

転波列発生不安定性理論

An instability theory of the generation of roll waves

泉 典洋*・Nguyen HUY PHUONG**

Norihiko IZUMI and Nguyen HUY PHUONG

*正会員 PhD Associate Professor, School of Civil Engineering, Asian Institute of Technology (P.O.Box 4 Khlong Luang, Pathumthani 12120, Thailand)

**M. Eng., Institute of Water Resources Planning, Hanoi, Vietnam

The flow on relatively steep channels is known to be unstable to evolve into a wave train, which is termed roll waves. Though the generation of roll waves has long been studied in terms of a linear stability analysis with the use of the depth-averaged St. Venant shallow water equations, the selection of finite wavelength cannot be properly explained by the existing theory. A new theory with the use of the non-depth-averaged Reynolds equations is presented in this study. The theory shows that the flow is stabilized in the range of short wavelength; roll waves with short wavelength disappear in the flow. The growth rate is found to be maximized when the wavelength is about 10–30 times as large as the normal depth. It is also found that the critical Froude number is not necessarily two but a function of bed roughness, and that the critical Froude number increases with decreasing bed roughness.

Key Words : *instability theory, roll wave, perturbation method, the St. Venant shallow water equations, the Reynolds equations*

1. はじめに

急勾配斜面上の流れには転波列と呼ばれる波列が形成されることが古くから知られている。たとえば雨の日に、アスファルトで覆われた坂道の表面には雨水でできたシートフローが観察されるが、この流れをよく見るとほぼ一定の間隔で平行に並んだ波列が観測される。また雨の日雨樋を伝わって流れる水量が定期的に変化するのも雨樋や屋根上に形成された転波列によるものである。

図-1 はカリフォルニア州アルカディアのサンタアニタ水路に見られる転波列の様子である。ボアのような波が流下方向にほぼ一様な間隔で並んでいる様子がうかがわれる。図-2 は Brock¹⁾らによる実験結果の一例である。この図は水路のある地点に取り付けられた圧力計の時間変化を示しており、縦軸が圧力、横軸が時間である。通常、水面形や流速が急激に変化しない漸変流の場合ほぼ静水圧が仮定でき、圧力を水深とみなすことができる。ここで問題となる転波列の場合、発達した転波では波の前面にショックウェーブが形成され水深の急激な変化が生じ静水圧の仮定が成立しなくなると考えられるが、それ以外のほとんどの領域では圧力計の値はほぼ水深に一致しているとみなすことができる。この図によると転波の通過とともに水深は急激に増加し、その後時間とともに徐々に減少していく様子がうかがわれる。

このような転波列に対する研究は古くから行われており、その発生初期における線形安定性理論、十分発達した後における非線形理論などさまざまな研究がなされている^{2), 3), 4), 5), 6)}。また近年では非線形安定性理論の発展をうけて、発生初期から有限振幅にいたる発

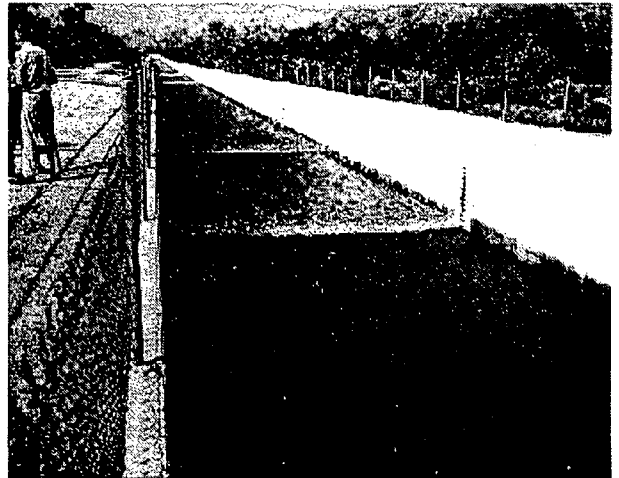
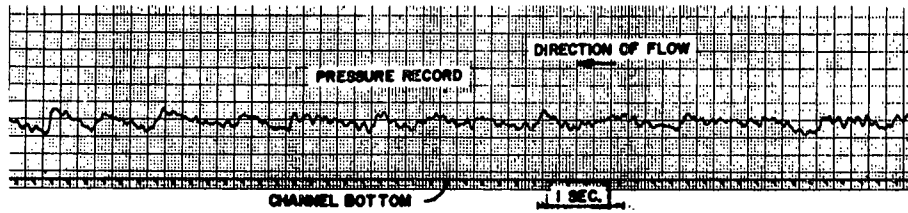


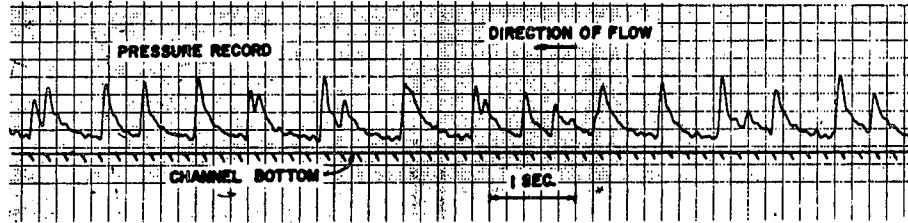
図-1 カリフォルニア州アルカディア、サンタアニタ水路に見られる転波列。文献 1) より転載。

