

3次元弾性論による円形厚板の非定常熱曲げ解析

An Analysis for Transient Thermal Bending in a Circular Thick Plate Based on the Three-Dimensional Theory of Elasticity

何 耀昌*・大島俊之**

Yaochang HE and Toshiyuki OSHIMA

*学生会員 工修 北見工業大学大学院工学研究科システム工学専攻博士後期課程
(〒090-8507 北見市公園町 165 番地)

**フェロー 工博 北見工業大学教授 工学部土木開発工学科 (〒090-8507 北見市公園町 165 番地)

In this paper, the analysis of transient thermal bending is carried out by the three-dimensional theory of elasticity in cylindrical coordinates. Boundary conditions are simply supported along the edges and free at the top and the bottom faces of the circular plate. Loading conditions are partially sectorial thermoload of axially asymmetric distribution for z axis over the top face of the circular plate. The analysis is separated into a temperature field and a stress field. The temperature field is assumed to be a transient state and is rigorously deduced by a three-dimensional theory of heat transfer. Additional solutions are used to deal with initial terms in Fourier series which are required to satisfy the boundary conditions.

Key Words: three-dimensional theory of elasticity, thermo-elasticity, circular thick plate, axially asymmetric, transient thermal bending

1. 緒言

研究者は3次元弾性論および厚板理論による2つ大きな理論系統の中で、厚板曲げの問題に関する研究を精力的に行ってきた。これまでの厚板曲げに関する研究において、3次元弾性論による厚板曲げに関する解析には、矩形厚板に関する能町の研究、直交異方性矩形厚板に関する園田と堀川の研究および扇形厚板に関する奥村と三宅の研究など数多く報告されている。しかしながら、これらの研究はほとんど厚板に表面荷重が作用する時の厚板曲げに関する問題である。また、厚板理論による解析もほとんど厚板の表面に荷重が作用する時の厚板曲げに関する問題である。近年、Okumura らによる長方形厚板¹⁾、扇形厚板²⁾の非軸対称温度分布に関する定常熱曲げ問題、菅野らによる有限円柱³⁾、円柱孔を有する厚板⁴⁾の軸対称温度分布に関する非定常熱応力問題、野田らによる無限広さの平板⁵⁾、円板⁶⁾の軸対称温度分布に関する非定常熱応力問題などがいくつか報告されているが、温度荷重あるいは熱荷重を受ける厚板の熱曲げに関する研究は、現時点においても少ないようである。今後の厚板曲げの問題は表面荷重の代わりに、温度荷重あるいは熱荷重が作用する時の熱変形および熱応力を解析する熱曲げの問題になるかと考えられる。

上述した熱応力問題に関する研究は、軸対称あるいは定常熱応力問題であり、非軸対称温度分布に関する厚板の非定常熱曲げ解析には適用できない。

厚板の熱曲げ解析には、3次元弾性論による解析と厚板理論による解析との2通りの方法がある。厚板理論による解析は、解析方法および数値計算が容易であるが、近似的方法である。3次元弾性論による解析は、境界条件が変位成分および応力成分によって厳密に規定され、精確性の最も高い方法であるが、解析方法と数値計算に難点がある。一般的には、板厚の減少に伴い数値計算がだんだん困難となり、3次元弾性論による解析では、収束のよい結果を得ることが難しくなる。その解析と数値計算の困難さおよび複雑さのため、非軸対称温度分布に関する厚板の非定常熱曲げに関する解析はほとんど見あたらないようである。

3次元弾性論による解析の難点が、解析の困難さおよび数値計算の複雑さ以上に、その適用性を制限する大きな原因となる。簡明でしかも精度の高い解析方法を求めるために、現在見受けられる種々の厚板理論は生み出されてきた。近似解析法である厚板理論の精確性を検証する必要がある。さまざまな形状および境界条件における温度荷重あるいは熱荷重を受ける厚板の熱曲げに関する解析を行い、厚板の熱変形および熱応力を解明すると同時に、通常有限要素法などで数値解析的に実施される実務の解析結果の精度を検証することができるとともに、局部的に熱荷重を受ける構造応答問題の厳密解を与えることに意義がある。

本解析では、厚板の形状を円形として、板の上面に非軸対称分布の部分扇形加熱が作用する場合の非定常熱曲

げ解析を3次元弾性論より行った。解析は温度場の解析と応力場の解析との2つに分かれる。温度場は3次元熱伝導論により厳密に行った。温度場は非定常状態を考えているので、熱曲げとしては、非定常熱曲げになる。応力場は変位ポテンシャルを媒介した、Okumura ら⁷⁾の円柱座標における非軸対称問題の熱を考慮した解を用いて解析した。また、境界条件を満たすために、双曲線関数および変形 Bessel 関数を級数に展開する必要が生じ、その Fourier 級数展開の初期項を処理するために付加解を用いた。

2. 温度場

図-1に示したように、円柱座標 (r, θ, z) を用い、座標の原点を厚板の中央面の中心に置く。熱荷重として、円形厚板の上面に z 軸に対して非軸対称分布の部分扇形加熱が作用し、 $\theta = 0$ に対して、対称に分布するとし、熱供給幅を d 、中心角を 2ω とする。厚板の半径を a 、板厚を c とする。

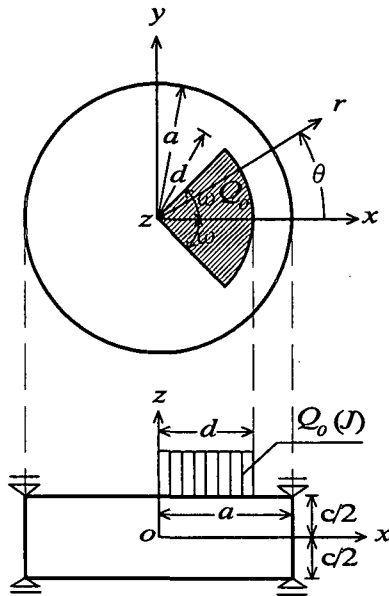


図-1 熱荷重を受ける円形厚板

温度場は、非定常状態を考えているので、熱伝導方程式は、次式で表される。

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

ここで、 T 、 t および κ は、それぞれ、温度、時刻および温度伝導率を表す。 ∇^2 は円柱座標における Laplace の演算子であり、次のように表される。

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2)$$

式(1)を変数分離の方法で解くと、解析に必要な解は、

次式となる。

$$T(r, \theta, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \cos m \theta J_m(\alpha_{ms} r) \left\{ G_{ms}^{(1)} \cosh \alpha_{ms} z + R_{ms}^{(1)} \sinh \alpha_{ms} z + \sum_{k=1}^{\infty} \left[T_{msk}^{(1)} \cos q_k z e^{-\kappa(\alpha_{ms}^2 + q_k^2)t} + S_{msk}^{(1)} \sin p_k z e^{-\kappa(\alpha_{ms}^2 + p_k^2)t} \right] \right\} \quad (3)$$

ここで、 $G_{ms}^{(1)}, \dots, S_{msk}^{(1)}$ は境界条件および初期条件から定められる未定定数であり、 $J_m(\alpha_{ms} r)$ は m 位の第1種の Bessel 関数であり、 p_k および q_k は k 番目の定数である。また、 α_{ms} は境界条件から定められる固有値である。

円形厚板の上面に非軸対称部分扇形加熱が作用し、下面において周囲媒体へ熱放散し、周辺において温度が0である場合を考えると、厚板の温度場の境界条件は、次のように表される。

$$r = a \text{ において } T = 0 \quad (4a)$$

$$z = c/2 \text{ において } \partial T / \partial z + hT = Q(r, \theta) / \lambda \quad (4b)$$

$$z = -c/2 \text{ において } \partial T / \partial z - hT = 0 \quad (4c)$$

ここで、 h および λ は、それぞれ、相対熱伝達率および熱伝導率を表す。また、 $Q(r, \theta)$ は、板の上面に作用する加熱を表し、次のようなものである。

$$Q(r, \theta) = \begin{cases} Q_0 [0 < r < d \text{ かつ } 0 \leq \theta < \omega, 2\pi - \omega < \theta \leq 2\pi] \\ 0 \text{ [上記以外の場合]} \end{cases} \quad (5)$$

初期条件として、時刻が0の時に温度が0の場合を考えると、その条件は、次式となる。

$$t = 0 \text{ において } T = 0 \quad (6)$$

境界条件(4b)を満たすために、 $Q(r, \theta)$ を Fourier 級数に展開し、また、境界条件(4b, c)および初期条件(6)を式(3)に適用すると、温度場は、次のように決定される。

$$T(r, \theta, z, t) = \frac{1}{2\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} e_{ms} \cos m \theta J_m(\alpha_{ms} r) \times \left\{ \frac{\cosh \alpha_{ms} z}{\Omega_{ms}} + \frac{\sinh \alpha_{ms} z}{\Gamma_{ms}} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[U_{msk} \cos q_k z \times e^{-\kappa(\alpha_{ms}^2 + q_k^2)t} - V_{msk} \sin p_k z e^{-\kappa(\alpha_{ms}^2 + p_k^2)t} \right] \right\} \quad (7)$$

