

鋼球の衝突を受ける平板の衝撃応答の発生機構と曲げ波の伝播特性

Mechanism of Impact Response Generation and Characteristics of Propagation of Flexural Waves of Rectangular Plates subjected to Colliding of a Steel Ball

近藤八重* 水澤富作**

Yae KONDO, Tomisaku MIZUSAWA

*大同工業大学 非常勤講師 都市環境デザイン学科 (〒457-8532 名古屋市南区白水町 40)

**大同工業大学 教授 都市環境デザイン学科 (〒457-8532 名古屋市南区白水町 40)

This paper presents the impact response of simply supported rectangular Mindlin plates subjected to colliding of a steel ball by using the eigenfunction expansion method and the Hertz's law of contact. The effects of impact force, contact time and material properties on the mechanism of impact response generation and the characteristics of propagation of flexural waves have been investigated. It is seen that the initial impact response of steel plates and wooden plates subjected to colliding of a steel ball shows some different mechanism on the wave propagation. Beside the difference of mechanism of impact response generation, the sound pressure calculated by the present method on the assumption of plane wave shows good agreement of the acoustically experimental result.

Key Words: impact generation, flexural waves, orthotropic Mindlin plate, eigenfunction expansion

1. まえがき

衝撃荷重を受ける平板から発生する衝撃音や衝突音に関する研究は、騒音などの環境問題への対応として検討されている¹⁾。また、打撃音から構造物の耐久性などに係わる非破壊検査への応用についても検討がなされている²⁾。このような固体音である衝撃音は、板の衝撃応答や残留振動に起因して発生するため、曲げ波の伝播を含めた衝撃応答の発生メカニズムを解明する必要がある。

これまでに、走行車両を受ける橋梁スラブ³⁾、落下物が作用する建築重量床版⁴⁾や打楽器用材⁵⁾のように、衝撃荷重を受ける平板の動的応答問題は、種々の解析手法や計測法を用いて検討されてきている。特に、パルス的な接触を伴う板の衝撃応答や波動伝播問題では、定常、非定常状態を問わず、横せん断変形の影響が無視できなくなる⁶⁾。

Reismann ら⁷⁾は、固有モード展開法を用いて、ステップ荷重を受ける長方形 Mindlin 板の応答問題を解析的に検討している。Rock ら⁸⁾は、有限要素法と時刻歴積分法を用いて、Mindlin 板の動的解析を行い、Reismann らの解析解と比較検討している。さらに、有限要素法を用いた研究として、Pica らの研究⁹⁾などがある。ここに挙げた研究は、動荷重をステップ荷重や周期変動荷重でモデル化し、板の動的変位や断面力の時刻歴応答を求めることに主眼が置かれている。最近、小林ら¹⁰⁾は、三

次元動弾性理論に基づく固有関数展開法により、横等方性矩形板の衝撃応答解析を行い、その応答に与える材料定数の影響や応力波の伝播特性について検討を行っている。また、繊維強化積層板、サンドイッチ板や合成板などの工学分野への適用が広がるにつれて、衝撃荷重による異種材料間の剥離問題が応力波の伝播問題として検討されている¹¹⁾。

一方、物体の衝突や打撃を受ける平板の衝撃応答では、短時間に作用する接触力の分布特性や曲げ波の伝播特性が初期応答に大きな影響を与える^{12) 13)}。また、衝撃荷重の接触が外れた後に現れる残留応答は、衝撃荷重や初期応答の履歴の影響や減衰の影響を大きく受けることが知られているが、衝撃音の発生にかかわる衝撃応答の発生機構を解明するためには、さらに詳細な衝撃応答に関する検討が必要であると思われる。

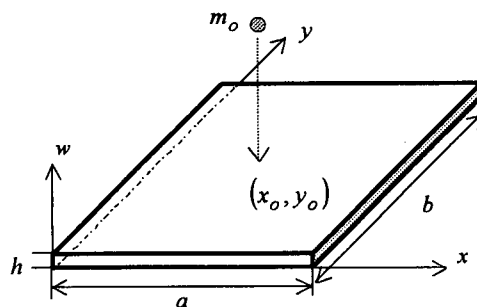


図-1 鋼球の衝突を受ける板と座標系

本研究では、直交異方性 Mindlin 板理論に基づく固有モード展開法と Hertz の衝突理論^{14), 15)}を用いて、図-1 に示す鋼球の衝突を受ける平板の衝撃応答解析を行い、衝撃音の発生に係わる曲げ波の伝播特性に与える衝突荷重の大きさの影響や荷重接触時間の影響および構造特性の影響について検討を行った。等方性材である鋼板と異方性を有する木板¹⁶⁾の初期衝撃応答の発生メカズムの相違を明らかにしている。また、平面波を仮定して初期速度応答から求めた音圧が、鋼球の衝突を受ける板から発生する衝撃パルス音とよく一致することを、衝突実験を踏まえて明らかにしている。

2. 式の定式化

本論文では、直交異方性 Mindlin 板理論と固有モード展開法を用いて、以下の解析仮定に基づき、式の定式化を行う。1) 板の回転慣性の影響は無視する。2) 減衰項は、モード法を適用する時に各モードに対応する減衰定数を用いて考慮する。3) 鋼球の質量は、板の質量と比較して、十分小さいものと仮定する。4) 接触力は Hertz 衝突理論を用いて集中インパルス荷重でモデル化する。

面外動荷重 q を受ける直交異方性 Mindlin 板の運動方程式は、次式で与えられる。

$$D_x \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + D_{xy} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} + (D_1 + D_{xy}) \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} - \kappa h G_{yz} \left(\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \quad \dots (1. a)$$

$$(D_1 + D_{xy}) \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} + D_{xy} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} - \kappa h G_{xz} \left(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \quad \dots (1. b)$$

$$\kappa h G_{yz} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \kappa h G_{xz} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + q = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad \dots (1. c)$$

ここで、 w, θ_x, θ_y は、それぞれたわみと回転角であり、 D_x, D_y, D_{xy}, D_1 はそれぞれ板の曲げ剛性である。また、 G_{yz}, G_{xz} はせん断弾性係数、 κ, h と ρ は、それぞれせん断修正係数、板厚と密度である。