達段階を弱非線形安定性解析の手法を用いて理論的に記述しようという試みも行われている⁵⁾。それらの研究によると、微小擾乱が発達して転波列が形成されていく過程で速い転波が遅い転波を吸収して大きい転波へと発達し、それに伴って波長が急速に大きくなっていくこと、十分発達した転波はフルード数と波長を与えると完全に記述することが可能であるが、波長は理論的に決定できないこと等がわかっている。

これら従来の理論においては転波列の発生メカニズムの説明のために、流れの方程式を水深方向に平均した浅水流方程式が用いられてきた。ところがこの方法では転波列発生初期における卓越波長が無限小となり、



(a)



(b)

図-2 水面形状の時系列変化。(a) 十分に発達する前の微小振幅転波列, (b) 十分に発達し波の前面にショックウェーブを伴う転波列. 文献 1) より転載.

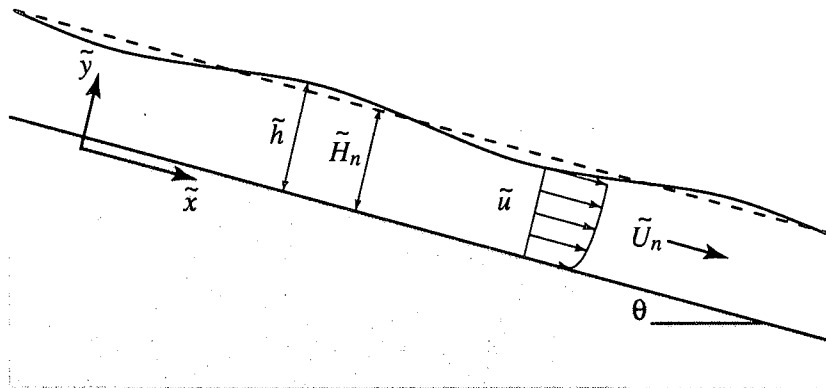


図-3 転波列の発生初期の概念図.

形成初期における波列の特性を十分に説明できないことが知られている。特に線形理論を基礎に高次展開を行う弱非線形解析の場合、線形理論が現象の本質を十分につかんだものでなければ、弱非線形解析の結果も有意なものではなくなってしまう。

底面や水表面が波状の境界を持つような場合、水面形と流速、底面剪断力の間には位相差が生じ、その位相差が現象の不安定性および有限な波長の選択に重要な役割を果たしている。たとえば河川の移動床上におけるデューンの発生理論では、浅水流近似を用いず Reynolds 方程式を用いた Engelund⁷⁾の理論によって初めて、デューンの発生レジームや卓越波長が適切に予測できるようになった。また流れが射流であるとき侵食性河床上に発生する波（侵食性デューン）を浅水流近似を用いて線形安定解析すると、最大の成長率を有するような卓越波長が存在せず波長を決定することはできないが、Reynolds 方程式を用いると卓越波長が現れることもわかっている^{8), 9)}。本研究でも従来用いられてきた浅水流方程式ではなく、水深平均しないレイノルズ方程式を用いて斜面上の流れを定式化し、転波列発生の

線形安定解析を試みる。

2. 浅水流近似を用いた線形安定解析

これまでの転波列発生の理論では St. Venant の浅水流方程式が用いられてきた。ここではその理論について簡単に振り返っておこう。傾斜角 θ の斜面上の流れは St. Venant 浅水流方程式を用いて次のように表される。

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{t}} + U \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} = -g \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} + g \sin \theta - C_f \frac{\bar{U}^2}{\bar{h}} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{U} \bar{h}}{\partial \bar{x}} = 0 \quad (2)$$

ここで $\bar{U}$ は水深平均した流下方向流速、 $\bar{h}$ は水深、 $\bar{t}$ は時間、 $\bar{x}$ は流下方向座標、 g は重力加速度 ($= 9.8 \text{ m/s}^2$)、 θ は水路の勾配角である。また抵抗係数 C_f は水深と粗度の弱い関数であることが知られているが、ここでは簡略化のために定数と仮定する。

次のような無次元化を導入する。

$$\tilde{U} = \tilde{U}_n U, \quad \tilde{h} = \tilde{H}_n h \quad (3a, b)$$

$$\tilde{x} = \frac{\tilde{H}_n}{\sin \theta} x^*, \quad \tilde{t} = \left(\frac{\tilde{H}_n / \sin \theta}{\tilde{U}_n} \right) t^* \quad (3c, d)$$

ここで $\tilde{U}_n$ および $\tilde{H}_n$ はそれぞれ等流状態における等流流速および等流水深である。また第3章で用いられる無次元の時間および流下方向座標と区別するために*を用いている。

無次元化した支配方程式は次のようになる。

$$F_n^2 \left(\frac{\partial U}{\partial t^*} + U \frac{\partial U}{\partial x^*} \right) = 1 - \frac{\partial h}{\partial x^*} - \frac{U^2}{h} \quad (4)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t^*} + \frac{\partial U h}{\partial x^*} = 0 \quad (5)$$