ここで、

$$e_{ms} = 4Q_0 \sin m \omega \left[\frac{d \alpha_{ms} J_{m+1}(\alpha_{ms} d)}{\lambda_{ms}^2 \pi m J_{m+1}^2(\lambda_{ms})} + \frac{2m \sum_{i=0}^{\infty} J_{m+2(i+1)}(\alpha_{ms} d)}{\lambda_{ms}^2 \pi m J_{m+1}^2(\lambda_{ms})} \right] \quad (8)$$

Q_0 は無次元化のための一つ基準となる単位面積単位時間あたりの一定熱供給量である。また、

$$\Omega_{ms} = \alpha_{ms} \sinh \xi_{ms} + h \cosh \xi_{ms} \quad (9a)$$

$$\Gamma_{ms} = \alpha_{ms} \cosh \xi_{ms} + h \sinh \xi_{ms},$$

$$U_{msk} = \frac{q_k}{\alpha_{ms}^2 + q_k^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{ch}{2}\right) \sin \frac{q_k c}{2} + \frac{q_k c}{2} \cos \frac{q_k c}{2}},$$

$$V_{msk} = \frac{p_k}{\alpha_{ms}^2 + p_k^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{ch}{2}\right) \cos \frac{p_k c}{2} - \frac{p_k c}{2} \sin \frac{p_k c}{2}},$$

$$\xi_{ms} = \frac{\alpha_{ms} c}{2}, \quad \lambda_{ms} = \alpha_{ms} a \quad (9b \sim f)$$

境界条件(5a)より、次式を得る。

$$J_m(\lambda_{ms}) = 0 \quad (10)$$

ここで、 λ_{ms} は Bessel 関数 $J_m(\alpha_{ms} r)$ の第 s 番目の根である。

3. 応力場

円柱座標において、 r, θ および z 方向の変位成分をそれぞれ u_r, u_θ および u_z 、垂直応力成分をそれぞれ $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}$ および σ_{zz} およびせん断応力成分をそれぞれ $\sigma_{\theta z}, \sigma_{rz}$ および $\sigma_{r\theta}$ 、垂直ひずみをそれぞれ $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}$ および ε_{zz} およびせん断ひずみをそれぞれ $\varepsilon_{\theta z}, \varepsilon_{rz}$ および $\varepsilon_{r\theta}$ で表す。また、弾性係数、線膨張係数およびポアソン比をそれぞれ E, α および ν で表す。

熱を考慮した非軸対称問題の一解は、次のように表される。

$$2Gu_r = \frac{\partial}{\partial r} \left[\phi_0 + r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} + z \frac{\partial \phi_3}{\partial z} - 4(1-\nu)\phi_1 \right] + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi_3}{\partial \theta} + \frac{\partial \chi}{\partial r} \quad (11a)$$

$$2Gu_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\phi_0 + r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} + z \frac{\partial \phi_3}{\partial z} - 4(1-\nu)\phi_1 \right] - 2 \frac{\partial \psi_3}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \quad (11b)$$

$$2Gu_z = \frac{\partial}{\partial z} \left[\phi_0 + r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} + z \frac{\partial \phi_3}{\partial z} - 4(1-\nu)\phi_3 \right] + \frac{\partial \chi}{\partial z} \quad (11c)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi_0 &= 0, & \nabla^2 \phi_1 &= 0, & \nabla^2 \phi_3 &= 0, \\ \nabla^2 \psi_3 &= 0, & \nabla^2 \chi &= \frac{\alpha E}{1-\nu} T \end{aligned} \quad (12a \sim e)$$

また、 χ は熱弾性ポテンシャルである。

式(12a ~ d)を変数分離の方法で解くと、3次元弾性解の変位ポテンシャルが次のように求められる。

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos m\theta J_m(\alpha_{ms} r) \left(A_{ms}^{(1)} \cosh \alpha_{ms} z \right. \\ &\quad \left. + L_{ms}^{(1)} \sinh \alpha_{ms} z \right) + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=2,4}^{\infty} D_{mn}^{(1)} \cos m\theta \cos \beta_n z I_m(\beta_n r) \\ &\quad + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=1,3}^{\infty} D_{mj}^{(3)} \cos m\theta \sin \mu_j z I_m(\mu_j r) \end{aligned} \quad (13a)$$

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=2,4}^{\infty} F_{mn}^{(1)} \cos m\theta \cos \beta_n z I_m(\beta_n r) \\ &\quad + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=1,3}^{\infty} F_{mj}^{(3)} \cos m\theta \sin \mu_j z I_m(\mu_j r) \end{aligned} \quad (13b)$$

$$\begin{aligned} \phi_3 &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos m\theta J_m(\alpha_{ms} r) \left(C_{ms}^{(1)} \cosh \alpha_{ms} z \right. \\ &\quad \left. + M_{ms}^{(1)} \sinh \alpha_{ms} z \right) \end{aligned} \quad (13c)$$

$$\begin{aligned} \psi_3 &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin m\theta J_m(\alpha_{ms} r) \left(B_{ms}^{(1)} \cosh \alpha_{ms} z \right. \\ &\quad \left. + G_{ms}^{(1)} \sinh \alpha_{ms} z \right) + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=2,4}^{\infty} E_{mn}^{(1)} \sin m\theta \cos \beta_n z I_m(\beta_n r) \\ &\quad + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=1,3}^{\infty} E_{mj}^{(3)} \sin m\theta \sin \mu_j z I_m(\mu_j r) \end{aligned} \quad (13d)$$

ここで、

$$\beta_n = \frac{n\pi}{c} (n = 2, 4, 6, \dots), \quad \mu_j = \frac{j\pi}{c} (j = 1, 3, 5, \dots) \quad (14a, b)$$

また、 $A_{ms}^{(1)}, \dots, E_{mj}^{(3)}$ は境界条件によって定められる未定定数であり、 $I_m(\cdot)$ は、 m 位の第1種の変形 Bessel 関数である。

境界条件を満たすために、Fourier 級数に展開する必要が生じ、 $n=0$ の初期項を持った Fourier 級数展開となるので、 $n=0$ の初期項を処理する解が必要になる。これらの付加解は、次のように表される。

$$\begin{aligned} \phi_{0,0} &= \sum_{m=2}^{\infty} D_{m0}^{(1)} \cos m\theta r^m \\ &\quad - \sum_{m=1}^{\infty} m F_{m0}^{(1)} \cos m\theta \left[\frac{r^{m+2}}{2} - (m+1)r^m z^2 \right] \end{aligned} \quad (15a)$$

$$\begin{aligned} \phi_{1,0} &= F_{00}^{(1)} \left(\frac{r^2}{2} - z^2 \right) \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} F_{m0}^{(1)} \cos m\theta \left[\frac{r^{m+2}}{2} - (m+1)r^m z^2 \right] \end{aligned} \quad (15b)$$

$$\psi_{3,0} = 2(1-\nu) \sum_{m=1}^{\infty} F_{m0}^{(1)} \sin m\theta \left[\frac{r^{m+2}}{2} - (m+1)r^m z^2 \right] \quad (15c)$$

熱を考慮した Hooke の法則は、次のように表される。

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2G \left(\varepsilon_{rr} + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right) - \frac{\alpha ET}{1-2\nu}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= 2G \left(\varepsilon_{\theta\theta} + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right) - \frac{\alpha ET}{1-2\nu}, \\ \sigma_{zz} &= 2G \left(\varepsilon_{zz} + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right) - \frac{\alpha ET}{1-2\nu}, \\ \sigma_{\theta z} &= 2G \varepsilon_{\theta z}, \quad \sigma_{rz} = 2G \varepsilon_{rz}, \quad \sigma_{r\theta} = 2G \varepsilon_{r\theta} \end{aligned} \quad (16a \sim f)$$

熱弾性ポテンシャル χ は、次式のように求められる。

$$\chi = \frac{\alpha E}{4\lambda(1-\nu)} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} e_{ms} \cos m\theta J_m(\alpha_{ms}r) \left\{ \frac{z}{\alpha_{ms}} \left(\frac{\sinh \alpha_{ms}z}{\Omega_{ms}} + \frac{\cosh \alpha_{ms}z}{\Gamma_{ms}} \right) + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{U_{msk}}{\alpha_{ms}^2 + q_k^2} \cos q_k z e^{-\kappa(\alpha_{ms}^2 + q_k^2)t} - \frac{V_{msk}}{\alpha_{ms}^2 + p_k^2} \sin p_k z e^{-\kappa(\alpha_{ms}^2 + p_k^2)t} \right] \right\} \quad (17)$$

