応用力学論文集 Vol. 5, pp. 61-66 (2002 年 8 月)　土木学会

光弾性を用いた三次元応力場計測のための逆解析手法の開発

Development of inversion analysis method for photoelastic measurement of 3D stress state

小国健二*・Wijerathne Lalith**・堀 宗朗***
Kenji OGUNI, Lalith WIJERATHNE and Muneo HORI

*正会員 Ph.D. 東京大学助手 東京大学地震研究所 (〒113-0032 東京都文京区弥生 1-1-1)
**学生会員 東京大学大学院 社会基盤工学専攻 (〒113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1)
***正会員 Ph.D. 東京大学教授 東京大学地震研究所 (〒113-0032 東京都文京区弥生 1-1-1)

A new method for non-destructive measurement of arbitrary 3D stress state using photoelasticity has been developed. The new approach proposed here, namely, *load incremental approach*, is an attempt to solve the nonlinear inverse problem of 3D photoelasticity by the linearization of the governing equation based on high resolution in load increment. As long as the applied load increment is small enough, this method works and can reconstruct arbitrary 3D stress state.

Results from numerical simulations show the effect of i) the number of the observations, ii) the independency of the observation directions, and iii) the material sensitivity on the performance of the proposed method.

Key Words : *3D state of stress, Photoelasticity, Tensor field tomography*

1. はじめに

地震断層挙動・構造物の破壊時の挙動の予測といった破壊にまつわる問題を考える際に，未解決かつ重要な力学現象のひとつとして三次元的な亀裂の不安定な進展（特に圧縮応力下での進展）が挙げられる．この力学現象の支配メカニズム解明のためには，少なくとも亀裂周辺の応力状態を計測する必要がある．ただし，従来から材料の力学的挙動の計測に用いられてきた「平均場の計測—供試体全体の平均的応力・ひずみ関係の計測」，あるいは「局所的計測—ひずみゲージなどによる計測」はここでは役に立たない．不安定に進展（移動）する亀裂端を追跡しながらその近傍での応力場を計測するためには「供試体全体の物理量の分布の計測」を高い空間分解能で行う「全視野計測」が必要となる．

このような背景のもと，本研究では亀裂の不安定な進展の可視化と破壊進展に伴い変化する応力分布の全視野計測を最終的な目的とし，光弾性の原理に基づく三次元応力場計測（三次元光弾性）のための逆解析手法を開発・提案する．光弾性現象とは，高分子・ガラスなど光弾性物質[1]と呼ばれる材料において材料内部に応力が生じると，その応力場と線形関係で結ばれる複屈折場が発生する現象である．

光弾性の原理を用いた応力解析では，材料を透過する偏光をプローブとして複屈折場に関する情報を計測し，これを入力とした逆解析により材料内部の応力場を同定する．特に，二次元応力場（平面ひずみ・平面応力状態）が仮定される場合には，透過光と材料内部の応力状態とが線形関係で結ばれるため，この逆解析は容易なものである．一方，応力場が任意の三次元的分布を持つ場合，後に詳述するように，透過光と材料内部の応力状態とは，非可換な行列の積の形で表される非線形関係で結ばれる．この非線形性の扱いが三次元光弾性による応力場計測の鍵となる．

従来の三次元光弾性へのアプローチは供試体を物理的／光学的にスライスして二次元問題に落として解析する応力凍結法／散乱光光弾性，あるいは透過光と応力状態との関係が線形近似できるような条件を満たす応力場のみを扱う Integrated Photoelasticity など，問題の本質である非線形解析を回避する方法であった．その結果，これらの応力場計測手法では非破壊・全視野といった要件が満たされない，あるいは軸対称などの特殊な対称性をもつ応力場しか取り扱うことができないといった問題がある．

本研究では三次元光弾性の問題の本質である非線形性を，支配方程式の増分型の考慮による線形化を用いて克服することを目指した手法を提案する．

本論文の構成は 2 章で問題設定・定式化，3 章で数値解析結果，4 章で結果のまとめと考察となる．3 章の数値解析では透過光の計測数・方向，光弾性材料の感度などが本研究で提案する手法のパフォーマンスに与える影響を定量的に示す．これらのデータは実際に計測を行うための装置（三次元応力場計測スキャナー）の詳細設計のための基礎的データとして用いられる．