ここで F_n は等流状態におけるフルード数である。

流速および水深に次のような摂動を導入する。

$$U = 1 + A e^{\Omega^* t^*} U_1 e^{i(k^* x^* - \omega^* t^*)} \quad (6a)$$

$$h = 1 + A e^{\Omega^* t^*} h_1 e^{i(k^* x^* - \omega^* t^*)} \quad (6b)$$

ここで A は摂動の振幅であり、擾乱の発生初期を取り扱う本理論では数学的には無限小であることが仮定される。また Ω^* および k^* , ω^* はそれぞれ摂動の成長率および波数、角振動数の無次元量であり、 k^* および ω^* は次式で表される。

$$k^* = \frac{2\pi \tilde{H}_n}{\sin \theta \tilde{\lambda}}, \quad \omega^* = \frac{2\pi \tilde{H}_n}{\sin \theta \tilde{T}} \quad (7a, b)$$

ここで $\tilde{\lambda}$ および $\tilde{T}$ はそれぞれ波長および周期である。

式(6)を(4)および(5)に代入すると、 $O(A)$ のオーダーにおいて次の方程式が得られる。

$$[F_n^2 (\Omega^* - i\omega^* + ik^*) + 2] U_1 + (ik^* - 1) h_1 = 0 \quad (8)$$

$$ik^* U_1 + (\Omega^* - i\omega^* + ik^*) h_1 = 0 \quad (9)$$

U_1 および h_1 が自明でない解を持つためには次のような関係の成立が要求される。

$$\begin{vmatrix} F_n^2 (\Omega^* - i\omega^* + ik^*) + 2 & ik^* - 1 \\ ik & \Omega^* - i\omega^* + ik^* \end{vmatrix} = 0 \quad (10)$$

式(10)の解の内、 Ω^* が正の値を取り得る解は次式で表される。

$$\Omega^* = -\frac{1}{F_n^2} + \sqrt{\frac{F_n^4 k^{*2} + (F_n^2 k^{*2} - 1)^2 + 1}{2k^* F_n^2}} - \frac{1}{2F_n^2} \quad (11)$$

$$\omega^* = k^* + \sqrt{\frac{F_n^4 k^{*2} + (F_n^2 k^{*2} - 1)^2 - 1}{2F_n^4}} + \frac{k^{*2}}{2F_n^2} \quad (12)$$

図-4に Ω^* の値を F_n と k^* の関数として示す。図から正の Ω^* は、波数によらず $F_n > 2$ の領域に現れるこ

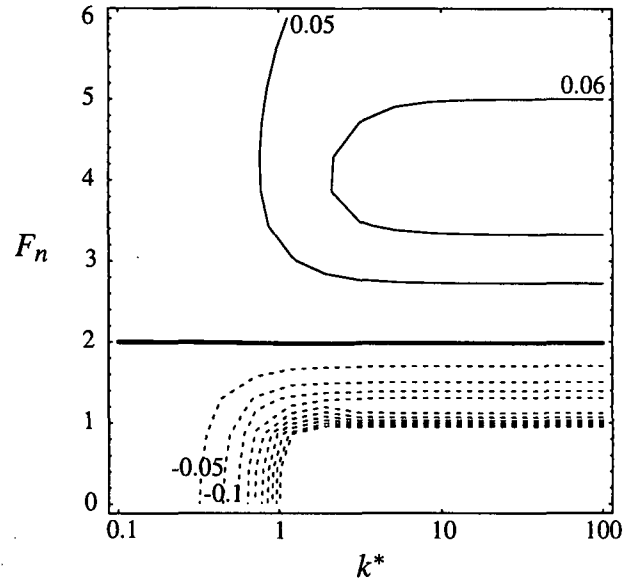


図-4 擾乱の成長率 Ω^* のコンタ図。実線および破線はそれぞれ正および負の成長率を表している。また太い実線は成長率ゼロ（中立曲線）を表している。

とがわかる。ここでもしある波数において摂動の成長率 Ω^* が最大になるとすれば、その波数を有する摂動が他の波数の摂動より早く成長することになる。すなわち最大の成長率を有する波数の摂動が、転波の成長にしたがって支配的となり、その波数に対応する波長が転波列の間隔として現れるものと考えられる。ところが図-4を見ると、摂動の成長率 Ω^* は $F_n > 2$ の領域において波数の増加にしたがって単調に増加していることがわかる。すなわち無限大の波数に対応する無限小の波長が最も急速に成長することになる。

3. 浅水流近似を用いない線形安定解析

3.1 定式化

前節では、浅水流近似を用いた線形安定解析では非常に小さい波長の擾乱が支配的になることが示された。本節では浅水流近似を用いない定式化を行う。

勾配角 θ を有する斜面上の流れは次の Reynolds 方程式を用いて表される。

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + g \sin \theta + \bar{\epsilon} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) \quad (14)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \bar{\epsilon} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) \quad (15)$$

ここで $\bar{x}$ および $\bar{y}$ はそれぞれ流下方向および斜面对して垂直方向の座標、 $\bar{u}$ および $\bar{v}$ はそれぞれ流速の $\bar{x}$ および $\bar{y}$ 方向成分、 $\bar{p}$ はピエゾ圧力、($= \bar{p}^* - \rho g \bar{y} \cos \theta$)、 $\bar{p}^*$ は圧力、 $\bar{t}$ は時間、 ρ および $\bar{\epsilon}$ はそれぞれ水の密度および渦動粘性係数である。Engelund⁷⁾ および Fredsøe¹⁰⁾ は