変位および応力成分には、変位ポテンシャルの式 (13a, c, d) および熱弾性ポテンシャルの式 (17), 式 (13a, b, d) および式 (15a ~ c) からの得られる量にそれぞれ (1), (2) および (0) の肩添字を付する。求める解は、この3つの解を加えたものであり、次のような式で表される。

$$2Gu_r = 2Gu_r^{(1)} + 2Gu_r^{(2)} + 2Gu_r^{(0)}, \quad \dots, \quad \sigma_{r\theta} = \sigma_{r\theta}^{(1)} + \sigma_{r\theta}^{(2)} + \sigma_{r\theta}^{(0)} \quad (18)$$

変位ポテンシャルの式 (13a ~ d) および式 (15a ~ c) を解 (11a ~ c) に代入すれば、変位成分は求められる。紙面数を節約するため、変位成分については、 u_z のみを示す。

$$2Gu_z^{(1)} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \alpha_{ms} \cos m\theta J_m(\alpha_{ms}r) \times \left\{ \left[A_{ms}^{(1)} - (3-4\nu)C_{ms}^{(1)} \right] \sinh \alpha_{ms}z + \left[L_{ms}^{(1)} - (3-4\nu)M_{ms}^{(1)} \right] \cosh \alpha_{ms}z + C_{ms}^{(1)}\alpha_{ms}z \cosh \alpha_{ms}z + M_{ms}^{(1)}\alpha_{ms}z \sinh \alpha_{ms}z \right\} + \frac{\alpha E e_{ms}}{4\lambda(1-\nu)\alpha_{ms}^2} \left\{ \frac{\sinh \alpha_{ms}z + \alpha_{ms}z \cosh \alpha_{ms}z}{\Omega_{ms}} + \frac{\cosh \alpha_{ms}z + \alpha_{ms}z \sinh \alpha_{ms}z}{\Gamma_{ms}} - 4\alpha_{ms} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{U_{msk}q_k}{\alpha_{ms}^2 + q_k^2} \sin q_k z e^{-\kappa(\alpha_{ms}^2 + q_k^2)t} + \frac{V_{msk}p_k}{\alpha_{ms}^2 + p_k^2} \cos p_k z e^{-\kappa(\alpha_{ms}^2 + p_k^2)t} \right] \right\} \quad (19a)$$

$$2Gu_z^{(2)} = - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=2,4}^{\infty} \beta_n \cos m\theta \sin \beta_n z \times \left\{ D_{mn}^{(1)} I_m(\beta_n r) + F_{mn}^{(1)} [m I_m(\beta_n r) + \beta_n r I_{m+1}(\beta_n r)] \right\} + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=1,3}^{\infty} \mu_j \cos m\theta \cos \mu_j z \left\{ D_{mj}^{(3)} I_m(\mu_j r) + F_{mj}^{(3)} [m I_m(\mu_j r) + \mu_j r I_{m+1}(\mu_j r)] \right\} \quad (19b)$$

$$2Gu_z^{(0)} = 0 \quad (19c)$$

応力成分は、変位成分よりひずみ成分を求め、円柱座標における熱を考慮した Hooke の法則を用いることにより求められる。紙面数を節約するため、応力成分については、 σ_z のみを示す。

$$\sigma_z^{(1)} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\alpha_{ms}^2}{2} \cos m\theta \left\{ J_{m-1}(\alpha_{ms}r) \left[A_{ms}^{(1)} + B_{ms}^{(1)} - (1-2\nu)C_{ms}^{(1)} \right] \sinh \alpha_{ms}z + \left[L_{ms}^{(1)} + G_{ms}^{(1)} - (1-2\nu)M_{ms}^{(1)} \right] \cosh \alpha_{ms}z + C_{ms}^{(1)}\alpha_{ms}z \cosh \alpha_{ms}z + M_{ms}^{(1)}\alpha_{ms}z \sinh \alpha_{ms}z + A_{mskz} \right\} - J_{m+1}(\alpha_{ms}r) \left\{ \left[A_{ms}^{(1)} - B_{ms}^{(1)} - (1-2\nu)C_{ms}^{(1)} \right] \sinh \alpha_{ms}z + \left[L_{ms}^{(1)} - G_{ms}^{(1)} - (1-2\nu)M_{ms}^{(1)} \right] \cosh \alpha_{ms}z + C_{ms}^{(1)}\alpha_{ms}z \cosh \alpha_{ms}z + M_{ms}^{(1)}\alpha_{ms}z \sinh \alpha_{ms}z + A_{mskz} \right\} \quad (20a)$$

ここで、

$$A_{mskz} = \frac{\alpha E e_{ms}}{4\lambda(1-\nu)\alpha_{ms}^2} \left\{ \frac{1}{\Omega_{ms}} (\sinh \alpha_{ms}z + \alpha_{ms}z \cosh \alpha_{ms}z) + \frac{1}{\Gamma_{ms}} (\cosh \alpha_{ms}z + \alpha_{ms}z \sinh \alpha_{ms}z) - 4\alpha_{ms} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{U_{msk}q_k}{\alpha_{ms}^2 + q_k^2} \sin q_k z e^{-\kappa(\alpha_{ms}^2 + q_k^2)t} + \frac{V_{msk}p_k}{\alpha_{ms}^2 + p_k^2} \cos p_k z e^{-\kappa(\alpha_{ms}^2 + p_k^2)t} \right] \right\} \quad (21)$$

$$\sigma_z^{(2)} = - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=2,4}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{2} \cos m\theta \sin \beta_n z \times \left\{ D_{mn}^{(1)} [I_{m-1}(\beta_n r) + I_{m+1}(\beta_n r)] + F_{mn}^{(1)} [m - 2(1-\nu)] \times I_{m-1}(\beta_n r) - [m + 2(1-\nu)] I_{m+1}(\beta_n r) + 2\beta_n r I_m(\beta_n r) \right\} + E_{mn}^{(1)} \frac{2m}{\beta_n r} I_m(\beta_n r) \left\{ + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=1,3}^{\infty} \frac{\mu_j^2}{2} \cos m\theta \cos \mu_j z \times \left\{ D_{mj}^{(3)} [I_{m-1}(\mu_j r) + I_{m+1}(\mu_j r)] + F_{mj}^{(3)} [m - 2(1-\nu)] \times I_{m-1}(\mu_j r) - [m + 2(1-\nu)] I_{m+1}(\mu_j r) + 2\mu_j r I_m(\mu_j r) \right\} + E_{mj}^{(3)} \frac{2m}{\mu_j r} I_m(\mu_j r) \right\} \quad (20b)$$

$$\sigma_z^{(0)} = 0 \quad (20c)$$

4. 境界条件および部分未定数の消去

力学的境界条件として、円形厚板の上、下面を自由とし、周辺を単純支持とすると、境界条件は次の様になる。

$$z = \pm c/2 \text{ において } \sigma_{zr} = 0, \sigma_{z\theta} = 0, \sigma_{zz} = 0 \quad (22a \sim c)$$

$$r = a \text{ において } u_z = 0, u_\theta = 0, \sigma_{rr} = 0 \quad (23a \sim c)$$

境界条件(22a) および(22b)をそれぞれ応力成分 $\sigma_{rr}^{(i)}$ および $\sigma_{z\theta}^{(i)}$ に代入すると、未定定数の間に次の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} B_{ms}^{(i)} &= 0, \quad G_{ms}^{(i)} = 0 \quad (24a, b) \\ L_{ms}^{(i)} &= (1 - 2\nu - \xi_{ms} \tanh \xi_{ms}) M_{ms}^{(i)} \\ &\quad - \frac{\alpha E e_{ms}}{4\lambda(1-\nu)\alpha_{ms}^2} \left[\frac{1}{\Gamma_{ms}} (1 + \xi_{ms} \tanh \xi_{ms}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{4\alpha_{ms}}{\cosh \xi_{ms}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{V_{msk} p_k}{\alpha_{ms}^2 + p_k^2} \cos \frac{p_k c}{2} e^{-\kappa(a_{ms}^2 + p_k^2)t} \right] \quad (24c) \\ A_{ms}^{(i)} &= (1 - 2\nu - \xi_{ms} \coth \xi_{ms}) C_{ms}^{(i)} \\ &\quad - \frac{\alpha E e_{ms}}{4\lambda(1-\nu)\alpha_{ms}^2} \left[\frac{1}{\Omega_{ms}} (1 + \xi_{ms} \coth \xi_{ms}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{4\alpha_{ms}}{\sinh \xi_{ms}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_{msk} q_k}{\alpha_{ms}^2 + q_k^2} \sin \frac{q_k c}{2} e^{-\kappa(a_{ms}^2 + q_k^2)t} \right] \quad (24d) \end{aligned}$$