[1] 特にエポキシなどの高分子材料は応力場の変化に対して複屈折場が敏感に変化する，光弾性感度の高い材料である．

2. 理論と定式化

2.1 問題設定

任意の三次元的応力状態にある媒体中を通過する光線（三次元光弾性における応力場のプローブ）の偏光状態は，次に示す支配方程式に従って変化する．

$$\frac{d\mathbf{A}}{dz} = \mathbf{GA} \qquad (1)$$

ここで z は光線の進行方向，$\mathbf{A} = (A_x, A_y)^T$ は z 軸に垂直な xy 平面上での光ベクトル（$\mathbf{A} \in C^2$：2 次元複素数ベクトル空間）であり，その x, y 成分は極形式でそれぞれ，$A_x = k_x e^{\imath\delta_x}$, $A_y = k_y e^{\imath\delta_y}$ と表される．k_x, k_y は光ベクトルの振幅を，δ_x, δ_y は光ベクトルの絶対位相を表す．$\mathbf{G}$ は媒体中の応力場の xy 平面上への射影を成分として持つ 2×2 の対称行列である．その成分はそれぞれ，$G_{11} = -\frac{1}{2}\imath C_0(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}), G_{12} = -\frac{1}{2}\imath C_0 \sigma_{xy}, G_{22} = -G_{11}$ である．ここで，C_0 は応力場と複屈折場の線形関係を規定する材料定数であり，光弾性定数と呼ばれる．三次元光弾性は未知の $\mathbf{G}$（媒体内部の応力状態）を計測データ $\mathbf{A}|_{in/out}$（入射／透過光）から同定するという逆問題となる．

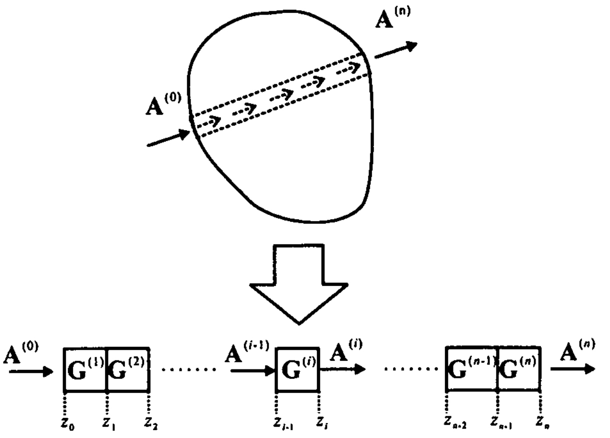
式 (1) によると，媒体中を通過した光線の偏光状態の変化（光ベクトルの位相の変化）は，媒体内部の応力状態の射影に関する情報を，積分された形で反映する．従って，原理的には多数の方向から光線を入射し，その偏光状態の変化を計測することにより媒体内部の応力場に関する十分な情報が得られるはずである．

このような問題，つまりトモグラフィーの問題で実用に供されている技術としては X 線 CT スキャンが挙げられる．これは数理的には式 (1) の $\mathbf{A}, \mathbf{G}$ がそれぞれスカラー量 a, g に置き換えられたスカラー場の逆解析に対応する．このとき，式 (1) は解析解

$$\ln\left(\frac{a_n}{a_0}\right) = \int_{z_0}^{z_n} g dz$$

を持つ．ここで，添字 $0, n$ はそれぞれインプットとアウトプットに対応する物理量であることを示す．多数の異なる方向からの a_0 と a_n の計測から g の離散 Radon 変換が構成される．離散 Radon 変換の計測データからもとの関数 g を同定する問題は線形方程式を解く問題に帰着される，簡単な逆問題である[1]．

一方，式 (1) で示される三次元光弾性の問題は光路上の応力場の影響による光ベクトルの変化の積分値（ベクトル場）から媒体内部の応力場を再構築する問題，テンソル場のトモグラフィーである．このとき，媒体を透過した光線と媒体内部の応力状態は非線形関係で結ばれる[2]．この非線形性を明示するために，図－1に示



図−1 離散化された媒体中を通過する光線

すように媒体中を通過する光線の経路を離散化して考える．光線の経路は各要素内で一定の応力状態にある n 個の要素に分割され，i 番目の要素の複屈折場を表す行列は $\mathbf{G}^{(i)}$, 入射光・透過光はそれぞれ $\mathbf{A}^{(i-1)}$, $\mathbf{A}^{(i)}$ と表される．式 (1) から，透過光 $\mathbf{A}^{(n)}$ は次のように表される．

$$\mathbf{A}^{(n)} = (\mathbf{I} + \mathbf{H}^{(n)})(\mathbf{I} + \mathbf{H}^{(n-1)}) \cdots (\mathbf{I} + \mathbf{H}^{(1)})\mathbf{A}^{(0)} \quad (2)$$