渦動粘性係数 $\tilde{\epsilon}$ が次のように表されると仮定している。

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon \tilde{U}_f \tilde{H}_n \quad (16)$$

ここで $\tilde{U}_f$ および $\tilde{H}_n$ はそれぞれ基本状態における摩擦速度および水深である。Engelund⁷⁾ および Fredsøe¹⁰⁾ は ϵ の値として 0.077 の値を採用している。ここでもこの値を用いることにする。

底面上では、流速の底面に対して垂直な成分はゼロとなる。すなわち次式が成り立つ。

$$\tilde{v} = 0 \quad \text{at} \quad \tilde{y} = 0 \quad (17)$$

Engelund⁷⁾ および Fredsøe¹⁰⁾ は底面近傍において、剪断力が一定とみなせるようなごく薄い層 (constant stress layer) の存在を仮定し、constant stress layer 上部における剪断力と速度 (スリップ速度) の関係を次のように仮定した。

$$\tilde{u} = K \tilde{U}_f \quad \text{at} \quad \tilde{y} = 0 \quad (18)$$

ここで $\tilde{U}_f$ は摩擦速度であり、次式で定義される。

$$\rho \tilde{U}_f^2 = \rho \tilde{\epsilon} \left(\left. \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \right|_{\tilde{y}=0} + \left. \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} \right|_{\tilde{y}=0} \right) \quad (19)$$

また K は次式で表される。

$$K = 1.9 + 2.5 \ln \left(\frac{\tilde{H}_n}{\tilde{k}_r} \right) \quad (20)$$

ここで $\tilde{k}_r$ は粗度高さである。

水面における運動学的境界条件は次のように表される。

$$\tilde{v} = \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} \quad \text{at} \quad \tilde{y} = \tilde{h} \quad (21)$$

ここで $\tilde{h}$ は前節と同様に水深を表している。

水面における動力学的条件は二つある。一つは水面に対する法線方向の応力が大気圧 $\tilde{p}_a$ に等しくなることである。

$$\tilde{p} = \tilde{p}_a \quad \text{at} \quad \tilde{y} = \tilde{h} \quad (22)$$

ここでは Reynolds 応力による寄与分は微小であるとして省略してある。

もう一つは剪断力が水面でゼロとなる条件である。この条件は、水面に与えられた擾乱の振幅が微小であるような場合、水面勾配の 2 次以上のオーダーを無視して次のように表される。

$$\rho \tilde{\epsilon} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} \right) = 0 \quad \text{at} \quad \tilde{y} = \tilde{h} \quad (23)$$

3.2 無次元化

次のような無次元化を導入する。

$$(\tilde{u}, \tilde{v}) = \frac{\tilde{U}_f}{\epsilon} (u, v), \quad (\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{H}_n (x, y) \quad (24a, b)$$

$$\tilde{p} = \rho \left(\frac{\tilde{U}_f}{\epsilon} \right)^2 p, \quad \tilde{t} = \frac{\tilde{H}_n}{\tilde{U}_f / \epsilon} t \quad (24c, d)$$

上式の無次元化を用いると、支配方程式は次のように無次元化される。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (25)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \epsilon^2 \left(1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (26)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \epsilon^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (27)$$

式 (17)–(23) は次のように無次元化される。

$$v = 0 \quad \text{at} \quad y = 0 \quad (28)$$

$$u^2 = \kappa^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad \text{at} \quad y = 0 \quad (29)$$

$$v = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{at} \quad y = h \quad (30)$$

$$p = p_a \quad \text{at} \quad y = h \quad (31)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{at} \quad y = h \quad (32)$$

ここで σ および κ はそれぞれ正規化された勾配および K であり、 $\sigma = \sin \theta / \epsilon^2$ および $\kappa = \epsilon K$ である。

3.3 基本解

線形安定解析を行う前に、基準状態における基本解を導いておく。基準状態では等流状態が実現している。すなわち次式が成立している。

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = -1 \quad (33)$$

上式は積分できて次のようになる。

$$\frac{du}{dy} = C_0 - y \quad (34)$$

ここで C_0 は積分定数であり、水面 ($y = 1$) で剪断力がゼロ ($du/dy = 0$) の条件から 1 であることがわかる。式 (34) はさらに積分できて次のようになる。

$$u = C_1 + y - \frac{1}{2} y^2 \quad (35)$$

ここで C_1 は積分定数である。式 (34) より河床上 ($y = 0$) で流速勾配が 1 ($du/dy = 1$) であることがわかり、この条件を用いると $C_1 = \kappa$ であることが式 (29) より導かれる。よって

$$u = \kappa + y - \frac{1}{2} y^2 \quad (36)$$

式 (36) は水深方向に積分できて次のようになる。

$$\int_0^1 (\kappa + y - \frac{1}{2} y^2) dy = \kappa + \frac{1}{3} \quad (37)$$

この値は基準状態における無次元の水深平均流速であり、前出の等流平均流速 $\tilde{U}_n$ に対応する無次元量である。式 (24a) を用いて次元量に戻すと次式が得られる。

$$\tilde{U}_n = \frac{\tilde{U}_f}{\epsilon} \left(\kappa + \frac{1}{3} \right) \quad (38)$$