次に、 $J_m(\lambda_{ms}) = 0$ に留意して、境界条件(23a)を変位成分 u_z に代入すると、整理して、次の関係式が得られる。

$$D_{mn}^{(i)} = -(m + \beta_n a y_{mn}) F_{mn}^{(i)} \quad (25a)$$

$$D_{mj}^{(3)} = -(m + \mu_j a y_{mj}) F_{mj}^{(3)} \quad (25b)$$

$$\text{ここで, } y_{mn} = \frac{I_{m+1}(\beta_n a)}{I_m(\beta_n a)}, \quad y_{mj} = \frac{I_{m+1}(\mu_j a)}{I_m(\mu_j a)} \quad (26a, b)$$

未定定数の間の関係式(24a ~ d) および(25a, b)をいまままで求めたすべての未定定数を含む変位および応力成分に代入すれば、部分未定定数を消去した変位および応力成分が得られる。例として、 u_θ を示す。

$$\begin{aligned} 2Gu_\theta^{(i)} &= - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=2,4}^{\infty} \alpha_{ms} \sin m\theta \frac{m}{\alpha_{ms} r} J_m(\alpha_{ms} r) \\ &\quad \times \left\{ [(1 - 2\nu - \xi_{ms} \coth \xi_{ms}) \cosh \alpha_{ms} z + \alpha_{ms} z \sinh \alpha_{ms} z] C_{ms}^{(i)} \right. \\ &\quad + [(1 - 2\nu - \xi_{ms} \tanh \xi_{ms}) \sinh \alpha_{ms} z + \alpha_{ms} z \cosh \alpha_{ms} z] M_{ms}^{(i)} \\ &\quad - \frac{\alpha E e_{ms}}{4\lambda(1-\nu)\alpha_{ms}^2} \left\{ \frac{1}{\Omega_{ms}} [(1 + \xi_{ms} \coth \xi_{ms}) \cosh \alpha_{ms} z \right. \\ &\quad \left. - \alpha_{ms} z \sinh \alpha_{ms} z] + \frac{1}{\Gamma_{ms}} [(1 + \xi_{ms} \tanh \xi_{ms}) \sinh \alpha_{ms} z \right. \\ &\quad \left. - \alpha_{ms} z \cosh \alpha_{ms} z] - 4\alpha_{ms}^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{U_{msk}}{\alpha_{ms}^2 + q_k^2} \right. \right. \\ &\quad \times \left(\frac{\cosh \alpha_{ms} z}{\sinh \xi_{ms}} \frac{H}{\lambda_{ms}} \frac{a}{c} \cos \frac{q_k c}{2} + \cos q_k z \right) e^{-\kappa(a_{ms}^2 + q_k^2)t} \\ &\quad \left. - \frac{V_{msk}}{\alpha_{ms}^2 + p_k^2} \left(\frac{\sinh \alpha_{ms} z}{\cosh \xi_{ms}} \frac{H}{\lambda_{ms}} \frac{a}{c} \sin \frac{p_k c}{2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sin p_k z \right) e^{-\kappa(a_{ms}^2 + p_k^2)t} \right] \left. \right\} \quad (27a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2Gu_\theta^{(2)} &= - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=2,4}^{\infty} \frac{\beta_n}{2} \sin m\theta \cos \beta_n z \left\{ F_{mn}^{(i)} [\Delta_{mn}^{(i)} I_{m-1}(\beta_n r) \right. \\ &\quad \left. + \Delta_{mn}^{(2)} I_{m+1}(\beta_n r)] + 2E_{mn}^{(i)} [I_{m-1}(\beta_n r) + I_{m+1}(\beta_n r)] \right\} \\ &\quad - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=1,3}^{\infty} \frac{\mu_j}{2} \sin m\theta \sin \mu_j z \left\{ F_{mj}^{(3)} [\Delta_{mj}^{(i)} I_{m-1}(\mu_j r) \right. \\ &\quad \left. + \Delta_{mj}^{(2)} I_{m+1}(\mu_j r)] + 2E_{mj}^{(3)} [I_{m-1}(\mu_j r) + I_{m+1}(\mu_j r)] \right\} \quad (27b) \end{aligned}$$

ここで、 $\Delta_{mn}^{(i)}$ 、 $\Delta_{mn}^{(2)}$ 、 $\Delta_{mj}^{(i)}$ および $\Delta_{mj}^{(2)}$ は、それぞれ、 m 、 n および m 、 j 番目の定数であり、それらの表示については省略する。

$$\begin{aligned} 2Gu_\theta^{(0)} &= - \sum_{m=2}^{\infty} D_{m0}^{(i)} m \sin m\theta r^{m-1} \\ &\quad - \sum_{m=1}^{\infty} F_{m0}^{(i)} (m + 4 - 4\nu) \sin m\theta r^{m+1} \quad (27c) \end{aligned}$$

5. 未定定数の連立方程式

いままでの段階で定められていない未定定数は、 $C_{ms}^{(i)}$ 、 $M_{ms}^{(i)}$ 、 $F_{mn}^{(i)}$ 、 $E_{mn}^{(i)}$ 、 $F_{mj}^{(3)}$ 、 $E_{mj}^{(3)}$ 、 $D_{m0}^{(i)}$ 、 $F_{m0}^{(i)}$ および $F_{00}^{(i)}$ である。これまで導いた解は、自動的に境界条件(23c) および(24b, c)を満足していない。これらの境界条件を満足させるためには、Fourier およびBessel展開を用いる必要がある。次に、未定定数の連立方程式について述べる。

まず、 $r = a$ をそれぞれ $\sigma_{rr}^{(i)}$ 、 $\sigma_{rr}^{(2)}$ および $\sigma_{rr}^{(0)}$ に代入すれば、次の式となる。

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(i)}|_{r=a} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=2,4}^{\infty} \cos m\theta \frac{1}{\lambda_{ms}} J_{m+1}(\lambda_{ms}) \left\{ [(1 - 2\nu \right. \\ &\quad \left. - \xi_{ms} \coth \xi_{ms}) \cosh \alpha_{ms} z + \alpha_{ms} z \sinh \alpha_{ms} z] C_{ms}^{(i)} \alpha_{ms}^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha E e_{ms}}{4\lambda(1-\nu)} \left\{ \frac{1}{\Omega_{ms}} [(1 + \xi_{ms} \coth \xi_{ms}) \cosh \alpha_{ms} z \right. \right. \\ &\quad \left. - \alpha_{ms} z \sinh \alpha_{ms} z] - 4\alpha_{ms}^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_{msk}}{\alpha_{ms}^2 + q_k^2} \left(\frac{\cosh \alpha_{ms} z}{\sinh \xi_{ms}} \right. \right. \\ &\quad \times \frac{H}{\lambda_{ms}} \frac{a}{c} \cos \frac{q_k c}{2} + \cos q_k z \left. \right) e^{-\kappa(a_{ms}^2 + q_k^2)t} \left. \right\} \\ &\quad \left. + [(1 - 2\nu - \xi_{ms} \tanh \xi_{ms}) \sinh \alpha_{ms} z + \alpha_{ms} z \cosh \alpha_{ms} z] \right. \\ &\quad \times M_{ms}^{(i)} \alpha_{ms}^2 - \frac{\alpha E e_{ms}}{4\lambda(1-\nu)} \left\{ \frac{1}{\Gamma_{ms}} [(1 + \xi_{ms} \tanh \xi_{ms}) \sinh \alpha_{ms} z \right. \\ &\quad \left. - \alpha_{ms} z \cosh \alpha_{ms} z] + 4\alpha_{ms}^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{V_{msk}}{\alpha_{ms}^2 + p_k^2} \left(\frac{\sinh \alpha_{ms} z}{\cosh \xi_{ms}} \right. \right. \\ &\quad \times \frac{H}{\lambda_{ms}} \frac{a}{c} \sin \frac{p_k c}{2} + \sin p_k z \left. \right) e^{-\kappa(a_{ms}^2 + p_k^2)t} \left. \right\} \left. \right\} \quad (28a) \end{aligned}$$

$$\sigma_{rr}^{(2)}|_{r=a} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=2,4}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{2} \cos m\theta \cos \beta_n z$$

$$\times \left[F_{mn}^{(1)} \Phi_{mn} + 2E_{mn}^{(1)} \Theta_{mn} \right] + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=1,3}^{\infty} \frac{\mu_j^2}{2} \cos m\theta \sin \mu_j z \\ \times \left[F_{mj}^{(3)} \Phi_{mj} + 2E_{mj}^{(3)} \Theta_{mj} \right] \quad (28b)$$

$$\sigma_{rr}^{(0)} \Big|_{r=a} = \sum_{m=2}^{\infty} D_{m0}^{(1)} m(m-1) \cos m\theta a^{m-2} \\ + \sum_{m=1}^{\infty} F_{m0}^{(1)} (m+1)(m-2) \cos m\theta a^m - 2F_{00}^{(1)} \quad (28c)$$