ここで $\mathbf{I}$ は 2×2 の単位行列，$\mathbf{H}^{(i)} = \mathbf{G}^{(i)}(z_i - z_{i-1})$ である．式 (2) の非可換な行列の積は，同定されるべき未知数 $\boldsymbol{\sigma}^{(i)}$（$i$ 番目の要素内の応力テンソル）が支配方程式の中に積の形で入ることを示す．従って，三次元光弾性（テンソル場トモグラフィー）の問題は非線形問題となる．

従来用いられてきた三次元光弾性の問題の解析手法は，式 (2) の非線形性の回避を目指したものであり，

1. 光の経路を物理的・光学的に細かく分割して解析する方法[2]（応力凍結法・散乱光光弾性）
2. 線形近似可能な応力場の解析に特化した方法 (Integrated Photoelasticity[3])

の2つに大別される．数学的には，

1. 式 (2) を $\mathbf{A}^{(i)} = (\mathbf{I} + \mathbf{H}^{(i)})\mathbf{A}^{(i-1)}$ のように要素ごとに分割し，各要素に既知の光ベクトル，$\mathbf{A}^{(i-1)}$ を入射，すなわち二次元応力場を仮定できる薄いピースに分割して個々のピースを解析する手法
2. 式 (2) の Taylor 展開，
$$\mathbf{A}^{(n)} = \left(\mathbf{I} + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{H}^{(i)}\right)\mathbf{A}^{(0)} + (h.o.t)$$
から高次項（非線形項）を無視する手法

とまとめられる．いずれの手法も任意の三次元的応力場の非破壊・全視野計測を可能ならしめるものではない．

本研究で提案する手法— Load Incremental Approach は三次元光弾性の問題の本質である非線形性

[2] $\mathbf{G} = \mathbf{G}(z)$ であるため，式 (1) の解は，特殊な $\mathbf{G}$ を除き $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{(0)} \exp \mathbf{G}$ と表せないことは自明である．

を，支配方程式 (1) の増分型の考慮による線形化を用いて克服することを目指したものである．支配方程式の増分型は，形式的に

$$\frac{d\dot{\mathbf{A}}}{dz} = \dot{\mathbf{G}}\,\mathbf{A} + \mathbf{G}\,\dot{\mathbf{A}} \tag{3}$$

と表される．ここで考慮される増分は，媒体に与えられる微小な荷重増分に対する変化量である．式 (3) において $\mathbf{G}$, $\mathbf{A}$ はそれぞれ増分前の応力状態に対応し，$\dot{\mathbf{G}}$, $\dot{\mathbf{A}}$ はそれぞれ微小な荷重増分に対する $\mathbf{G}$, $\mathbf{A}$ の変化量を表す．応力増分の関数である $\dot{\mathbf{G}}$ は増分前の応力状態を既知として，荷重増分に伴う透過光の変化 $\dot{\mathbf{A}}$ の計測データを入力とした線形問題を解くことにより求められる．このステップから得られる応力増分を積み上げていくことにより任意の三次元的応力場に至る媒体内の応力場の履歴を得ることができる．ただし，この手法では「増分前の応力状態は既知」という前提に立っているため，解析の結果得られるものは，初期応力状態（たとえば無応力状態）と増分を積み上げて最終的に到達する応力状態との差である．従って，残留応力解析のように初期応力として未知の応力状態が存在する問題には適さない．

2.2 定式化

Load Incremental Approach では支配方程式 (1) を離散化して解いた解，式 (2) の微小な荷重増分に対する増分を考える．

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{A}}^{(n)} = \Big[\, & \dot{\mathbf{H}}^{(n)}(\mathbf{I}+\mathbf{H}^{(n-1)})\cdots(\mathbf{I}+\mathbf{H}^{(1)}) \\ & +(\mathbf{I}+\mathbf{H}^{(n)})\dot{\mathbf{H}}^{(n-1)}\cdots(\mathbf{I}+\mathbf{H}^{(1)}) \\ & + \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ & +(\mathbf{I}+\mathbf{H}^{(n)})\cdots\dot{\mathbf{H}}^{(2)}(\mathbf{I}+\mathbf{H}^{(1)}) \\ & +(\mathbf{I}+\mathbf{H}^{(n)})\cdots(\mathbf{I}+\mathbf{H}^{(2)})\dot{\mathbf{H}}^{(1)} \,\Big]\mathbf{A}^{(0)}\end{aligned} \tag{4}$$