浅水流近似で用いた抵抗係数 C_f が次式で定義されることを考えれば

$$\tilde{U}_f^2 = C_f \tilde{U}_n^2 \quad (39)$$

κ と C_f の間には次のような関係があることがわかる。

$$C_f = \left(\frac{\epsilon}{\kappa + \frac{1}{3}} \right)^2 \quad (40)$$

また $\tilde{U}_n$ を用いたフルード数 F_n は次のように表される。

$$F_n = \frac{\tilde{U}_f}{\epsilon(g\tilde{H}_n)^{\frac{1}{2}}} \left(\kappa + \frac{1}{3} \right) = \sigma^{\frac{1}{2}} \left(\kappa + \frac{1}{3} \right) \quad (41)$$

3.4 線形安定解析

水深に対して次のような摂動を導入する。

$$h = 1 + Ah_1 \quad (42)$$

それに対応して流速および圧力も次のように摂動展開する。

$$u = u_0 + Au_1, \quad v = Av_1 \quad (43a, b)$$

$$p = p_0 + Ap_1 \quad (43c)$$

式(43)を(25)–(27)に代入すると $O(1)$ のオーダーにおいて次式を得る。

$$1 + \frac{d^2 u_0}{dy^2} = 0 \quad (44)$$

上式を解くと、前節で導かれた基本解が再び得られる。新しく導入した変数 u_0 を用いて次式で表される。

$$u_0 = \kappa + y - \frac{1}{2}y^2 \quad (45)$$

$O(A)$ のオーダーでは次のようになる。

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_0' v_1 = -\frac{\partial p_1}{\partial x} + \epsilon^2 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) \quad (46)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = -\frac{\partial p_1}{\partial y} + \epsilon^2 \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} \right) \quad (47)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \quad (48)$$

ここで ∂ は y による全微分を表している。

次のような流線関数を導入する。

$$(u_1, v_1) = \left(-\frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \quad (49)$$

すると支配方程式(46)–(48)は次のように書き直される。

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} - u_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + u_0' \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial p_1}{\partial x} - \epsilon^2 \nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (50)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x} + u_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{\partial p_1}{\partial y} + \epsilon^2 \nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (51)$$

上式から p_1 を消去して次式を得る。

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} - u_0'' \frac{\partial \psi}{\partial x} - \epsilon^2 \nabla^2 \nabla^2 \psi = 0 \quad (52)$$

もし水面における擾乱が次のような形で与えられるとすれば

$$h_1 = e^{\Omega t} e^{i(kx - \omega t)} \quad (53)$$

流線関数 ψ も次のような形を有するであろう。

$$\psi = \phi(y) e^{\Omega t} e^{i(kx - \omega t)}, \quad (54)$$

式(54)を(52)に代入すると次式が得られる。

$$(\Omega - i\omega)(-k^2 \phi + \phi'') + iku_0(-k^2 \phi + \phi'') - iku_0'' \phi - \epsilon^2(k^4 \phi - 2k^2 \phi'' + \phi^{iv}) = 0 \quad (55)$$

あるいは

$$\begin{aligned} & \phi^{iv} - \left[\left(\frac{\Omega}{\epsilon^2} + 2k^2 \right) + i \left(\frac{ku_0 - \omega}{\epsilon^2} \right) \right] \phi'' \\ & + \left[\left(\frac{\Omega + k^4}{\epsilon^2} \right) + i \left(\frac{k^3 u_0 + ku_0'' - \omega k^2}{\epsilon^2} \right) \right] \phi = 0 \end{aligned} \quad (56)$$

境界条件(28)–(30)および(32)は次のように線形化される。

$$\phi(0) = 0 \quad (57)$$

$$\phi''(0) = -\kappa^{-2} \phi'(0) \quad (58)$$

$$\phi(1) = \left(\kappa + \frac{1}{2} - \frac{\omega}{k} \right) - i \left(\frac{\Omega}{k} \right) \quad (59)$$

$$\phi''(1) + k^2 \phi(1) + 1 = 0 \quad (60)$$

境界条件(31)は流線関数を用いた形に変形する必要がある。 p_1 も次のような形を有するはずである。

$$p_1 = \hat{p}_1(y) e^{\Omega t} e^{i(kx - \omega t)} \quad (61)$$

式(43c)および(61)を用いると境界条件(31)からは $O(A)$ において次式が得られる。

$$\hat{p}_1(1) + p_0'(1) e^{\Omega t} e^{i(kx - \omega t)} = 0 \quad (62)$$

式(61)を式(50)および(51)に代入して $y = 1$ で評価すると、式(62)より次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \epsilon^2 \phi^{iv}(1) - \left\{ (\Omega + \epsilon^2 k^2) + i \left[k \left(\kappa + \frac{1}{2} \right) \right] \right\} \phi'(1) \\ & - \frac{k}{\sigma} = 0 \end{aligned} \quad (63)$$

3.5 解法

式(55)(あるいは(56))は $\phi(y)$ に関する4階の常微分方程式である。この微分方程式の解は、底面($y = 0$)において

- 水深方向流速がゼロとなる条件(57)

- 摩擦速度がスリップ速度に比例するという条件(58)

水面($y = 1$)において

- 運動学的境界条件(59)

- 水面における法線応力が大気圧に等しくなる条件(60)

- 水面における接線応力がゼロとなる条件(63)