ここで、 Φ_{mn} 、 Θ_{mn} および Φ_{mj} 、 Θ_{mj} は、それぞれ、 m 、 n および m 、 j 番目の定数であり、それらの表示については省略する。

式(28a)に含まれる z に関する奇関数および偶関数をそれぞれ Fourier 級数に展開する。それらの Fourier 級数の展開式を式(28a)に代入すれば、Fourier 級数に展開した $\sigma_{rr}^{(i)}$ が得られる。境界条件(23c)をその $\sigma_{rr}^{(i)}$ と式(28b~c)を加えた σ_{rr} に代入すると、整理して、次式となる。

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{0s}} J_1(\lambda_{0s}) \left[C_{0s}^{(1)} \alpha_{0s}^2 t_{00}^{(1)} - \frac{\alpha E e_{0s}}{4\lambda(1-\nu)} t_{00}^{(2)} \right] - 2F_{00}^{(1)} \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \cos m\theta \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{ms}} J_{m+1}(\lambda_{ms}) \left[C_{ms}^{(1)} \alpha_{ms}^2 t_{m0}^{(1)} - \frac{\alpha E e_{ms}}{4\lambda(1-\nu)} t_{m0}^{(2)} \right] \right. \\ \left. + D_{m0}^{(1)} m(m-1) a^{m-2} + F_{m0}^{(1)} (m+1)(m-2) a^m \right\} \\ + \sum_{m=0n=2,4}^{\infty} \cos m\theta \cos \beta_n z \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{ms}} J_{m+1}(\lambda_{ms}) \left[C_{ms}^{(1)} \alpha_{ms}^2 t_{mn}^{(1)} - \frac{\alpha E e_{ms}}{4\lambda(1-\nu)} t_{mn}^{(2)} \right] + \frac{\beta_n^2}{2} [F_{mn}^{(1)} \Phi_{mn} + 2E_{mn}^{(1)} \Theta_{mn}] \right\} \\ + \sum_{m=0j=1,3}^{\infty} \cos m\theta \sin \mu_j z \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{ms}} J_{m+1}(\lambda_{ms}) \left[M_{ms}^{(1)} \alpha_{ms}^2 t_{mj}^{(1)} - \frac{\alpha E e_{ms}}{4\lambda(1-\nu)} t_{mj}^{(2)} \right] + \frac{\mu_j^2}{2} [F_{mj}^{(3)} \Phi_{mj} + 2E_{mj}^{(3)} \Theta_{mj}] \right\} = 0 \quad (29)$$

ここで、 $t_{mn}^{(i)}$ および $t_{mj}^{(i)}$ は、それぞれ、 m 、 n 、 s および m 、 j 、 s 番目の Fourier 係数であり、それらの表示については省略する。

式(29)より、次の式が得られる。

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{ms}} J_{m+1}(\lambda_{ms}) \left[C_{ms}^{(1)} \alpha_{ms}^2 t_{mn}^{(1)} - \frac{\alpha E e_{ms}}{4\lambda(1-\nu)} t_{mn}^{(2)} \right] \\ + F_{mn}^{(1)} \frac{\beta_n^2}{2} \Phi_{mn} + E_{mn}^{(1)} \beta_n^2 \Theta_{mn} = 0 \quad (m \geq 0) \quad (30a)$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{ms}} J_{m+1}(\lambda_{ms}) \left[M_{ms}^{(1)} \alpha_{ms}^2 t_{mj}^{(1)} - \frac{\alpha E e_{ms}}{4\lambda(1-\nu)} t_{mj}^{(2)} \right] \\ + F_{mj}^{(3)} \frac{\mu_j^2}{2} \Phi_{mj} + E_{mj}^{(3)} \mu_j^2 \Theta_{mj} = 0 \quad (m \geq 0) \quad (31a)$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{ms}} J_{m+1}(\lambda_{ms}) \left[C_{ms}^{(1)} \alpha_{ms}^2 t_{m0}^{(1)} - \frac{\alpha E e_{ms}}{4\lambda(1-\nu)} t_{m0}^{(2)} \right] \\ + D_{m0}^{(1)} m(m-1) a^{m-2} + F_{m0}^{(1)} (m+1)(m-2) a^m = 0 \quad (m \geq 1) \quad (32a)$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{0s}} J_1(\lambda_{0s}) \left[C_{0s}^{(1)} \alpha_{0s}^2 t_{00}^{(1)} - \frac{\alpha E e_{0s}}{4\lambda(1-\nu)} t_{00}^{(2)} \right] - 2F_{00}^{(1)} = 0 \quad (33a)$$

次に、境界条件(23b)を変位成分 u_θ に代入すると、整理して、次の式が得られる。

$$F_{mn}^{(1)} [\Delta_{mn}^{(1)} I_{m-1}(\beta_n a) + \Delta_{mn}^{(2)} I_{m+1}(\beta_n a)] \\ + 2E_{mn}^{(1)} [I_{m-1}(\beta_n a) + I_{m+1}(\beta_n a)] = 0 \quad (m \geq 0) \quad (30b)$$

$$F_{mj}^{(3)} [\Delta_{mj}^{(1)} I_{m-1}(\mu_j a) + \Delta_{mj}^{(2)} I_{m+1}(\mu_j a)] \\ + 2E_{mj}^{(3)} [I_{m-1}(\mu_j a) + I_{m+1}(\mu_j a)] = 0 \quad (m \geq 0) \quad (31b)$$

$$D_{m0}^{(1)} \delta_m^* m a^{m-1} + F_{m0}^{(1)} (m+4-4\nu) a^{m+1} = 0 \quad (m \geq 1) \quad (32b)$$

ここで、

$$\delta_m^* = \begin{cases} 0 & m=1 \\ 1 & m \geq 2 \end{cases} \quad (34)$$

最後に、境界条件(22c)を応力成分 σ_{zz} に代入し、さらに、 $\sigma_{zz}|_{z=c/2} + \sigma_{zz}|_{z=-c/2}$ および $\sigma_{zz}|_{z=c/2} - \sigma_{zz}|_{z=-c/2}$ を作り、整理して、次の2つの式が得られる。

$$\sum_{m=0s=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{ms}^2 \cos m\theta J_m(\alpha_{ms} r) [C_{ms}^{(1)} \Lambda_{ms}^{(1)} + \Pi_{msk}^{(1)}] \\ + \sum_{m=0n=2,4}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \beta_n^2 \cos m\theta \cos \frac{\beta_n c}{2} F_{mn}^{(1)} [(2\nu - \beta_n a y_{mn}) I_m(\beta_n r) \\ + \beta_n r I_{m+1}(\beta_n r)] + \sum_{m=1}^{\infty} \cos m\theta F_{m0}^{(1)} 4\nu (m+1)^m + F_{00}^{(1)} 4\nu = 0 \quad (35a)$$

$$\sum_{m=0s=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{ms}^2 \cos m\theta J_m(\alpha_{ms} r) [M_{ms}^{(1)} \Lambda_{ms}^{(2)} + \Pi_{msk}^{(2)}] \\ + \sum_{m=0j=1,3}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \mu_j^2 \cos m\theta \sin \frac{\mu_j c}{2} F_{mj}^{(3)} \\ \times [(2\nu - \mu_j a y_{mj}) I_m(\mu_j r) + \mu_j r I_{m+1}(\mu_j r)] = 0 \quad (35b)$$

ここで、 $\Lambda_{ms}^{(1)}$ および $\Pi_{msk}^{(1)}$ は、それぞれ、 m 、 s および m 、 s 、 k 番目の定数であり、それらの表示については省略する。

式(35a)の左辺の2項目に含まれる第1種の変形 Bessel 関数、3項目に含まれる r に関する関数および4項目、式(35b)の左辺の2項目に含まれる第1種の変形 Bessel 関数を第1種の Bessel 関数に展開する。それらの Bessel 関数の展開式をそれぞれ式(35a)および式(35b)に代入すれば、整理して、次のような式になる。

$$\sum_{m=0s=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos m\theta J_m(\alpha_{ms} r) [C_{ms}^{(1)} \Lambda_{ms}^{(1)} + \Pi_{msk}^{(1)}] \alpha_{ms}^2 \\ + \sum_{n=2,4}^{\infty} \beta_n^2 \cos \frac{\beta_n c}{2} F_{mn}^{(1)} [(2\nu - \beta_n a y_{mn}) \nu_{ms}^{(1)} + \nu_{ms}^{(2)}] \\ + F_{m0}^{(1)} \delta_m^* a^m 4\nu (m+1) \nu_{ms}^{(3)} + \sum_{s=1}^{\infty} J_0(\alpha_{0s} r) F_{00}^{(1)} 4\nu \nu_{0s}^{(4)} = 0 \quad (36a)$$

$$\sum_{m=0s=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos m\theta J_m(\alpha_{ms} r) [M_{ms}^{(1)} \Lambda_{ms}^{(2)} + \Pi_{msk}^{(2)}] \alpha_{ms}^2$$

$$+ \sum_{j=1,3}^{\infty} \mu_j^2 \sin \frac{\mu_j c}{2} F_{mj}^{(3)} \left[(2\nu - \mu_j a y_{mj})_j v_{ms}^{(1)} + j v_{ms}^{(2)} \right] = 0 \quad (36b)$$