式 (4) において $\dot{\mathbf{H}}^{(i)}$ は i 番目の要素内の未知の応力増分 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(i)}$ の線形和を成分として持つ 2×2 の対称行列である．いま，増分前の応力状態は既知という前提に立っているため，すべての $\mathbf{H}^{(i)}$ は既知である．従って，透過光の増分 $\dot{\mathbf{A}}^{(n)}$ は各要素の未知の応力増分 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(i)}$ の線形和の形で表される．微小な荷重ステップでの透過光の変化 $\dot{\mathbf{A}}^{(n)}$ を十分多数の方向から計測することにより，各要素での応力増分 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(i)}$ を未知数とする線形方程式を立てることができる．

以上の線形化が本研究で提案する Load Incremental Approach による三次元光弾性問題の解法の本質である．しかし，この手法を用いて三次元応力場の計測を実際に行うことを考えると，式 (4) を直接用いることは簡単ではない．透過光ベクトルは複素ベクトルであり，x, y 成分は極形式でそれぞれ，$A_x = k_x e^{\imath\delta_x}$, $A_y = k_y e^{\imath\delta_y}$ と表される．ここに現れる物理量のうち，光ベクトルの振幅，k_x, k_y に関しては容易に精密な計測を行うことが可能であるが，絶対位相，δ_x, δ_y の計測には干渉計を用いた実験装置が必要となる．このとき，精密な測定のためには実験系の振動を極限まで除く必要があるが，Load Incremental Approach では，供試体に載荷しながらの計測が必須であるため振動の発生は不可避であり，干渉計による光路差測定とは相容れない状況が生じる．

これに対して，相対的位相差，$\delta(=\delta_x-\delta_y)$ は光ベクトルの振幅の測定のみから決定することが可能であり，干渉計による光路差測定の必要はない．従って，精密な実験・計測を行うためには，絶対位相，δ_x, δ_y のかわりに相対的位相差，δ を用いる形に支配方程式を変形する必要がある．以上の要請から，補 A に示す計算を行うことにより，次に示す積分形の支配方程式が得られる．

$$\frac{1}{C_0}\Big[k_x k_y \cos\delta\Big]_{z_0}^{z_n} = \int_{z_0}^{z_n}(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})k_x k_y \sin\delta\, dz \tag{5}$$

$$\frac{1}{4C_0}\Big[{k_y}^2-{k_x}^2\Big]_{z_0}^{z_n} = \int_{z_0}^{z_n}\sigma_{xy}\,k_x\,k_y\,\sin\delta\,dz \tag{6}$$

次章に示す数値解析は，これらの支配方程式を離散化したものの増分型を用いて行った．この増分型は式 (4) と同様の微分を式 (5), (6) に適用することで得られるが，式の表現自体は非常に煩雑であるため，その詳細はここでは示さない．

以上の定式化に基づき，数値解析を行う．N 個の要素からなる物体の解析を行う場合，未知数は $6N$ 個の応力成分である．ただし，式 (1) 中の $\mathbf{G}$ の形から明らかなように，光弾性の原理に基づく計測は応力の体積成分 ($I_1 = \sigma_1+\sigma_2+\sigma_3$) の変化を感知しない．従って，多方向からの光線の入射による透過光の計測からは，たかだか $5N$ 個の独立な方程式が得られるのみである．

応力の体積成分については光弾性計測以外の条件を課す必要がある．この条件としては応力場の釣合式 ($\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}=0$) が最適である．実際，釣合式の導入により $3N$ 個の条件式が得られ，逆解析の負荷が劇的に低減される．しかし，本研究で提案する手法の数値解析手法としての有効性の検討のために，現時点では釣合式の導入は留保し，光弾性の原理から得られる条件式を用いて解析を行う．

従って，以下に示す数値解析例では，ランダムに発生させた（釣合式を満たさない）応力場について解析を行う．応力場の体積成分に関してはランダムに発生させる応力場に $I_1=0$ の条件を課す．

3. 数値解析

Load Incremental Approach では荷重増分前の応力状態 $\boldsymbol{\sigma}$ に微小な応力増分 $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ が積み上げられる．この $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ は，増分前の応力状態 $\boldsymbol{\sigma}$ と計測される透過光の情報を入力とし，下に示すアルゴリズムに基づいて計算される．

(i) 初期値: $\boldsymbol{\sigma}^{[0]} = \boldsymbol{\sigma}$, $\Delta\boldsymbol{\sigma}^{[0]} = 0$.