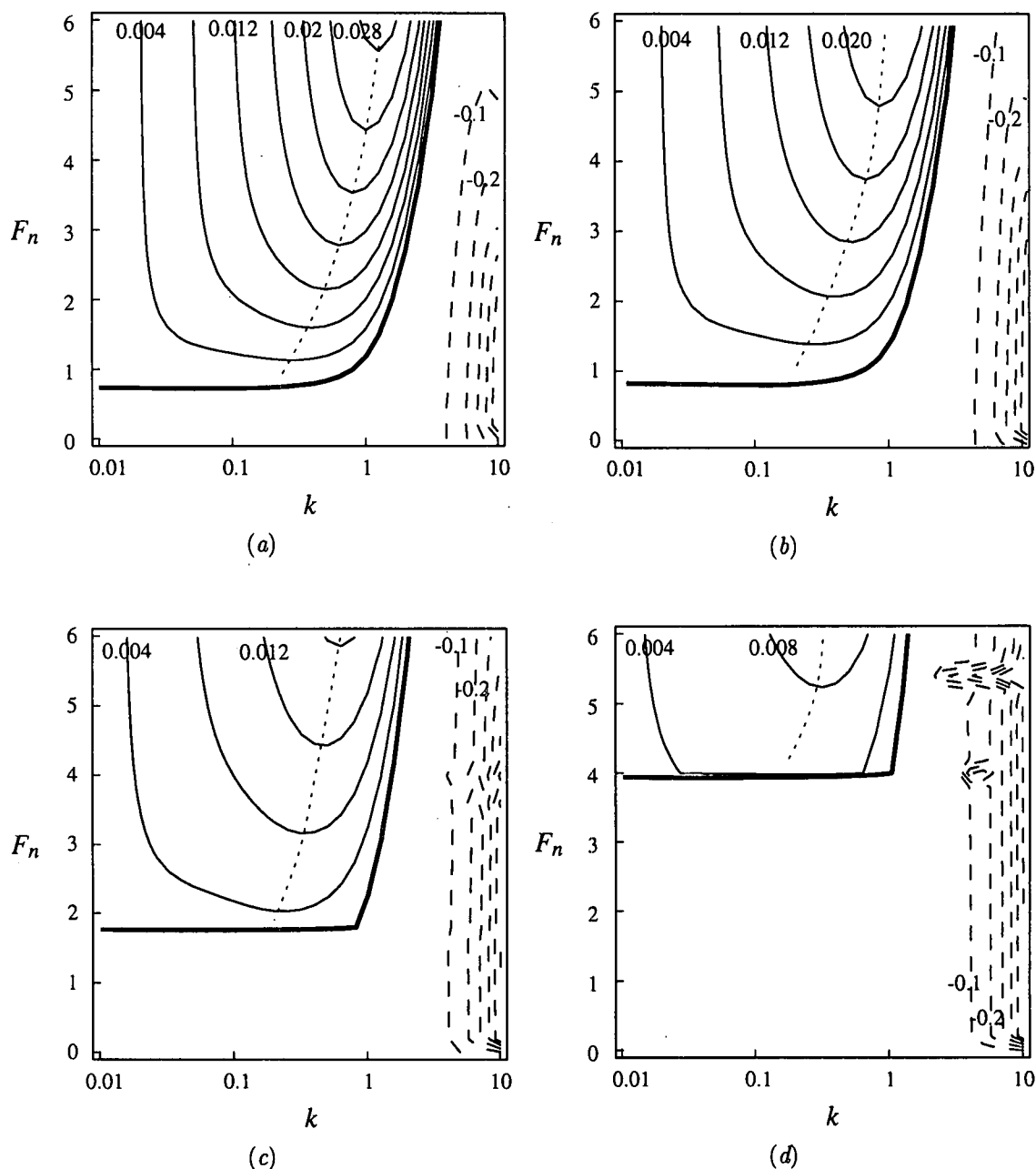


図-5 擾乱の成長率 Ω のコンター図. (a) $\kappa = 0.2$ ($C_f = 0.021$), (b) $\kappa = 0.4$ ($C_f = 0.011$), (c) $\kappa = 0.8$ ($C_f = 0.0046$), (d) $\kappa = 1.6$ ($C_f = 0.0016$). 実線および破線はそれぞれ正および負の成長率を表している. また太い実線は成長率ゼロの線 (中立曲線) を表しており, 点線は成長率のピーク的位置を示している.

の5個の境界条件を満足しなければならない. すなわち微分方程式 (55) (あるいは (56)) は境界条件 (57)–(60) および (63) とともに2点境界値問題を形成している. 但し注意しなければならないのは4階の常微分方程式に対して5個の境界条件が存在しており, 一つ境界条件が過剰になっていることである. 実はこの問題は, この過剰な境界条件によって $\Omega - i\omega$ の値が決定されるという固有値問題を形成している. 言い換えれば微分方程式 (55) (あるいは (56)) は, 複素数 $\Omega - i\omega$ がある特定の値をとるときのみ5個すべての境界条件を満たす解を持っている. この固有値問題を, 2点境界値問題の数値解法の一つである緩和法を用いて解く¹¹⁾.