ここで、

$$\delta_m^{(1)} = \begin{cases} 0 & (m=0) \\ 1 & (m \geq 1) \end{cases} \quad (37)$$

また、 $v_{ms}^{(1)}$, $v_{ms}^{(2)}$ および $t_{ms}^{(1)}$ は、それぞれ、 m , n , s および m , j , s 番目の Bessel 展開の Fourier 係数であり、それらの表示については省略する。

式(36a)より、次式が得られる。

$$C_{ms}^{(1)} \alpha_{ms}^2 \Lambda_{ms}^{(1)} + \Pi_{msk}^{(1)} \alpha_{ms}^2 + \sum_{n=2,4}^{\infty} \beta_n^2 \cos \frac{\beta_n c}{2} F_{mn}^{(1)} \\ \times \left[(2\nu - \beta_n a y_{mn})_n v_{ms}^{(1)} + n v_{ms}^{(2)} \right] + F_{m0}^{(1)} a^m 4\nu(m+1) v_{ms}^{(3)} = 0 \\ (m \geq 0, m=0 \text{ のとき}, F_{m0}^{(1)} = F_{00}^{(1)}, v_{ms}^{(3)} = v_{0s}^{(4)}) \quad (30c)$$

式(36b)より、次式が得られる。

$$M_{ms}^{(1)} \alpha_{ms}^2 \Lambda_{ms}^{(2)} + \Pi_{msk}^{(2)} \alpha_{ms}^2 + \sum_{j=1,3}^{\infty} \mu_j^2 \sin \frac{\mu_j c}{2} F_{mj}^{(3)} \\ \times \left[(2\nu - \mu_j a y_{mj})_j v_{ms}^{(1)} + j v_{ms}^{(2)} \right] = 0 \quad (m \geq 0) \quad (31c)$$

ここまでは式(30a ~ c), 式(32a, b) および式(33a) より得られる未定定数 $C_{ms}^{(1)}$, $F_{mn}^{(1)}$, $D_{m0}^{(1)}$, $E_{mn}^{(1)}$, $F_{m0}^{(1)}$ および $F_{00}^{(1)}$ に関する 6 元連立 1 次方程式と式(31a ~ c) より得られる未定定数 $M_{ms}^{(1)}$, $F_{mj}^{(3)}$ および $E_{mj}^{(3)}$ に関する 3 元連立 1 次方程式が求められた。それらの連立方程式を反復法で数値的に解くと、未定定数が定められる。

6. 合応力および合モーメント

合応力および合モーメントは、次のように定義される。

$$T_{rr} = \int_{-c/2}^{c/2} \sigma_{rr} dz, T_{\theta\theta} = \int_{-c/2}^{c/2} \sigma_{\theta\theta} dz, \\ S_{r\theta} = -S_{\theta r} = \int_{-c/2}^{c/2} \sigma_{r\theta} dz, \\ Q_r = \int_{-c/2}^{c/2} \sigma_{rz} dz, Q_{\theta} = \int_{-c/2}^{c/2} \sigma_{\theta z} dz \quad (38a \sim e) \\ M_r = \int_{-c/2}^{c/2} z \sigma_{rr} dz, M_{\theta} = \int_{-c/2}^{c/2} z \sigma_{\theta\theta} dz, \\ M_{r\theta} = -M_{\theta r} = \int_{-c/2}^{c/2} (-z \sigma_{r\theta}) dz \quad (39a \sim c)$$

既に求めた応力成分を式(38a ~ e) および式(39a ~ c) に代入すれば、それぞれの合応力および合モーメントが求められる。例として、 Q_r を示す。

$$Q_r = - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} 2\alpha_{ms} \cos m\theta \left[\frac{m}{\alpha_{ms} r} J_m(\alpha_{ms} r) - J_{m+1}(\alpha_{ms} r) \right] \\ \times \left\{ \left[(1 + \xi_{ms} \tanh \xi_{ms}) \sinh \xi_{ms} - \xi_{ms} \cosh \xi_{ms} \right] M_{ms}^{(1)} \right. \\ \left. + \frac{\alpha E e_{ms}}{4\lambda(1-\nu)\alpha_{ms}^2} \left\{ \frac{(1 + \xi_{ms} \tanh \xi_{ms}) \sinh \xi_{ms} - \xi_{ms} \cosh \xi_{ms}}{\Gamma_{ms}} \right\} \right\}$$

$$+ 4\alpha_{ms} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{V_{msk}}{\alpha_{ms}^2 + p_k^2} \left(\tanh \xi_{ms} \frac{H}{c} + \alpha_{ms} \right) \sin \frac{p_k c}{2} \\ \times e^{-\kappa(\alpha_{ms}^2 + p_k^2)t'} \left\{ + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=1,3}^{\infty} \mu_j \cos m\theta \sin \frac{\mu_j c}{2} \right. \\ \left. \times \left\{ F_{mj}^{(3)} \left[\Delta_{mj}^{(3)} I_{m-1}(\mu_j r) - \Delta_{mj}^{(4)} I_{m+1}(\mu_j r) + 2\mu_j r I_m(\mu_j r) \right] \right. \right. \\ \left. \left. + E_{mj}^{(3)} \frac{2m}{\mu_j r} I_m(\mu_j r) \right\} \right\} \quad (40)$$

7. 無次元化

数値計算のために、未定定数、変位成分、応力成分、合応力および合モーメントを次のように置いて式の無次元化を図る。

$$\bar{C}_{ms}^{(1)} = \frac{C_{ms}^{(1)} \lambda \sinh \xi_{ms}}{\alpha E Q_0 a^3}, \quad \bar{F}_{mn}^{(1)}(\bar{E}_{mn}^{(1)}) = \frac{F_{mn}^{(1)}(E_{mn}^{(1)}) \lambda U_m(\beta_n a)}{\alpha E Q_0 a^3}, \\ \bar{D}_{m0}^{(1)} = \frac{D_{m0}^{(1)} \lambda a^{m-3}}{\alpha E Q_0}, \quad \bar{F}_{m0}^{(1)} = \frac{F_{m0}^{(1)} \lambda a^{m-1}}{\alpha E Q_0}, \quad \bar{F}_{00}^{(1)} = \frac{F_{00}^{(1)} \lambda}{\alpha E Q_0 a}, \\ \bar{M}_{ms}^{(1)} = \frac{M_{ms}^{(1)} \lambda \cosh \xi_{ms}}{\alpha E Q_0 a^3}, \quad \bar{F}_{mj}^{(3)}(\bar{E}_{mj}^{(3)}) = \frac{F_{mj}^{(3)}(E_{mj}^{(3)}) \lambda U_m(\mu_j a)}{\alpha E Q_0 a^3} \quad (41a \sim i)$$

$$\bar{u}_r(\bar{u}_{\theta}, \bar{u}_z) = \frac{u_r(u_{\theta}, u_z) \lambda}{\alpha E Q_0 a^2} \quad (42a \sim c)$$

$$\bar{\sigma}_{rr}(\bar{\sigma}_{\theta\theta}, \bar{\sigma}_{zz}, \bar{\sigma}_{rz}, \bar{\sigma}_{z\theta}, \bar{\sigma}_{r\theta}) = \frac{\sigma_{rr}(\sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \sigma_{rz}, \sigma_{z\theta}, \sigma_{r\theta}) \lambda}{\alpha E Q_0 a} \quad (43a \sim f)$$

$$\bar{Q}_r(\bar{Q}_{\theta}, \bar{T}_{rr}, \bar{T}_{\theta\theta}, \bar{S}_{r\theta}) = \frac{Q_r(Q_{\theta}, T_{rr}, T_{\theta\theta}, S_{r\theta}) \lambda}{\alpha E Q_0 a^2} \quad (44a \sim e)$$

$$\bar{M}_r(\bar{M}_{\theta}) = \frac{M_r(M_{\theta}) \lambda}{\alpha E Q_0 a^3} \quad (45a, b)$$

無次元化した連立方程式を反復法で解けば、未定定数が求められる。求められた未定定数を無次元化した変位成分、応力成分、合応力および合モーメントに代入すると、それらの値が得られる。