自由振動問題では、調和振動するため、変位は、それぞれ次式で仮定される。

$$\theta_x = \phi_x^{mn} e^{i\omega_{mn} t} \quad \dots (2. a)$$

$$\theta_y = \phi_y^{mn} e^{i\omega_{mn} t} \quad \dots (2. b)$$

$$w = W^{mn} e^{i\omega_{mn} t} \quad \dots (2. c)$$

周辺単純支持された長方形板の ϕ_x^{mn}, ϕ_y^{mn} と W^{mn} は、次式で表される。ただし、 ω_{mn} は (m, n) 次の円振動数 (rad/sec) である。

$$\phi_x^{mn} = \sum_m \sum_n A_{mn} \cos(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) \quad \dots (3. a)$$

$$\phi_y^{mn} = \sum_m \sum_n B_{mn} \sin(m\pi x/a) \cos(n\pi y/b) \quad \dots (3. b)$$

$$W^{mn} = \sum_m \sum_n C_{mn} \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) \quad \dots (3. c)$$

ここで、 A_{mn}, B_{mn}, C_{mn} は、未定係数であり、 a, b は、それぞれ板の長さと同幅である。

式(1)に式(2)を代入し、回転慣性の影響を無視した場合の円振動数 ω_{mn} は、次式で求められる。

$$\omega_{mn}^2 = \frac{Z P_{33} + 2 P_{12} P_{23} P_{13} - P_{22} P_{13}^2 - P_{11} P_{23}^2}{\rho h Z} \quad \dots (4)$$

ただし、 $Z = P_{11} P_{22} - P_{12}^2$ であり、また、

$$P_{11} = D_x (m\pi/a)^2 + D_{xy} (n\pi/b)^2 + \kappa h G_{yz},$$

$$P_{12} = (D_1 + D_{xy}) (m\pi/a) (n\pi/b),$$

$$P_{13} = \kappa h G_{yz} (m\pi/a),$$

$$P_{22} = D_{xy} (m\pi/a)^2 + D_y (n\pi/b)^2 + \kappa h G_{xz},$$

$$P_{23} = \kappa h G_{xz} (n\pi/b),$$

$$P_{33} = \kappa h G_{yz} (m\pi/a)^2 + \kappa h G_{xz} (n\pi/b)^2 \quad \dots (5)$$

である。ここで、モードの直交性を考慮すると、 A_{mn}, B_{mn} は、 C_{mn} を用いて次式で与えられる。

$$A_{mn} = C_{mn} (P_{12} P_{23} - P_{22} P_{13}) / (P_{11} P_{22} - P_{12}^2),$$

$$B_{mn} = C_{mn} (P_{12} P_{13} - P_{11} P_{23}) / (P_{11} P_{22} - P_{12}^2) \quad \dots (6)$$

式(1)で表される運動方程式の解は、次式で示すように、固有関数と時間関数の積で表される。

$$\theta_x(x, y, t) = \sum_m \sum_n \phi_x^{mn}(x, y) T_{mn}(t) \quad \dots (7. a)$$

$$\theta_y(x, y, t) = \sum_m \sum_n \phi_y^{mn}(x, y) T_{mn}(t) \quad \dots (7. b)$$

$$w(x, y, t) = \sum_m \sum_n W^{mn}(x, y) T_{mn}(t) \quad \dots (7. c)$$

ここで、 $T_{mn}(t)$ は、時間に関する一般化座標である。

式(1)と式(7)から減衰項を考慮した直交異方性 Mindlin 板の運動方程式は、次式で表される。

$$d^2 T_{mn}(t)/dt^2 + 2 h_{mn} \omega_{mn} dT_{mn}(t)/dt + \omega_{mn}^2 T_{mn}(t) = Q_{mn}(t) \quad \dots (8)$$

ここで、 h_{mn} は減衰定数であり、 $Q_{mn}(t)$ は荷重項である。

板の変位と速度がゼロである初期条件より、 $T_{mn}(t)$ は次式で与えられる。

$$T_{mn}(t) = (1/\omega'_{mn}) \int_0^t Q_{mn}(\tau) e^{-\omega_{mn} h_{mn} (t-\tau)} \cdot \sin \omega'_{mn} (t-\tau) d\tau \quad \dots (9)$$

ここで、 $\omega'_{mn} = \omega_{mn} \sqrt{1 - h_{mn}^2}$ であり、 $Q_{mn}(t)$ はノルム J_{mn} を用いて次式で表される。

$$Q_{mn}(t) = \int_0^a \int_0^b q W^{mn} dx dy / J_{mn} \quad \dots (10)$$

ここで、ノルム J_{mn} は、

$$J_{mn} = \int_0^a \int_0^b \rho h (W^{mn})^2 dx dy \quad \dots (11)$$

で表され、また、 $q = \bar{q}(x, y) F(t)$ で仮定する。これより、式(10)は、次式で与えられる。

$$Q_{mn}(t) = \frac{F(t) \int_0^a \int_0^b \bar{q}(x, y) W^{mn} dx dy}{\rho h \int_0^a \int_0^b (W^{mn})^2 dx dy} \quad \dots (12)$$

ただし、 $W^{mn}(x, y) = C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$ である。

$\bar{q}(x, y)$ は、点 (x_0, y_0) に作用する集中荷重であるとするれば、 q_{mn} は、

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \bar{q}(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad \dots (13)$$

で与えられるので、式(11)は、

$$Q_{mn}(t) = \frac{q_{mn} F(t)}{\rho h C_{mn}} \quad \dots (14)$$

で表される。

したがって、式(9)へ式(14)を代入し、書き換えると

$$T_{mn}(t) = \frac{q_{mn}}{\rho h C_{mn}} \frac{1}{\omega'_{mn}} Id \quad \dots (15)$$

で与えられる。ただし、 Id は、

$$Id = \int_0^t F(\tau) e^{-\omega_{mn} h_{mn}(t-\tau)} \cdot \sin \omega'_{mn}(t-\tau) d\tau \quad \dots (16)$$