4. 結果と考察

4.1 理論結果

図-5は理論解析によって得られた擾乱の成長率 Ω のコンター図である. 図の a および b, c, d はそれぞれ $\kappa = 0.2$ および 0.4, 0.8, 1.6 の場合に対応している. 図中実線は正のコンター, 破線は負のコンター, 太い実線は成長率ゼロの中立曲線, 点線は成長率のピーク的位置を示している.

図より直ちにわかるのは, 水面が不安定になる限界フルード数が必ずしも常に2ではなく, κ の値に応じて変化することである. $\kappa = 0.2$ および 0.4, 0.8, 1.6

はそれぞれ $C_f = 0.021$ および $0.011, 0.0046, 0.0016$ に相当しており、 κ の値が小さいほど抵抗係数が大きい（粗度が大きい）ことを示している。したがって水路床の粗度が大きいほど限界フルード数は小さくなることがうかがわれる。ただし Dressler²⁾の理論によれば発達した準定常転波列（一定の形状を維持しながら流下する転波列）が存在し得るのはフルード数が2以上の時に限られる。本理論によれば水路床の粗度が大きいとき、フルード数が2以下でも擾乱が発達することはいずれ得るが、準定常転波列にまで発達することはできないことになる。

また図より無次元波数 k がある程度以上大きくなると、擾乱の成長率はすべてのフルード数に対して負となり、水面は安定となることがうかがわれる。無次元波数 k は次のように定義される。

$$k = 2\pi \frac{\tilde{H}_n}{\lambda} \tag{64}$$

ここで λ は波長である。したがって小さな波長の擾乱は発達し得ないことがわかる。

さらに擾乱の発達率 Ω が最大となる波数、卓越波数はいずれの場合も $0.2\text{--}0.6$ 程度であり、式 (64) によれば卓越波長は等流水深の $10\text{--}30$ 倍前後であることになる。また卓越波長はフルード数の増加とともに減少する傾向にあることがわかる。

図-5c および d では中立曲線や成長率コンターに不連続に折れ曲がる点が見られる。この不連続性は緩和法で用いる水深方向の差分間隔を小さくしてもほとんど変化しないことから、数値計算に起因したものではなく、次に述べるような流れの特異性によるものであると考えられる。底面近傍の境界層では流速分布が急激に変化する強い特異性が存在している。この特異性の取り扱いを容易にするために本理論では底面近傍における constant stress layer とその上面でのスリップ速度を導入している。これによって流れの方程式を、渦動粘性係数が水深方向に一定であるという非常に簡単なモデルに帰着させることが可能となる。このモデルでは、 κ は constant stress layer 上面における無次元スリップ速度を表しており、 κ が大きくなることは底面近傍の特異性が強くなることに対応している。図-5によれば κ の値が大きくなるにしたがってコンターの不連続性も強くなっている。すなわちコンターの不連続性は底面近傍における特異性と密接に関係していることがわかる。

4.2 実験結果との比較

Brock¹⁾によれば、水路上流端付近で発生した微小擾乱は、流下とともに振幅と波長を徐々に大きく成長させ、図-2bのような、波列前面に衝撃波をともなった転波列を形成する。その際、水路の比較的の上流部では未だ十分に発達していない図-2aのような微小振幅の転波列が観察される。表-1に Brock が行った実験の内、微小振幅転波列に関する結果を示す。波長は等流水深の 100 倍前後となっており、前述の理論解析の結果と比較すると実験で観測された波長の方が理論より 10 倍程度大きくくなっていることがわかる。

表-1 Brock¹⁾による微小振幅転波列に関する実験結果

$\sin \theta$	F	C_f	$\tilde{\lambda}/\tilde{H}_n$	k	k^*
0.05011	3.71	0.00364	130	0.0482	0.962
0.05011	3.81	0.00345	133	0.0472	0.942
0.08429	4.96	0.00343	118	0.0532	0.631
0.08429	5.06	0.00329	115	0.0549	0.651
0.1192	5.60	0.00380	97.3	0.0645	0.541
0.1192	5.98	0.00333	94.8	0.0663	0.556

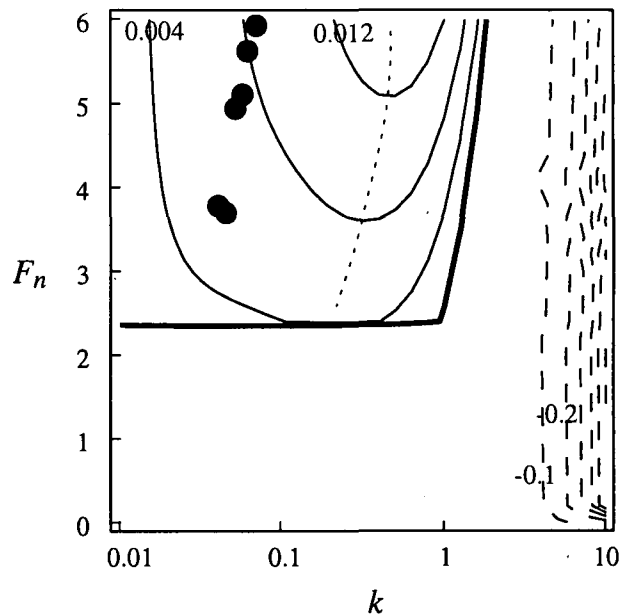


図-6 本研究で提案された浅水流近似を用いない理論結果と実験結果の比較。理論結果は $\kappa = 0.97$ ($C_f = 0.0035$) が用いられている。図中黒丸が実験結果を表している。

