²), 変位は 49.9cm となっており, 応力度および変位が同時に active となっている. 最適な形状は, 図-3 に示した Proposed-M による最適形状と同様の形状を示している. このことより, Proposed-M により, 図-2 の(b)に示した材料を考慮し, 最適解において応力度が応力度-ひずみ関係の折点近傍の値となる場合においても, 全域的な最適解を容易に決定できることが明らかとなった.

6.3 25 部材トラスの最適設計例

つぎに図-1 に示す 25 部材トラスにおいて, 各部材

表-3 25 部材トラスの Proposed-M および Dual-M による最適解の比較

解法	Proposed-M		Dual-M		Proposed-M	
材料	(a)		(a)		(b)	
設計条件	σ _a = 2500 (kgf/cm ²) λ _a = 50.0 (cm)		σ _a = 2500 (kgf/cm ²) λ _a = 50.0 (cm)		σ _a = 2700 (kgf/cm ²) λ _a = 50.0 (cm)	
部材番号	断面積 (cm ²)	応力度 (kgf/cm ²)	断面積 (cm ²)	応力度 (kgf/cm ²)	断面積 (cm ²)	応力度 (kgf/cm ²)
1	46.7	-2021	46.6	-1902	33.9	-2530
2	30.9	-1886	38.2	-1802	22.3	-2510
3	21.9	-1704	28.0	-1662	21.8	-1822
4	12.2	-1581	15.1	-1469	14.0	-1460
5	8.5	-1320	10.4	-1305	8.9	-1156
6	15.0	-1437	13.1	-2339	14.3	-2671
7	15.7	2253	8.3	2511	11.5	2689
8	1.0	1963	1.0	1126	1.0	219
9	16.3	-1591	4.5	-2444	11.8	-1651
10	9.0	2491	8.9	2497	11.0	1672
11	1.0	605	1.0	686	1.0	1229
12	6.5	-1760	6.5	-1876	7.6	-1145
13	9.0	2029	9.1	2272	11.6	1725
14	1.0	1171	1.0	1732	1.0	357
15	6.1	-1495	8.3	-1481	7.8	-1228
16	5.2	2131	4.1	2501	9.2	1437
17	1.0	2122	1.0	2037	1.0	557
18	1.0	-928	1.0	-1163	1.0	-1235
19	11.0	1332	12.4	1322	9.8	1391
20	1.0	642	1.0	792	1.0	1041
21	42.2	2052	50.2	1900	35.2	2541
22	33.1	1829	37.1	1742	23.3	2499
23	20.5	1684	26.6	1578	19.7	1750
24	13.9	1426	18.4	1393	13.3	1441
25	1.0	778	1.0	1386	1.0	1400
W (kgf)	1524.2		1525.9		1382.9	
λ _{max} (cm)	50.0		50.0		50.0	
CPU TIME (sec) ¹⁾	10.8 (0.517)		20.9 (1.000)		28.3	
ITE ²⁾	20		50		53	
Move limit ³⁾	ξ ₁ = 0.35, ξ ₂ = 0.15		ξ ₂ = 0.60		ξ ₁ = 0.25, ξ ₂ = 0.15	
Active な制約条件	σ, λ		σ, λ		σ, λ	

1) 233MHz のパーソナルコンピュータによる計算時間
2) 最適解を得るために要した繰り返し回数
3) ξ₁: 断面積の改良幅を規定する move limit, ξ₂: Y の改良幅を規定する move limit

位 $\lambda_0=40\text{cm}$ として最適化を行った。Dual-M の場合には、31 部材トラスにおいても move limit ξ_1, ξ_2 を種々変化させて検討を行ったが最適解を得ることができなかった。このことに対し、Proposed-M の場合には、 $\xi_1=0.65, \xi_2=0.10$ とすることにより、26 回の反復改良により、 $Y_2=789.4\text{cm}, Y_3=1253.7\text{cm}, Y_4=1342.7\text{cm}, Y_5=1211.3\text{cm}, Y_6=762.8\text{cm}$ 、目的関数は 6018.1kgf (58.977kN)と図-5 の Proposed-M の場合と同様の最適形状が得られた。

以上の検討結果より、本論文で提案した最適設計法は、線形および任意の非線形の応力度-ひずみ関係を有する材料よりなるトラス構造物の最適な構造形状、部材配置および断面積の全域的な最適解を容易に決定できることが明らかとなった。

7. 結 論

本研究で得られた主な結論は以下の通りである。

- 1) コンプリメンタリーエネルギー最小化問題として定式化した線形・非線形トラス構造物の解析問題のラグランジュ関数を導入し、このラグランジュ関数の停留条件より導入される解析問題の必要条件式を形状変数(節点座標)について線形近似した近似の必要条件式を誘導し、この近似の必要条件式を応力度および変位の制約条件とともに最適化過程において考慮することにより、断面積のみならず構造形状(節点座標)をも設計変数として考慮することができることが明らかとなった。
- 2) 本研究で提案した最適設計法は、最適化過程において断面積および構造形状のみならず応力度および変位をも独立な設計変数として考慮しているため、最適化過程において応力度および変位の制約条件を応力度および変位について線形近似するのみで、応力度および変位の断面積および構造形状に関する感度係数を計算する必要がない。このことは提案した方法の計算上の大きな利点である。
- 3) 図-2の(b)に示したバイリニアな応力度-ひずみ関係の材料を考慮し、最適解において、主要な部材の弾性係数が線形領域の $1/200$ と微小な値となり、かつ応力度が応力度-ひずみ関係の折点近傍となる場合において、挙動の感度係数を用い双対法により最適化を行う方法では、感度係数を用いた近似の変位制約の精度が悪く真の変位量と近似の変位量の値が大きく異なったため最適解を得ることができなかったが、本研究で提案した最適設計法では、26~53 回程度の反復改良により全域的な最適解が得られた。このことより、本研究で提案した最適設計法は、図-2 の(b)に示したバイリニアな