である。

次に、衝撃荷重関数 $F(t)$ を正弦波荷重とすると、

$$F(t) = F_0 \sin \left(\frac{\pi}{t_1} t \right) \quad \dots (17)$$

で与えられる。ただし、 F_0 は荷重の最大振幅、 t_1 は接触時間である。ここで、

$$1) 0 \leq t \leq t_1 \text{ ならば、} F(t) = F_0 \sin \left(\frac{\pi}{t_1} t \right) \quad \dots (18)$$

$$2) t > t_1 \text{ ならば、} F(t) = 0 \quad \dots (19)$$

になる。したがって、 $0 \leq t \leq t_1$ での Id は次式で表される。

$$Id = \frac{F_0}{2} \left\{ \frac{A}{A^2 + (C+B)^2} (\cos Ct - e^{-At} \cos Bt) + \frac{C+B}{A^2 + (C+B)^2} (\sin Ct + e^{-At} \sin Bt) + \frac{A}{A^2 + (C-B)^2} (-\cos Ct + e^{-At} \cos Bt) + \frac{C-B}{A^2 + (C-B)^2} (-\sin Ct + e^{-At} \sin Bt) \right\} \quad \dots (20)$$

また、 $t > t_1$ では、 $\tilde{t} = t - t_1$ と置けば、 Id は次式で求められる。

$$Id = e^{-A\tilde{t}} \left(y(t_1) \cos B\tilde{t} + \frac{\dot{y}(t_1) + Ay(t_1)}{B} \sin B\tilde{t} \right) \quad \dots (21)$$

ここで、 $A = \omega_{mn} h_{mn}$ 、 $B = \omega'_{mn} = \omega_{mn} \sqrt{1 - h_{mn}^2}$ 、

$C = \pi/t_1$ である。なお、時刻 t_1 での変位および速度であ

る $y(t_1)$ および $\dot{y}(t_1)$ は、Appendix に示してある。

図-2 に示す衝突球と板に働く接触力 $\bar{F}$ は、Hertz の衝突理論を用いて求められる。

衝突球である鋼球の衝突初速度を v_0 とすると、衝突方向における衝突球の変位 W_b は、

$$W_b = v_0 t - \frac{1}{m_0} \int_0^t dt \int_0^t \bar{F}(t) dt \quad \dots (22)$$

で与えられる。ここで、 m_0 は衝突球の質量、 $\bar{F}(t)$ は接触力である。また、衝突球と板の局部的変形量 α は、 (x_0, y_0) 点における板の変位 $w(x_0, y_0, t)$ と式(22)を用いれば、次式で与えられる。

$$\alpha = W_b - w(x_0, y_0, t) = v_0 t - \frac{1}{m_0} \int_0^t dt \int_0^t \bar{F}(t) dt - w(x_0, y_0, t) \quad \dots (23)$$

また、Hertz の衝突理論より、接触力 $\bar{F}$ と板の局部的変形量 α との関係は、

$$\bar{F} = k \alpha^{3/2} \quad \dots (24)$$

で与えられる。式(24)に式(23)を代入して、書き換えれば、次式のように表される。

$$\left(\frac{\bar{F}(t)}{k} \right)^{2/3} + w(x_0, y_0, t) = v_0 t - \frac{1}{m_0} \int_0^t dt \int_0^t \bar{F}(t) dt \quad \dots (25)$$

$$\text{ここで、} k = \frac{4\sqrt{r}}{3 \left(\frac{1-\nu_0^2}{E_0} + \frac{1-\nu_1^2}{E_1} \right)} \quad \dots (26)$$

である。 r は球の半径、 E_0 と ν_0 は、それぞれ球の弾性係数とポアソン比、また、 E_1 と ν_1 は平板の弾性係数とポアソン比である。

式(25)は非線形方程式になるので、式(7.c)と式(25)を反復計算すれば、接触力 $\bar{F}(t)$ を数値的に求めることができる¹⁴⁾。

本研究では、鋼球の質量が板の質量と比較して、十分小さいと仮定すると、式が簡略化され、衝突球と板の局部的変形量 α の最大変形量 $\alpha_{\max}$ が次式で与えられる¹⁵⁾。

$$\alpha_{\max} = \left(\frac{5}{4} \right)^{2/5} \left(\frac{m_0}{k} \right)^{2/5} v_0^{4/5} \quad \dots (27)$$

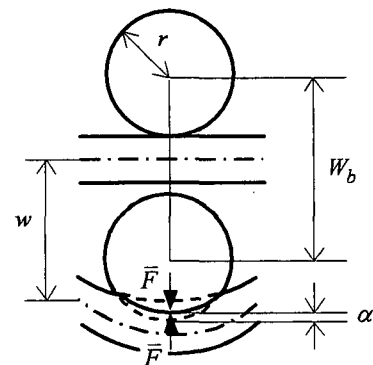


図-2 衝突に伴う球と板の局所変形図

また、球と板の間に働く最大接触力 $\bar{F}_{\max}$ および接触時間 t_1 は、式(27)を用いて、それぞれ次式で求められる。

$$\bar{F}_{\max} = \left(\frac{5}{4}\right)^{3/5} m_o^{3/5} k^{2/5} v_o^{4/5} \quad \dots (28)$$

$$t_1 = 1.143 m_o^{3/5} k^{2/5} v_o^{6/5} \quad \dots (29)$$

したがって、式(28)、式(29)で与えられる $\bar{F}_{\max}$ と t_1 を式(17)の衝撃荷重関数に代入すれば、衝撃応答が求められる。

3. 数値計算例および考察

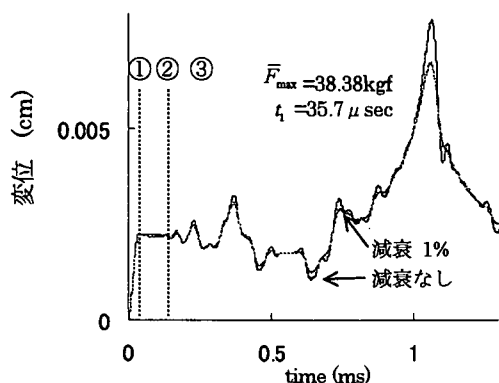
小さな鋼球の衝突を受ける周辺単純支持された正方形板の衝撃応答の発生メカニズムと曲げ波の伝播性状について検討する。