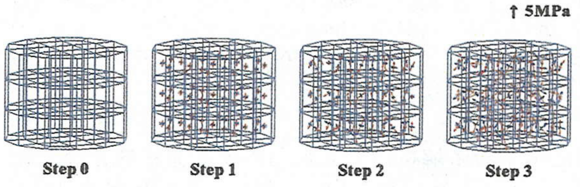
(ii)
$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^{[k+1]} = \boldsymbol{\sigma}^{[k]} + \Delta\boldsymbol{\sigma}^{[k]} \\ \Delta\boldsymbol{\sigma}^{[k+1]} = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\sigma}^{[k]})\Delta\boldsymbol{\mathcal{A}} \end{cases}$$

ここで [ ] 内の k はイタレーション・ステップ数を表す．$\Delta\boldsymbol{\mathcal{A}}$, $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\sigma}^{[k]})$ はそれぞれ式 (5), (6) の増分型の左辺に対応するベクトルと，右辺に対応する応力増分の係数行列の逆行列である

(ii) を $\Delta\boldsymbol{\sigma}^{[k+1]} \to 0$ になるまで繰り返す．

(iii) $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{[k]}$, (増分後の応力場に到達)

3.1 例題



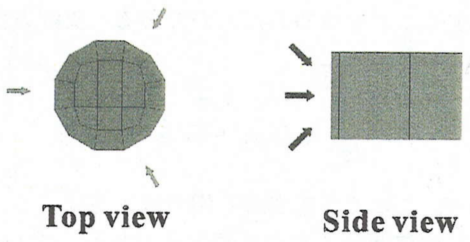
図−2 例題：4 つの荷重ステップにおける応力分布

図−2 に示す，Plexiglass（光弾性定数 $C_0 = 9.66 \times 10^{-5}$ [m/N]）からなる直径 $4mm$, 高さ $3mm$ の円柱状の物体を 63 個の六面体要素で離散化した物体を考える．特に断らない限り，以下のシミュレーションはすべてこの物質を対象として行われている．

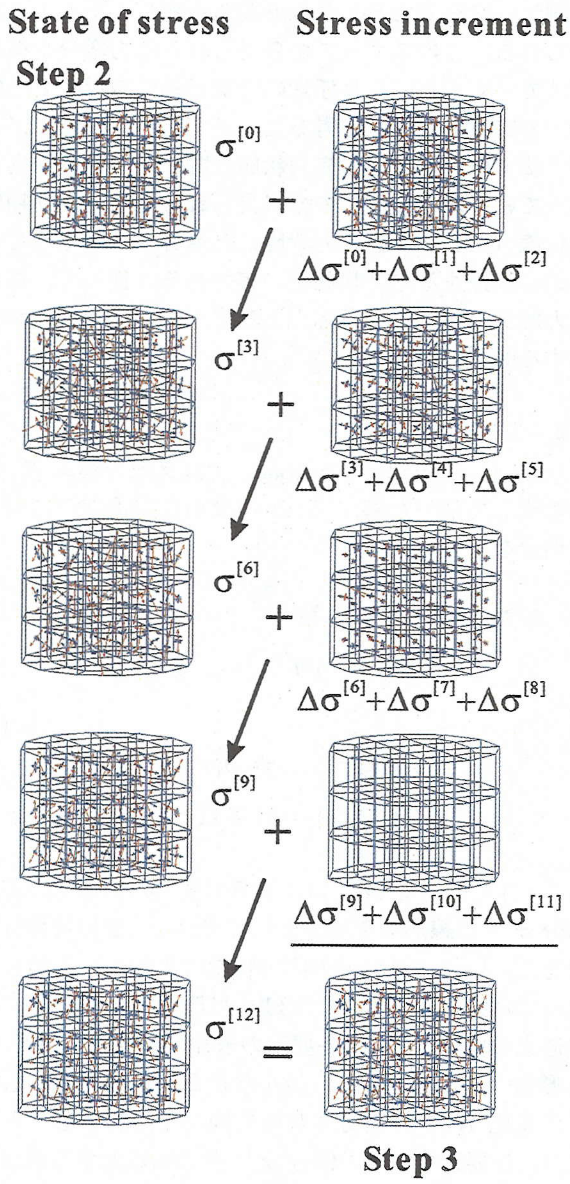
応力状態は各要素に 6 つの応力成分（ただし $I_1 = 0$ の条件を満たす）を与えることで定義される．例題として，図−2 のように，無応力状態から始まる 4 つの荷重ステップ間でランダムに与えられる応力増分[3]により定義される応力場の履歴を，逆解析により追跡することを目指す．図中の矢印は各要素での主応力の方向とその大きさ（赤い矢印は正・青い矢印は負）を示す．