非線形材料において、最適解の応力度が応力度-ひずみ関係の折点近傍となる場合においても適用することができるすぐれた方法であるということが出来る。

- 4) 本研究で提案した最適設計法により得られた最適解における目的関数の値は、挙動の感度係数を用い双対法により最適化を行う方法で得られた目的関数の値と比較して、 $0.11\%\sim 0.29\%$ の相対誤差により一致した解が得られたことより、本研究で提案した方法は信頼性の高い方法であることが明らかとなった。
- 5) 本研究で提案した最適設計法により得られた最適部材配置は、材料の種類、許容変位量、許容応力度の値に関わらず同一の最適部材配置となっていることにより、本研究で述べた方法により全域的な最適部材配置を決定することが明らかとなった。
- 6) 図-2 の(a)に示した非線形材料を考慮した計算例においては、提案した方法は 20 回~29 回の線形近似問題の解法の繰り返し回数により、また、挙動の感度係数を用い双対法により最適解を決定する方法では 27 回~50 回の双対法の繰り返し回数により最適解が得られていることより、提案した方法は、収束性にすぐれた方法であり、挙動の感度係数を用い双対法により最適化を行う方法の $51.7\%\sim 89.4\%$ の計算量にて能率的に構造形状および断面積の最適解を得ることができると明らかとなった。

8. あとがき

本論文において、コンプリメンタリーエネルギー最小化の原理に基づき線形・非線形挙動状態にあるトラス構造物の断面積のみならず構造形状の最適解を決定することができる最適設計法の方法論的研究を行い、その方法の有効性および信頼性を明らかにした。ところで、実際の構造物の設計にあたっては、経済性・製作・施工・美観などを考慮し総合的な観点から設計を行う必要がある。したがって、本論文で提案した方法を実際の構造物の設計に適用するにあたっては、まず、本研究で述べた方法により、座屈を考慮せず許容圧縮応力度および許容引張応力度を同一の値とし、最小断面積を小さい値に設定して最適化することにより、理論的に厳密な最適断面積および最適形状のみならず最適部材配置を決定する。つぎに、得られた最適設計諸元を参考とし、不安定構造物とならないための構造上必要となる部材に注意し、製作・施工・美観などを総合的に考慮して最終的な部材配置を決定し、上で得られた断面積およ

び構造形状を初期値として、実際の設計において用いるべき座屈をも考慮した許容応力度の制約条件を用い、再度最適化を行う。さらに、部材応力のバランスや断面積の分布を考え、できるだけ同一の断面に統一する方がより製作上有利となることが考えられるため、得られた最適解における断面積の分布より、同一の断面積とすることができる部材群を決定した後、それらの部材群の断面積を等しくするような新しい条件式を追加して最適化を行うことにより、実際の設計で利用し得る基本的な構造諸元を決定することができる。このように、本論文で述べた最適設計法は、実際の構造物の計画段階において、最も基本的な構造諸元を決定するための最適設計法の基本となるものである。

参考文献

- 1)Cohn,M.Z. and Maier,G.: *Engineering plasticity by mathematical programming*, Pergamon, Part II 7,8, 135-196,1979
- 2)Ishikawa, N.: Iterative Optimal Plastic Design of Steel Frames, 土木学会論文集, 第 237 号, pp109-119, 1975
- 3)澤田樹一郎・中村雄治・松尾彰: 反復線形計画法を用いた平面ラーメンの最適弾性・塑性設計法, 日本建築学会構造系論文集, 第 485 号, pp.117-125, 1996
- 4)大久保禎二・和多田康男・大森久義: エネルギー原理に基づく材料非線形トラス構造物の挙動の感度係数を用いない最適設計法に関する研究, 土木学会論文集, No.507/I-30, pp.77-87, 1995
- 5)谷脇一弘・大久保禎二: エネルギー原理に基づく箱形断面を有する非線形剛節骨組構造物の最適設計法, 土木学会論文集, 第 668 号/I-54, pp.65-81, 2001
- 6)大久保禎二・和多田康男: エネルギー原理および SQP によるトラス構造物の材料非線形解析法に関する研究, 土木学会論文集, 第 374 号/I-6, pp.427~436, 1986
- 7)Ohkubo,S., Watada,Y. and Fujiwaki,T. : Nonlinear Analysis of Truss by Energy Minimization, Computers & Structures, Vol.27, No.1, pp.129~145, 1987.
- 8)大久保禎二・谷脇一弘: 構造形状・部材の材種・断面寸法を設計変数としたトラス構造物の耐震最適設計法, 土木学会論文集, No.570/I-40, pp.47-61, 1997

(2002 年 4 月 19 日 受付)