解析の対象とする板のモデルは、1辺 20cm の正方形板であり、その材料特性値を表-1 に示す。また、衝突体である鋼球の半径 r は 0.5cm、質量 4.11g とし、鋼球は、図-1 に示すように、板面に自然落下させ、リバウンドは無いものと仮定している。ここで、衝突に伴い板に作用する接触力 $\bar{F}(t)$ は、Hertz の衝突理論を適用し、式(28)と式(29)から求められる最大接触力 $\bar{F}_{\max}$ と接触時間 t_1 で表した正弦波荷重で仮定している。この仮定は、板の質量と比較して球体の質量が十分小さければ、実験的に

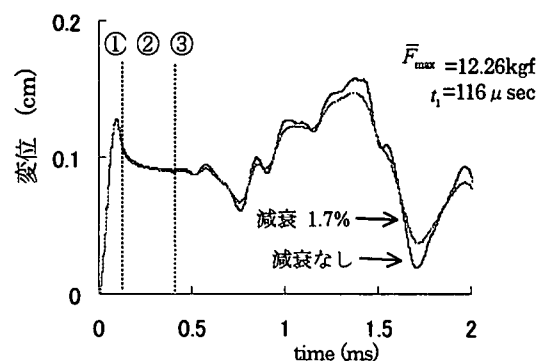
表-1 材料特性値

	ρ g/cm ³	E_L $\times 10^3$ kgf/cm ²	E_R $\times 10^3$ kgf/cm ²	G_{LR} $\times 10^3$ kgf/cm ²	G_{LT} $\times 10^3$ kgf/cm ²	G_{RT} $\times 10^3$ kgf/cm ²	ν_{LR}
鋼板	7.85	2100			807.7		0.30
木板*	0.39	118	9.2	7.7	7.3	0.34	0.37

*: 木板はシトカスプルス柁目板であり、 $R(x)$ 、 $L(y)$ と $T(z)$ は、それぞれ木板の放射方向、繊維方向および接線方向である¹⁶⁾。



(a) 鋼板 (等方性板)



(b) 木板 (直交異方性板)

図-3 鋼板および木板の変位応答曲線；板サイズ 20×20×0.2cm, $v_o=88.8$ cm/sec, $r=0.5$ cm, ①立ち上がり領域(パルス応答領域), ②曲げ波の伝播領域, ③残留応答領域(減衰自由振動領域)

実証されており、また、理論解析においてもよく用いられている。

はじめに、固有モード展開法で必要になる級数項が応答値に与える影響について検討を行った。これより、級数項の数を 100 程度に仮定すれば、変位応答、速度応答や加速度応答の収束値が得られることを確認している。

3. 1 衝撃応答の発生メカニズム

図-3 には、衝突初速度 $v_o=88.8$ cm/sec の鋼球の衝突を受ける鋼板および木板(20×20×0.2cm)の中央点(板厚中心)での各変位応答曲線が示してある。また、応答曲線に与える減衰の影響を見るため、鋼板の減衰定数 h_{mn} は 1%、木板の減衰定数 h_{mn} は 1.7%¹⁶⁾ とし、減衰が無い場合とそれぞれ比較した結果も示してある。

これより、衝撃応答の発生メカニズムは、等方性および異方性に係わらず、①荷重載荷による立ち上がり領域(パルス応答領域)、②曲げ波の伝播領域、③残留応答領域(減衰自由振動領域)の 3 つの領域に分けられる¹⁹⁾。また、各図より変位応答曲線の中でも、①と②の領域からなる初期応答に着目すれば、初期応答に与える減衰の影響はさほど見られない。

これより、パルス応答領域と曲げ波の伝播領域からなる初期応答は、衝突パルス音の発生に深く関係しているので、以後の数値計算例では、減衰の影響を無視した初期応答特性に着目し、検討を行う。

3. 2 初期応答特性

(1) 鋼球の衝突を受ける板の初期応答

図-4 の(a)と(b)には、それぞれ鋼球の衝突を受ける鋼板および木板の中央点での初期変位応答が示してある。ここで、鋼球の衝突初速度は、 $v_o=88.8$ cm/sec である。Hertz の理論から求めた鋼球と鋼板の最大接触力 $\bar{F}_{\max}$ と接触時間 t_1 は、それぞれ 38.38kgf と 35.7 μsec であり、また木板の最大接触力 $\bar{F}_{\max}$ と接触時間 t_1 は、それぞれ

12.26kgf と 116 μ sec で与えられる。

これより、鋼板における初期速度応答は、衝撃パルス力の局所的な接触とともに、ほぼ直線的に増大し、鋼球の接触が外れると同時に、初期変位応答が最大値を示している。また、接触点での局所的な変形に伴い、板周辺に向かって進行する曲げ波の伝播領域の変位応答は、ほぼ一定の値を示している。

一方、木板の変位初期応答は、衝撃パルス力の局所的な接触とともに、ほぼ直線的に増大するが、初期応答の最大値を境にして、鋼板とは異なった性状が示される。鋼板のような等方性板では、接触点から板周辺に向かって進行する曲げ波の伝播領域の変位応答は、ほぼ一定の値を示すが、木板のような直交異方性板では、衝撃パルス力は初期応答の最大値を越えた直後に外れるために、変位応答が急激に減少し、曲げ波の伝播に伴いほぼ一定の値を示している。これは、材料の異方性に伴う曲げ波の伝播速度に関係し、また板の境界からの反射波による影響であると思われる。

また、初期応答を過ぎると、図-3 に示すように、それぞれ高次の振動モードを含む非定常な変位応答を示しながら、時間の経過とともに低次の固有モードが卓越する残留自由振動に移行している。