各ステップでの応力増分同定のための逆解析の入力データは, i) 荷重ステップ間の透過光の差, ii) 直前の荷重ステップでの応力状態，である．透過光を計測するための光線の方向は図−3 に示す 9 方向である．水平方向の計測で各 24 本の光線を，水平から ±45° の計測で各 16 本の光線を入射したため，合計 168 本の透過光の値が逆解析のインプットとして用いられる．また，入射光線の波長は赤色 He-Ne レーザーを念頭に置き，$\lambda = 632.8nm$ とした．

[3] 各ステップ毎の応力増分は物体を通過する光が受ける相対的位相差が 2π を超えない範囲内でランダムに割り振られている．



図−3 逆解析に用いた光線の方向

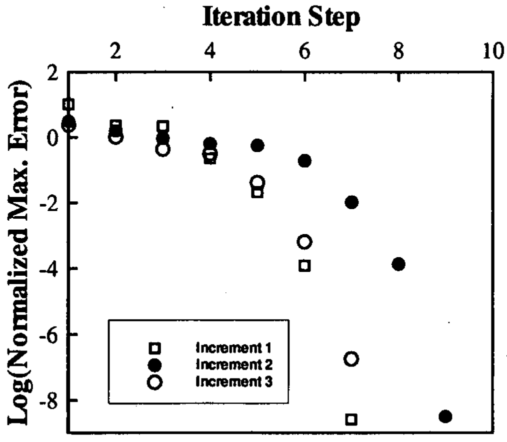


図−4 荷重ステップ 2 と 3 の間における応力増分の逆解析

図−4 に 3 番目の荷重増分（荷重ステップ 2 と 3 の間）の解析において，前述のアルゴリズムに基づくイタレーションの過程で応力増分がアップデートされ，収束していく様子を視覚的に示す．12 番目のイタレーショ

ンで応力状態は荷重ステップ 3 のそれに収束している．($\Delta\sigma^{[9]}+\Delta\sigma^{[10]}+\Delta\sigma^{[11]} \approx 0$ であるため，既に 8 番目のイタレーションが終わった時点で収束している．)

定量的には図－ 5 中の Increment 3 が示すように，最大相対誤差は 7 番目のイタレーションで 7 桁のオーダーまで低減し，よい収束性を示している．また，1 番目・2 番目の荷重増分に関しても，逆解析により得られる応力増分は正解のそれに良好に収束し，本手法の有効性を示している．(図－ 5 中の Increment 1 と Increment 2)