8. 数値計算結果と考察

数値計算は、図-1 に示したように、円形厚板が上面に部分扇形加熱を受けた場合について行った。用いた条件は、中心角 2ω を 0.6π , 熱供給幅比 d/a を 0.3, ピオ一数 H を 0.1, ポアソン比 ν を 0.3 とした。また、形状比 c/a を $1/2, 1/4, 1/8$ およびフーリエ数 t' を 0.0, 0.01, 0.1, 1.0, 50.0 とした場合を計算した。フーリエ数 $t' = 50.0$ の時は、定常状態であり、 $t' = 0.0$ の時は、初期条件を満たしているかどうかのチェックである。級数の項数は m については 70 項, s については 40 項, k につ

いては30項, n については偶数のみ20項および j については奇数のみ20項を取り計算した。厳密な級数解のため, 収束は極めて早い, 十分な項数を用いた。

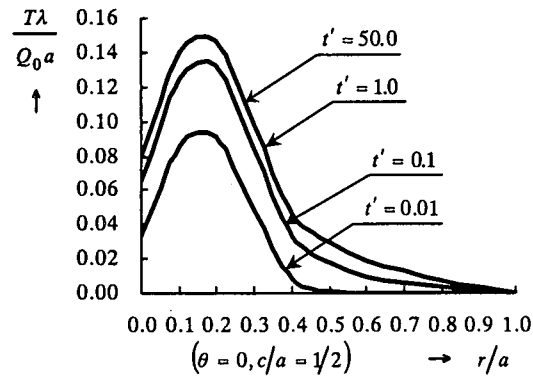


図-2 板の上面における温度分布

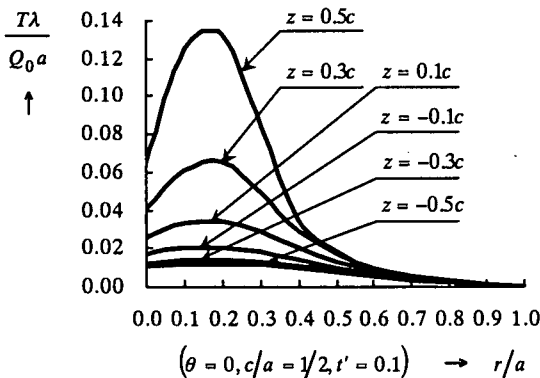


図-3 板の内部における温度分布

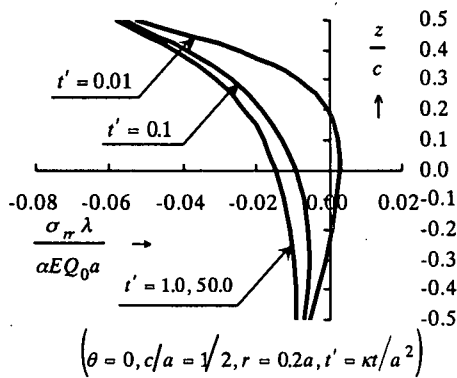


図-4 σ_r の板厚方向の分布

図-2には, 板の上面における温度分布を示した。フーリエ数 $t' = 1.0$ と $t' = 50.0$ の時, 温度分布がほとんど同じであることが分かる。つまり, フーリエ数 $t' = 1.0$ に達すると, 温度は定常状態になることを示す。非定常状態と定常状態と比較すると, 温度の変化仕方は類似して, 値の大きさが違いだけである。 r 方向における温度変化が部分加熱の分布境界付近で急激になっている。 $r = 0.4a$ 付近から, r の増加に伴い, ゆるやかに減少し,

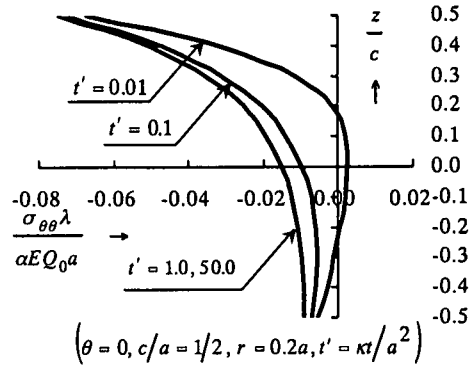


図-5 $\sigma_{\theta\theta}$ の板厚方向の分布

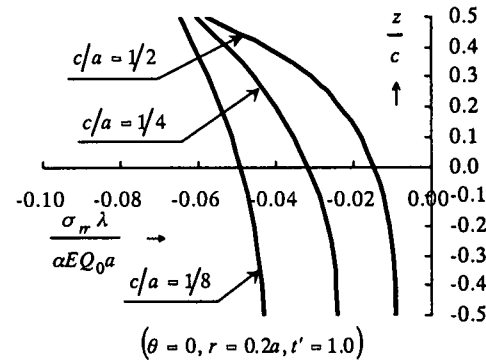


図-6 σ_r の板厚比の影響

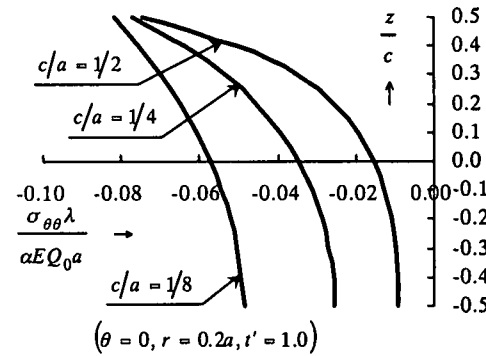


図-7 $\sigma_{\theta\theta}$ の板厚比の影響

周辺で0になる。板厚比による違いを見ると (図は示していない), 板厚比が小さいほど, 定常状態に達するのが早い。図-3には, 板の内部における温度分布を示した。板の上面の温度が一番高い, 上面から下面に下がるに伴い, 温度はだんだん低くなり, 下面が一番低い。フーリエ数の増加に伴い (図は示していない), 下面の温度は高くなり, 定常状態になると, 板の下面においても, 温度は比較的大きな値を示している。板の内部の r 方向における温度変化は上面と類似する。図-4および図-5には, それぞれ, $c/a = 1/2$ の場合の $\theta = 0$ および $r = 0.2a$ における σ_r および $\sigma_{\theta\theta}$ の板厚方向の分布を示した。 σ_r および $\sigma_{\theta\theta}$ ともに, フーリエ

数 t' が1.0に達すると、定常状態になり、応力の値が一番大きくなる。非定常状態と定常状態と比較すると、応力の変化仕方は類似して、値の大きさが違いだけである。板の上面の応力は下面より大きくなっている。分布は曲線となるが、フーリエ数 t' が0.01の時、板の中央面付近で正の応力であり、上、下面の付近で負の応力である。フーリエ数の増加に伴い、上面から下面まで負の応力となる。図-6および図-7には、それぞれ、 $\theta = 0$ および $r = 0.2a$ における σ_{rr} および $\sigma_{\theta\theta}$ の板厚比の影響を示した。板厚比による応力の違いを見ると、 σ_{rr} および $\sigma_{\theta\theta}$ ともに、板厚比が小さいほど、負の応力が大きく生じ、応力の変化がゆるやかとなり、応力分布はだんだん直線に近づく傾向がある。また、板厚比が大きいほど、最大値と最小値との差は、大きく出る。

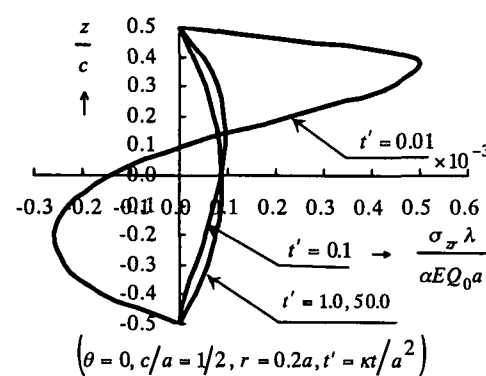


図-8 σ_{xr} の板厚方向の分布

図-8には、 $c/a = 1/2$ の場合の $\theta = 0$ および $r = 0.2a$ における σ_{xr} の板厚方向の分布を示した。フーリエ数 t' が1.0に達すると、定常状態になる。非定常状態場合は、変化が激しく、 $z = 0.4c$ 付近で正の最大値を、 $z = -0.2c$ 付近で負の最大値を示して、値も一番大きい。フーリエ数の増加に伴い、変化がゆるやかとなり、上面から下面まで正の応力となる。定常状態場合は、正の応力となり、値が小さくなる。板厚比が小さい場合、 σ_{xr} が0に近くなる。