図-5 には、図-4 と同一計算条件で求めた板中央点での初期速度応答と初期加速度応答が、それぞれ示されて

いる。これより、速度応答は、衝撃パルスの接触力に従った正弦波を示しており、また接触力が外れ、曲げ波が板の境界に向かって伝播する間は、ほぼ静止状態が続く、境界からの反射波の進行に伴い、比較的滑らかな残留速度応答を示している。一方、初期加速度応答は、鋼球の衝突直後にピーク値を示し、また衝撃パルスの接触力が外れる瞬間に一時的なピーク値を示すが、曲げ波の伝播領域では、速度応答と同様な挙動を示しながら残留加速度応答へ移行している。このように、鋼球の衝突を受ける平板の初期応答は、かなり顕著な特徴を示し、また初期速度応答は、後で述べるように、衝撃パルス音の波形とほぼ一致している。また、鋼板と木板の初期応答を比較すると、初期応答の波形は、ほぼ同様な性状を示している。

(2) 初期応答に与える鋼球の衝突初速度の影響

図-6 には、鋼球の衝突を受ける鋼板および木板の初期応答波形の最大値に与える衝突初速度 v_0 の影響が示してある。これより、初期応答のピーク値は、ほぼ衝突初速度 v_0 に比例している。

(3) 鋼球の衝突を受ける板の曲げ波の伝播性状に与える板厚の影響

図-7 は、それぞれ鋼球の衝突を受ける鋼板および木板の曲げ波の伝播性状に与える板厚 h の影響を示している。ここで、板厚は、0.1cm、0.2cm と 0.4cm に仮定し、ま

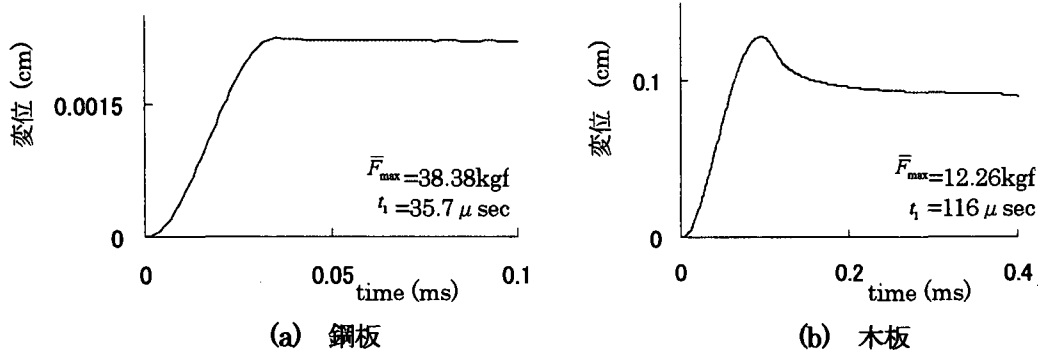


図-4 鋼球の衝突を受ける板の初期変位応答； $v_0=88.8\text{cm/sec}$, $r=0.5\text{cm}$

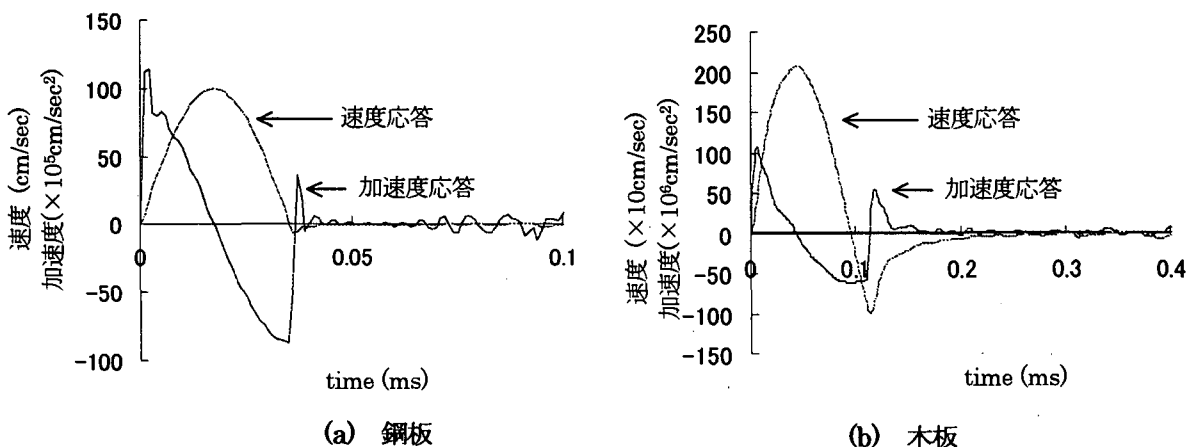


図-5 鋼球の衝突を受ける板の初期速度応答および加速度応答； $v_0=88.8\text{cm/sec}$, $r=0.5\text{cm}$

た図に示した位相面は、それぞれ時刻が接触力の除荷直前 $30\mu\text{sec}$ および $100\mu\text{sec}$ における図である。これより、図-7(a)に示すように、鋼板の板厚が薄いと曲げ波の波数が増大し、逆に板厚が大きくなると、波数の数が少なくなるが、その伝播速度は、薄い場合より速くなる。その理由は、次式に示す波動の速度 C_B 、周波数 ω_{mn} と波数 k_B の関係式および薄板理論に基づく曲げ波の伝播速度から示される。

$$C_B = \omega_{mn} / k_B \quad \dots(30. a)$$

$$C_B = (D \omega_{mn}^2 / \rho h)^{1/4} \quad \dots(30. b)$$

ただし、 D は板の曲げ剛性である。また、式(30)より、次式の関係式が得られる。

$$k_B \propto 1/\sqrt{h}, \sqrt{\omega_{mn}}, (E/\rho)^{1/4}, (1-\nu)^{1/4} \quad \dots(31)$$

したがって、式(30)と式(31)から、鋼板の波数 k_B は板厚の平方根に逆比例し、また曲げ波の伝播速度 C_B は波数に逆比例することから、先に述べた位相の性状が説明できる。

しかしながら、異方性板の x 方向および y 方向の位相速度は、それぞれ $C_x = \omega_{mn}/k_x$ および $C_y = \omega_{mn}/k_y$ で与えられ、2方向へ伝わる曲げ波の伝播速度が異なってくるので、木材の位相面は、図-7(b)に示すように、不連続になることがわかる。これは、異方性板の特徴であり、また分散特性によるものと思われる。このような性状は、異方性板の音響特性にも、大きな影響を与えると推察される。