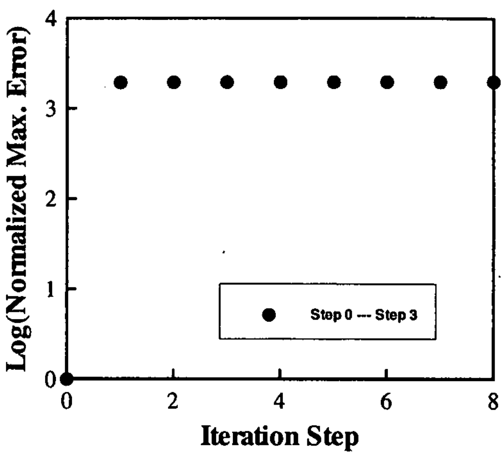


図–5 各荷重増分での正解の応力状態と計算値との誤差

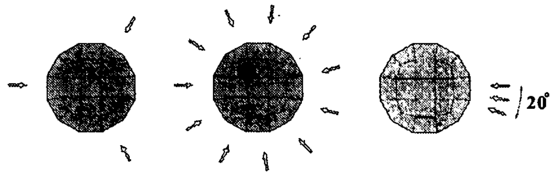
一方，途中の荷重ステップの解析を省略し，荷重ステップ 0 から 3 を 1 ステップで解析すると，図－ 6 に示すように相対誤差は収束せず，荷重増分を推定できない．これは，荷重ステップ 0 から 3 の間では，応力増分が大きすぎるため，2π を超える相対的位相差を受ける光線が存在することによる．通常，計測から決定できる相対的位相差には，$2n\pi$ ($n \in \mathcal{Z}$) の不定性があるため，$\Delta\delta < 2\pi$ の制約を設けない限り，一意に決定する事ができない．Load Incremental Approach により，任意の応力状態に到達するために複数の荷重ステップを積み上げることの物理的意味は，解析の入力に用いる光線で $\Delta\delta < 2\pi$ であることを保証することとなる．

3.2 計測の数・方向

実際の計測では，通常，多方向からの透過光計測を連続的に行うことはできない．従って，適当な計測方向のレゾリューションを決める必要がある．また，供試体を載荷しながら計測を行う必要があるため，計測の方向にも何らかの制約を受ける可能性がある．以上の要請からここでは，計測の数・計測方向への制約が Load Incremental Approach による応力場逆解析に与える影響を定量的に評価するため，図－ 7に示す 3 つの条件の解析モデルを取り扱う．それぞれ，(a) 必要最低限の計測数 ($5N$ 個の方程式)・計測方向は均等分配，(b) 必要以上の計測数・計測方向は均等分配，(c) 必要最低限の計測数・計測方向を制限 (20° の範囲内) である．なお，図－ 7は計測数・方向の平面図を表しており，鉛直方向の計測の振れ角に関しては，図－ 3 右の側面図に示すように，3 つの異なる角度からの計測を行うものとする．



図–6 荷重ステップ 0 ～ 3 を 1 ステップで解析した場合



図–7 計測数・計測方向の異なる 3 つの解析対象

これらのモデルに，図－ 2の Step 1 のように，決められた絶対値の中で各要素にランダムに発生させた応力増分を与え，それぞれのモデルで逆解析を行い，応力増分を同定する．このとき，追跡可能な応力増分の振れ幅の最大値がモデルにより，どのように変化するかを調べる．

表–1 追跡可能な応力増分の振れ幅の最大値（計測数・方向）

Case	(a)	(b)	(c)
応力増分の最大値	1.5MPa	4.0MPa	1.5MPa

表－ 1に，それぞれのケースにおいて追跡可能な応力増分の振れ幅の最大値を示す．(a) と (b) との比較から計測数を増やすことで追跡可能な応力増分の値が増すことがわかる．(b) で用いた計測数は必要な計測数の約 4 倍であるが，これ以上計測数を増やしても逆解

析のパフォーマンスは向上しない．(a) と (c) との比較からは，計測方向の制限は逆解析のパフォーマンスにさほど悪影響を与えないという結論が得られる．ただし，(c) のケースにおいて計測方向を 5° の範囲に狭めた場合，追跡可能な応力増分の最大値は 0.1MPa に低下したため，計測方向にはある程度の幅が必要であることがわかる．X 線 CT などのスカラー場のトモグラフィーにおいては，計測方向の制限は得られる方程式の独立性を低下させるため，同定精度の低下を招く．ところが，ここで行った解析においては，この直感に反し，ある程度以上の計測方向の幅が確保できれば逆解析のパフォーマンスをさほど低下させないとする結果が得られている．さらに詳細な解析と実験による検証が必要であるが，この計測方向の制限に対する寛容さはテンソル場トモグラフィーの特筆すべき性質と考えられる．

3.3 光弾性感度

光弾性現象を支配する唯一の材料定数は式 (1) に現れる光弾性定数 C_0 である．ここでは，C_0 が逆解析のパフォーマンスに及ぼす影響を調べるため，異なる光弾性定数をもつ 2 種類の材料に関して解析を行う．ここで用いられる材料はエポキシ樹脂 ($C_0 = 1.14\times10^{-3}$ [m/N]: 高感度) と，Plexiglass ($C_0 = 9.66\times10^{-5}$ [m/N] : 低感度) である[4]．