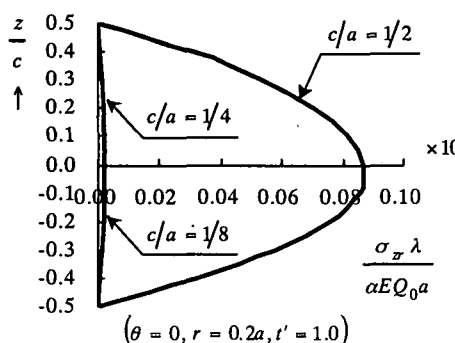


図-9 σ_{xr} の板厚比の影響

図-9には、 $\theta = 0$ および $r = 0.2a$ における σ_{xr} の板厚比の影響を示した。板厚比が小さい場合、定常状態にな

ると、 σ_{xr} が0に近くなるという結果を得る。板厚比が大きいほど値が大きくなり、 t' が0.01において、最大値の比に着目すると、板厚比 $1/2 : 1/4 : 1/8$ は約6.2:3.4:1になる。

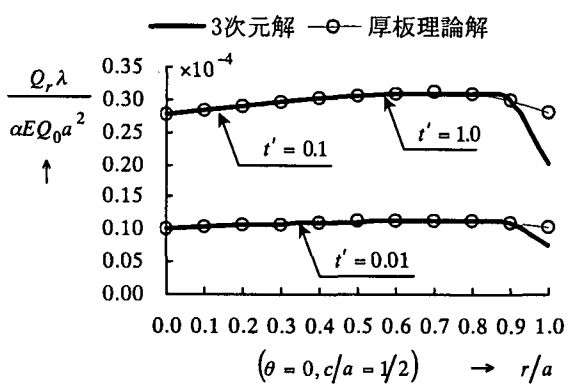


図-10 Q_r の分布

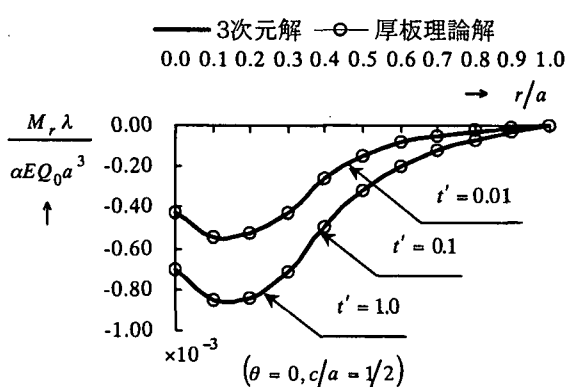


図-11 M_r の分布

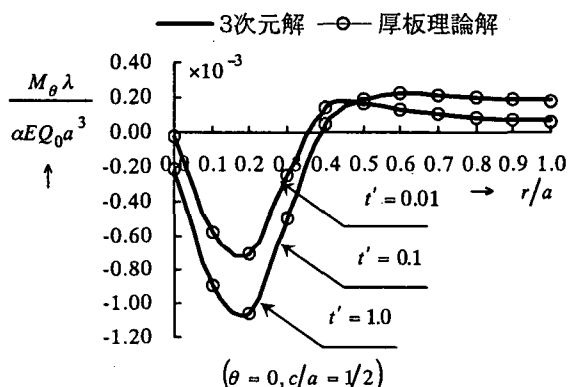


図-12 M_θ の分布

図-10から図-12には、それぞれ、 $c/a = 1/2$ の場合の $\theta = 0$ における Q_r 、 M_r および M_θ の r 方向の分布および3次元弾性論による結果と一厚板理論による結果との比較を示した。せん断力 Q_r および曲げモーメント M_r 、 M_θ ともに、フーリエ数 t' が0.1に達すると、定常状態になる。非定常状態と定常状態と比較すると、せん断力およびモーメントの変化仕方は類似して、値の大きさが違いだけである。せん断力および曲げモーメントは温度お

よび応力より定常状態になるのが早いことがわかる。また、板厚比が小さいほど、 t' が 0.01 と 0.1 時の値の差は小さくなる。板厚比 1/8 では (図は示していない)、 t' が 0.01, 0.1 および 1.0 の時 3 つ場合の値がほとんど同じになる。この現象が起こる原因は、せん断力および曲げモーメントが、板厚方向の変化 z に関係なく、板の厚さに関係しないためと考えられる。曲げモーメント M_θ の r 方向における変化は、板の中心から $r = 0.18a$ 付近まで負の値で増加し、 $r = 0.18a$ 付近で負の最大値になり、 $r = 0.38a$ 付近で 0 になり、 $r = 0.6a$ 付近で正の最大値になる。その後、 r の増加に伴い、ゆるやかに減少する。このような M_θ の変化の仕方は、表面荷重では起こらず熱曲げ特有のものである。図に示すように、3次元弾性論による結果と一厚板理論による結果とはきわめてよく合致している。 $c/a = 1/2$ の場合の $\theta = 0$ および $t' = 1.0$ において、板の周辺における結果を除いて、この 2 通りの解析方法による結果の誤差はわずかに 0.60% 以下である。

9. 結語

本解析は、熱荷重を受ける円形厚板を非軸対称問題として 3次元弾性論により解析し、円形厚板の温度分布および応力分布を明らかにしたものである。解析の結果から、以下の結論が得られる。

- 1) 応力 σ_r および $\sigma_{\theta\theta}$ は、フーリエ数 t' が 1.0 に達すると、定常状態になる。非定常状態場合の変化の仕方は、定常状態場合と類似して、値の大きさが違いだけである。板の上面の応力は下面より大きい。板厚比が小さいほど、負の応力が大きく生じるが、分布はいずれも曲線となる。最大値と最小値との差は、板厚比が大きいほど、大きく出る。
- 2) 応力 σ_x は、フーリエ数 t' が 1.0 に達すると、定常状態になり、曲線の分布となる。非定常状態場合は、変化が激しく、板の上半部が正の応力であり、下半部が負の応力である。その値も一番大きい。定常状態場合は、正の応力となり、値が小さくなる。板厚比が小さい場合、 σ_x が 0 に近くなる。
- 3) せん断力および曲げモーメントは、フーリエ数 t' が 0.1 に達すると、定常状態になり、温度および応力より定常状態になるのが早い。非定常状態場合の変化の仕方は、定常状態場合と類似して、値の大きさが違いだけである。板厚比が小さいほど、 t' が 0.01 と 0.1 時の値の差は小さくなる。一定の板厚比に達すると、加熱の最初から定常状態になるといえる。分布は曲線となる。

- 4) 温度は、フーリエ数 $t' = 1.0$ に達すると、定常状態になる。非定常状態場合の変化の仕方は、定常状態場合と類似して、値の大きさが違いだけである。 r 方向における温度変化が部分加熱の分布境界付近で急激になっている。 $r = 0.4a$ 付近から、 r の増加に伴い、ゆるやかに減少し、周辺で 0 になる。板厚比が小さいほど、定常状態に達するのが早い。

謝辞：本研究を行うにあたって、北見工業大学奥村勇教授にご助言をいただきました。また、室蘭工業大学松岡健一教授には有益なコメントをいただきました。ここに記して感謝申し上げます。

参考文献

- 1) Isamu A. Okumura : Steady-state thermal bending of thick rectangular plates, *J. Engrg. Mech., ASCE*, 122(6), pp. 512~520, 1996.
- 2) Okumura, I. A. , Honda, Y. , and Yoshimura, J. : An analysis for thermal bending stresses in an annular sector plate by the theory of moderately thick plates, *Struct. Engrg. / Earthquake Engrg.* , 6(2), pp. 347s~356s, 1989.
- 3) 菅野良弘, 斎藤浩一, 鶴留 隆 : 局部熱発生のある異方性有限円柱の非定常熱応力, 日本機械学会論文集(A 編) , 45 巻 396 号, pp. 884~893, 1979.
- 4) Sugano, Y. : Transient thermal stresses in an anisotropic thick plate with a cylindrical hole, *Trans. of the JSME*, 47, No. 419, pp. 730~739, 1981.
- 5) 野田直剛, 斎藤 宏 : 軸対称加熱される無限広さの平板の動的熱応力, 日本機械学会論文集(A 編) , 52 巻 474 号, pp. 314~320, 1986.
- 6) Noda, N. and Takeuti, Y. : Transient thermal stresses in a transversely isotropic thick circular plate, *Theoretical and Applied Mechanics*, 31, pp. 123~133, 1983.
- 7) Okumura, I.A. and Onaka, T. : An expression for solutions to three-dimensional elasticity problems in cylindrical and spherical coordinates, *Struct. Eng./ Earthquake Eng.*, 3(2), 353s-362s, 1986.
- 8) Okumura, I. A. , Honda, Y. , and Yoshimura, J. : On an analysis for circular ring sector plates by one theory of moderately thick plates, *Trans. , Japan Soc. Civil Engrs.* , Tokyo, Japan, 14, pp. 114~116, 1982.
- 9) 菅野良弘, 木元順一 : 変厚中空円板の非軸対称非定常熱応力の解析解, 日本機械学会論文集(A 編) , 53 巻 494 号, pp. 1927~1932, 1987.

(2002 年 4 月 19 日 受付)