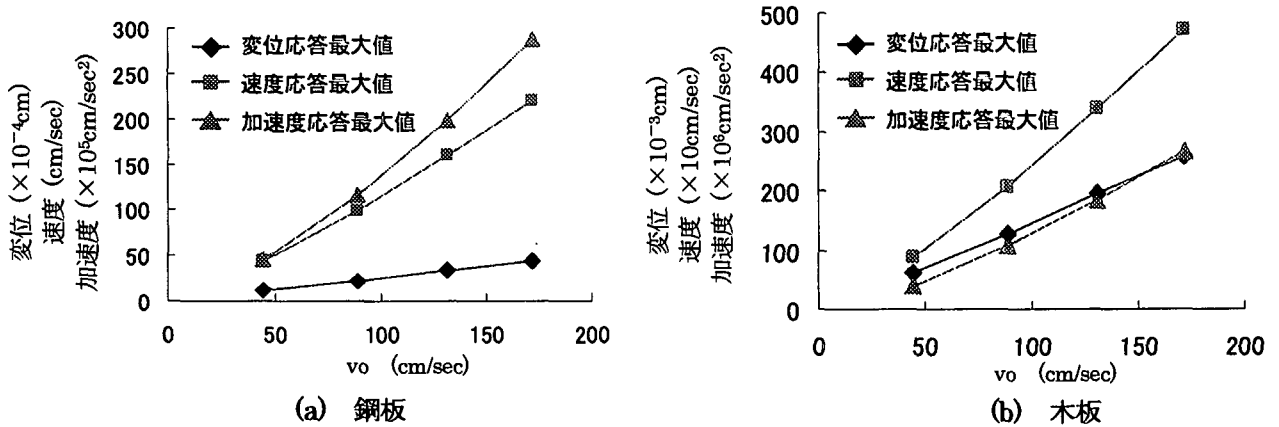


図-6 板の初期応答波形の最大値に与える衝突初速度の影響； $r=0.5\text{cm}$

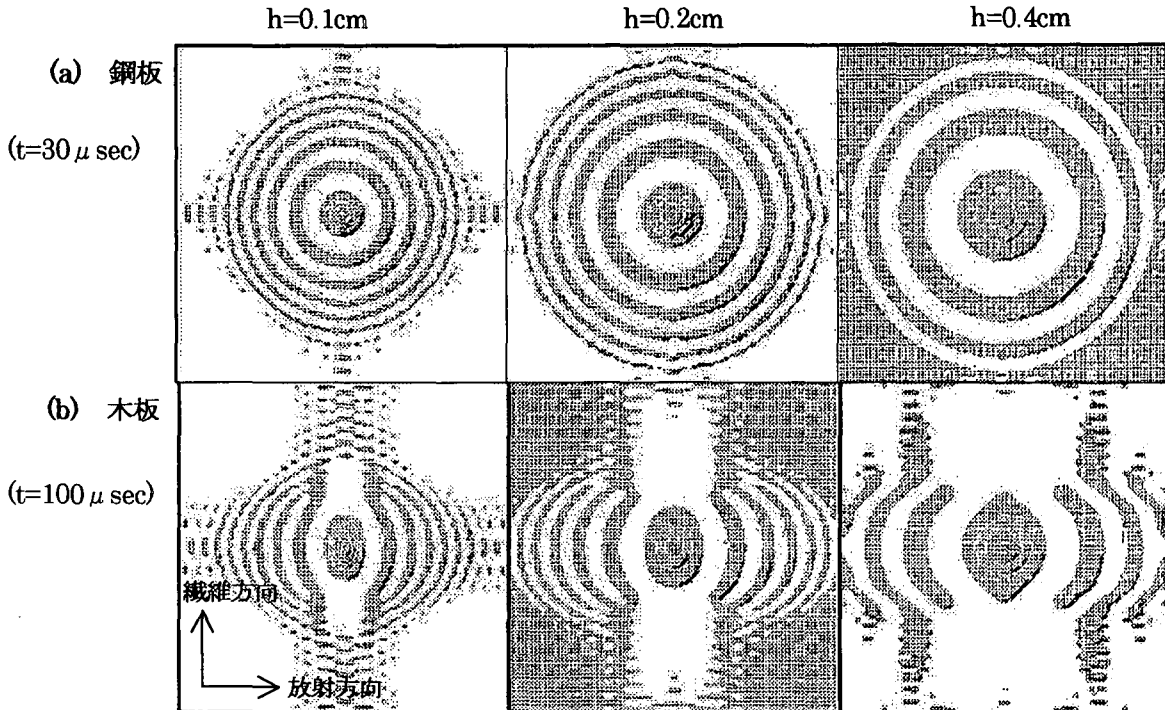
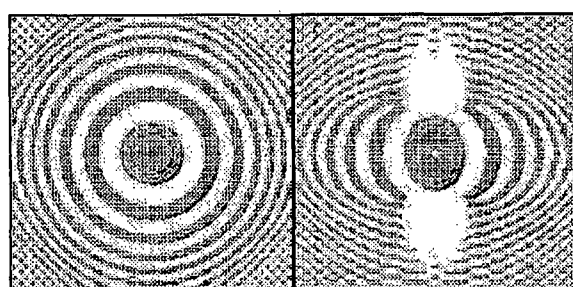


図-7 鋼球の衝突を受ける板の曲げ波の伝播性状に与える板厚の影響； $v_o=88.8\text{cm/sec}$, $r=0.5\text{cm}$

さらに、図-7 と同一の解析条件下で求めた板厚 0.2cm の鋼板および木板の速度位相面が図-8 に示してあり、また図-9 は、それぞれ鋼板(30 μ sec)および木板(100 μ sec)の板の中央断面における曲げ波の伝播状態を示している。これより、衝突荷重を受ける板中央の局所的な変形領域では、変位応答と速度応答がかなり異なった性状を示している。また、木板では、繊維方向と放射方向の波数において異方性の性質が顕著に現れている。