無応力状態にある，図－2 の **Step 0** に示す解析モデル内のすべての要素に，例題の **Step 1** で与えた応力場の分布を保ったままスケールダウンした応力増分を与える．表－2 に，エポキシ樹脂・Plexiglass それぞれの材料定数を持つモデルに対する逆解析で追跡可能な応力増分の振れ幅の最大値を示す．

表-2 追跡可能な応力増分の振れ幅の最大値（光弾性感度）

材料	エポキシ樹脂	Plexiglass
応力増分の最大値	0.15MPa	1.5MPa

光弾性定数が大きい材料は追跡可能な応力増分が小さくなる．また，表－2 の値は，相対的位相差の最大値が 2π に到達する応力増分の値に対応する．

4. 結論

本研究では，任意の三次元応力場の非破壊・全視野計測を目的とし，光弾性の原理に基づく三次元応力場計測のための逆解析手法を提案した．この手法の本質は三次元光弾性の問題の特質である非線形性を微小な荷重増分に対する線形化により克服することにある．この手法の適用は，従来の三次元光弾性（所与の応力状態のスナップショットに基づく応力場の再構築を目指す方法）に，履歴の考慮という新しい視点を導入するものである．

補 A. 支配方程式の変形

三次元光弾性の支配方程式 (1) に光ベクトルの成分を極形式で表示したもの，$A_x = k_x e^{i\delta_x}$, $A_y = k_y e^{i\delta_y}$ を代入し，実部と虚部を分けて書くと，次の 4 つの方程式が得られる．

$$\frac{1}{C_0}\frac{d}{dz}(k_x\cos\delta_x) = \frac{1}{2}(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})k_x\sin\delta_x + \sigma_{xy}k_y\sin\delta_y \tag{7}$$

$$\frac{1}{C_0}\frac{d}{dz}(k_x\sin\delta_x) = \frac{1}{2}(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})k_x\cos\delta_x - \sigma_{xy}k_y\cos\delta_y \tag{8}$$

$$\frac{1}{C_0}\frac{d}{dz}(k_y\cos\delta_y) = \sigma_{xy}k_x\sin\delta_y - \frac{1}{2}(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})k_y\sin\delta_y \tag{9}$$

$$\frac{1}{C_0}\frac{d}{dz}(k_y\sin\delta_y) = \sigma_{xy}k_x\cos\delta_y + \frac{1}{2}(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})k_y\cos\delta_y \tag{10}$$

(7)$\times k_y\cos\delta_y$ +(8)$\times k_y\sin\delta_y$ +(9)$\times k_x\cos\delta_x$ +(10)$\times k_x\sin\delta_x$ および (9)$\times k_y\cos\delta_y$ +(10)$\times k_y\sin\delta_y$ -((7)$\times k_x\cos\delta_x$ +(8)$\times k_x\sin\delta_x$) から，それぞれ

$$\frac{1}{C_0}\frac{d}{dz}(k_xk_y\cos\delta) = k_xk_y(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})\sin\delta$$

$$\frac{1}{4C_0}\frac{d}{dz}({k_y}^2-{k_x}^2) = \sigma_{xy}k_xk_y\sin\delta$$

が得られる．これらを z 方向に積分すると，

$$\frac{1}{C_0}\left[k_xk_y\cos\delta\right]_{z_0}^{z_n} = \int_{z_0}^{z_n}(\sigma_{11}-\sigma_{22})k_xk_y\sin\delta dz \tag{11}$$

$$\frac{1}{4C_0}\left[{k_y}^2-{k_x}^2\right]_{z_0}^{z_n} = \int_{z_0}^{z_n}\sigma_{xy}k_xk_y\sin\delta dz \tag{12}$$

となる．ここで，δ は光ベクトルの x 成分と y 成分の相対的位相差 $\delta = \delta_x - \delta_y$ である．

参考文献

1) Deans, S. R., The Radon Transform and Some of Its Applications, A Wiley-Interscience Publication, 1983
2) Ramesh, K., Digital Photoelasticity, Springer-Verlag Berlin and Heidelberg, 2000
3) Aben, H., Integrated Photoelasticity, McGraw-Hill, New York, 1979
4) Kobayashi, A. S., Handbook on experimental mechanics, Prentice-Hall, 1987.

(2002 年 4 月 19 日 受付)