3. 3 板の初期速度応答とパルス音の関係

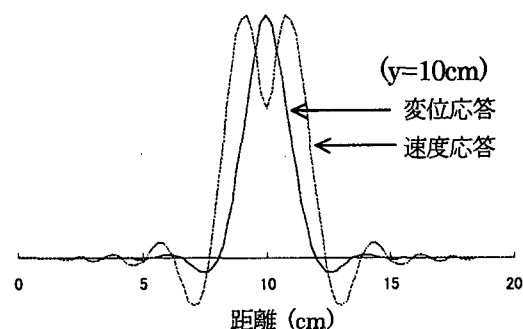
鋼球の衝突を受ける板から発生する衝突音は、衝突直後に発生する衝撃パルス音とそれに続く残留音から成り、また近接距離で測定された衝撃パルス音は、平面波の性状を示すことが実験的に明らかにされている^{12,17)}。



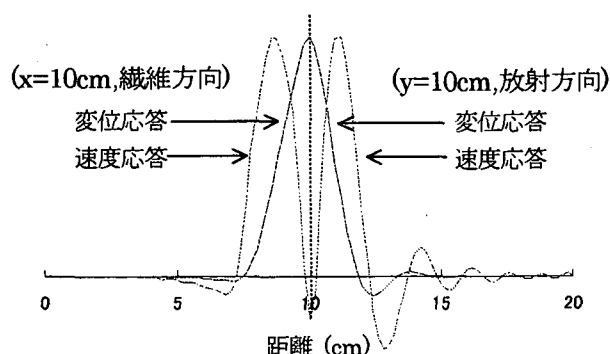
(a) 鋼板 ($t=30 \mu$ sec) (b) 木板 ($t=100 \mu$ sec)

図-8 板の速度応答位相面；

$v_0=88.8\text{cm/sec}$, $r=0.5\text{cm}$, $h=0.2\text{cm}$



(a) 鋼板 ($t=30 \mu$ sec)



(b) 木板 ($t=100 \mu$ sec)

図-9 板中央断面での変位図および速度図；

$v_0=88.8\text{cm/sec}$, $r=0.5\text{cm}$, $h=0.2\text{cm}$

ここでは、鋼球の衝突を受ける板の初期初速度と衝撃パルス音の関係を明らかにするために、解析から求めたパルス音圧と衝突実験から求めた衝撃パルス音との比較検討を行う。

はじめに、図-10 には、振り子落下させた鋼球の衝突実験と音圧測定の概要が示してある。衝撃パルス音は、鋼板の近接距離で、精密騒音計と FFT アナライザーで測定した¹⁷⁾。ここで、実験に用いた鋼板は、 $20 \times 20 \times 0.22\text{cm}$ とし、鋼球半径は 0.25cm 、衝突初速度は 44.8cm/sec としている。また、音圧波形のサンプリングタイムは、 19.5μ sec とする。

応答解析より求められるパルス音の音圧 P (Pa) は、平面波を仮定して、次式で与えられる。

$$P = \rho c v \quad \dots(32)$$

ここで、 ρ は 24°C での空気密度 (1.2kg/m^3)、 c は音速 (346m/sec) であり、 v は鋼板の中央点での速度応答値である。図-11 には、上記に示した衝突実験と同じ条件でサンプリングタイムを 10μ sec として応答解析を行い、これより求めた速度応答 v を用い、式(32)から求めた音圧 P (Pa) と実験結果との比較が示してある。

これより、衝撃パルス応答領域の速度応答から求めた音圧のピーク値は、衝突実験から求めた衝撃パルス音のピーク値とよく一致した結果を示している。

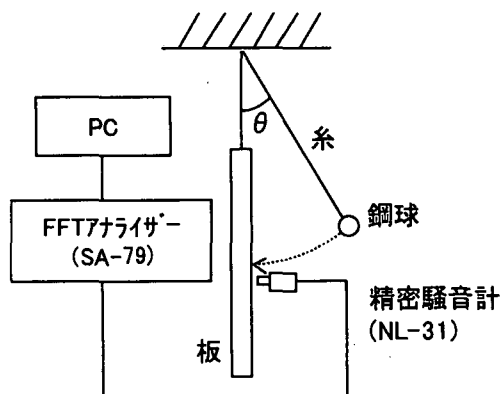


図-10 実験概略図

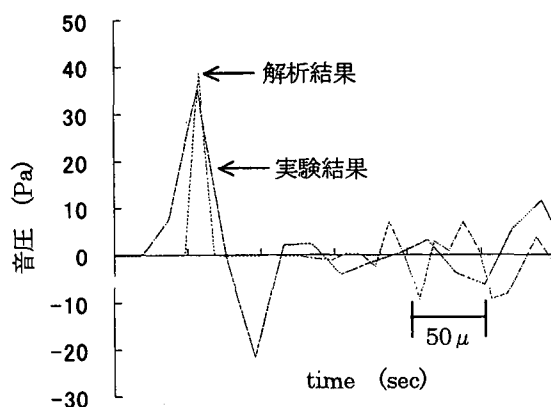


図-11 鋼板の初期速度応答より求めた音圧と実験結果

との比較； $v_0=44.8\text{cm/sec}$, $r=0.25\text{cm}$

以上の結果より、鋼板のような等方性板の初期速度応答は、パルス音圧と強い相関性が見られるので、解析的にもパルス音圧を推定できると考えられる。また、木板の衝撃応答解析と衝突実験の結果を比較してみると、パルス音の波形の形状はよく一致しているが、両者のピーク値に差が見られた。これは、式(26)で与えられる k の値が、等方性体を仮定して誘導したものであり、木板の異方性の影響を考慮していないためと思われる¹⁸⁾。

4. まとめ

本論文では、直交異方性 Mindlin 板理論と固有モード展開法を用いて、鋼球の衝突を受ける平板の衝撃応答解析を行い、衝撃応答の発生メカニズムと衝撃初期応答に与える構造特性の影響や衝突初速度の影響について検討を行った。また、板の初期速度応答と衝撃パルス音との相関性について明らかにした。

得られた主な結果をまとめると、以下の通りである。

- 1) 鋼球の衝突を受ける板の衝撃応答の発生メカニズムは、①応答の立ち上がりを表す荷重載荷領域(衝撃パルス応答領域)、②板の境界辺へ進行する曲げ波の伝播領域、③残留応答領域(減衰自由振動)の3つの領域に分けられる。
- 2) 鋼球と板の衝突により発生する初期応答に与える減衰の影響は非常に小さく、無視できる。また衝撃初期応答に与える衝突初速度や物性値の影響は顕著に見られる。
- 3) 鋼球の衝突に伴う板の曲げ波の位相面は、板厚に大きく依存している。曲げ波の波数は、板厚が薄いほど多くなり、厚くなると少なくなる。また、木材の位相面は、2方向へ伝わる曲げ波の伝播速度が異なるので、位相面が不連続になる。これは、異方性の性質と分散特性によるものと思われる。
- 4) 鋼球と鋼板の衝突により発生する初期速度応答から求めた音圧と衝突実験から求めた衝撃パルス音には、強い相関性が見られるので、初期応答特性は、衝突音の発生メカニズムを知る一つの指標になりえと考えられる。

今後は、異方性を考慮した Hertz の衝突理論の定式化および板の衝撃応答と音場の連成解析について検討して行きたい。

最後に、本研究は、科研費(基盤研究(C))の補助を受けている。また、貴重なご意見を頂きました査読者に謝意を表します。

Appendix

式(21)で用いる初期条件 $y(t_1)$ および $\dot{y}(t_1)$ は、次式で与えられる。

$$y(t_1) = \frac{F_o}{2} \left\{ -\frac{A}{A^2 + (C+B)^2} (1 + e^{-At_1} \cos Bt_1) + \frac{C+B}{A^2 + (C+B)^2} (e^{-At_1} \sin Bt_1) + \frac{A}{A^2 + (C-B)^2} (1 + e^{-At_1} \cos Bt_1) + \frac{C-B}{A^2 + (C-B)^2} (e^{-At_1} \sin Bt_1) \right\} \quad \dots (33)$$

$$\dot{y}(t_1) = \frac{F_o}{2} \left\{ -\frac{A}{A^2 + (C+B)^2} (A \cos Bt_1 + B e^{-At_1} \sin Bt_1) + \frac{C+B}{A^2 + (C+B)^2} (-C + B e^{-At_1} \cos Bt_1 - A e^{-At_1} \sin Bt_1) + \frac{A}{A^2 + (C-B)^2} (-A e^{-At_1} \cos Bt_1 - B e^{-At_1} \sin Bt_1) + \frac{C-B}{A^2 + (C-B)^2} (C - A e^{-At_1} \sin Bt_1 + B e^{-At_1} \cos Bt_1) \right\} \quad \dots (34)$$

参考文献

- 1) 時田保夫監修：音の環境と制御技術 第I巻基礎技術、フジ・テクノシステム、2000。
- 2) 魚本健人、伊東良浩：打音法によるコンクリートの非破壊検査法、コンクリート工学論文集、Vol. 7(1), pp. 143-151, 1996。
- 3) 岡村美好、深沢泰晴：高速移動荷重によって鋼薄肉材構成板に生じる局部振動波の特性、応用力学論文集、Vol. 3, pp. 203-213, 2000。
- 4) 折笠輝雄、久保田喜八郎：重量衝撃音発生器による床衝撃音の実験的解析方法に関する研究、日本建築学会計画系論文報告集、第378号、pp. 1-9, 1987。
- 5) A. O. Wahlin, P. O. Gren, and N-E. Molin : Structure-borne sound: Experiments showing the initial transient acoustic wave field generated by an impacted plate, J. Acoust. Am. Soc., Vol. 96(5), pp. 2791-2797, 1994。
- 6) K. E. Fallstrom : Transient bending wave propagation in anisotropic plates, Journal of Applied Mechanics, Vol. 65, pp. 930-938, 1998。
- 7) H. Reismann and Y. Lee : Forced motion of rectangular plates, In Proc. 4th Biennial Southeastern Conf. Theoretical and Applied Mechanics, Tulane University, New Orleans, Pergamon Press, NEW YORK, 1968。
- 8) T. Rock and E. Hinton : Free vibration and transient response of thick and thin plates using the finite element method, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 3, pp. 51-63, 1974。
- 9) A. Pica and E. Hinton : Transient and pseudo-transient analysis of mindlin plates, International

Journal for Numerical Method in Engineering. Vol. 15, pp.189-208, 1980.

10) 小林治俊, 須方大介: 固有関数展開法による横等方性矩形厚板の衝撃応答解析, 応用力学論文集, Vol. 3, pp. 3-12, 2000.

11) 小林治俊, 米田幸司: 異方性円板の弾性衝撃応答解析, 構造工学論文集, Vol. 44A, pp.1287-1293, 1996.

12) 五十嵐昭男, 後藤誠, 川崎哲: 衝突音に関する研究(第1報平板に球が衝突する場合), 日本機械学会論文集, Vol. 50(453), pp. 840-847, 1984.

13) 近藤八重, 水澤富作: 鋼球の衝突を受ける板の衝撃応答の発生メカニズムと曲げ波の伝播特性, 土木学会中部支部研究発表会講演概要集, I-31, pp.61-62, 2002.

14) S. Timoshenko: 工業振動学, 東京図書, 1978.

15) A. E. H. Love: A treatise on the mathematical theory of elasticity, 4th ed, Dover, 1944.

16) 近藤八重, 水澤富作: Spline 要素法を用いた変断面性状を有する長方形木板の振動解析, 応用力学論文集, Vol. 4, pp. 183-194, 2002.

17) 滝沢宜人, 河原田豊, 近藤八重, 水澤富作: 平板から発生する衝突音に関する基礎的研究, 土木学会中部支部研究発表会講演概要集, I-18, pp. 35-36, 2002.

18) 近藤八重, 水澤富作: 木板の衝撃応答特性—楽器用材の打音に関する基礎的研究—第 52 回日本木材学会大会研究発表要旨集, D20945, p. 70, 2002.

(2002 年 4 月 19 日受付)