図-6は、 Ω のコンター図上に表-1中に示した波数の実験値を示したものである。図中黒丸が実験値に相当する。ここで理論では、表-1に示した実験の C_f はほぼ一定であるのでそれらの中間的な値である $C_f = 0.0035$ に対応する $\kappa = 0.97$ を用いてある。また理論から得られた卓越波数の位置、成長率のピークを点線を用いて示してある。卓越波数は 0.2 から 0.6 程度であるのに対し実験で得られた波数は 0.06 前後であり、やはりすべてのフルード数において体系的に 10 倍前後のずれがあることがわかる。前述したように微小擾乱が転波へと発達していく過程では速い転波が遅い転波を吸収して大きい転波へと発達し、それに伴って波長が急速に大きくなっていく。実験値と理論値のずれはこのような微小擾乱から転波への非線形発達が主たる原因であろう。

図-2aを見ると、大きな転波上に小さな微小擾乱が十個前後のついているのがわかる。図-2bを注意深く見ると、転波へと十分に発達した後も図-2aに見られたような微小擾乱がわずかに観察される。微小擾乱の波長が大きな波の波長のほぼ 10 分の 1 程度であるとすれば、本理論によって得られた卓越波長は図中の微小擾

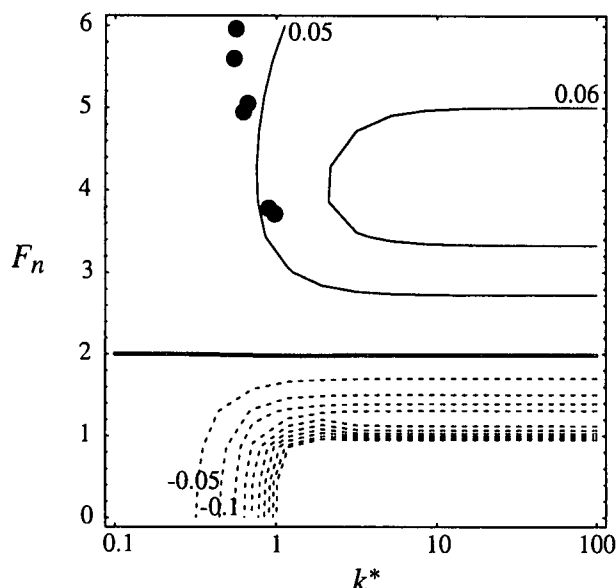


図-7 浅水流近似を用いた従来の理論結果と実験結果の比較。
図中黒丸が実験結果を表している。

乱の波長とほぼ一致していることになる。これらの図は発生した微小擾乱 10 個のうち 1 個程度が大きく発達していくことを示唆している。このような微小擾乱の発達過程を明らかにするためには、本理論を基礎とした弱非線形理論の適用が有効である。今後の課題である。

比較のために浅水流近似を用いた従来の理論と実験結果を比較した結果を図-7 に示す。ここで無次元波数 k^* の定義の違いに注意する必要がある。各実験の k^* の値を表-1 に示した。浅水流近似を用いた理論では k^* が大きくなるにつれて発達率は最大値に漸近することになり、 k^* が非常に大きい領域の擾乱が発達するはずであるが、実験値はいずれも $k^* = 1$ 付近に位置していることがわかる。

5. 結論

急勾配水路には転波列と呼ばれる波列が形成される。このような転波列の発生は、従来水深平均した浅水流方程式を用いた線形安定理論によって説明されてきた。しかし従来の理論では擾乱の発達率は波数とともに単調増加し、発達率は非常に大きな波数の領域（非常に小さな波長の領域）でほぼ一定値をとり、有限波長の波列が発生する機構を十分には説明できない。そこで本研究では浅水流近似を用いない定式化を用いた新たな線形安定理論を提案した。それによって得られた成果は次の通りである。

- 浅水流近似を用いた場合 2 であった限界フルード数は浅水流近似を用いない場合、水路床の粗度によって 1 から 3 程度の間を変化することが明らかになった。また限界フルード数は粗度の増加にと

もなって減少する。

- 浅水流近似を用いた場合、擾乱の発達率は波長の小さい領域で最大となるが、浅水流近似を用いない理論では波長が等流水深の 5 倍程度より小さい擾乱は発達しないことが明らかとなった。
- 擾乱の発達率が最大となる波長は等流水深の 30 倍から 10 倍程度であり、フルード数が大きくなるほど小さくなることが明らかとなった。この結果は波長が等流水深の 100 倍前後になるという実験結果とはかなり異なっているが、転波列の場合、波列の合体による波長の増加が擾乱の発達の段階で盛んに生じることを考慮すれば、上記の差は説明可能な範囲にあると考えられる。

謝辞： この研究は第一著者が Asian Institute of Technology 在任中に JICA の全面的な援助を得て行われた。ここに記して謝意を表する。

参考文献

- 1) Brock, R. R., Development of roll waves in open channels, Report No. KH-R-16, W. M. Kech Laboratory, California Institute of Technology, 226p, 1967.
- 2) Dressler, R. F., Mathematical solution of the problem of roll-waves in inclined open channels, *Commun. Pure Appl. Maths* 2, 149-194, 1949.
- 3) 岩垣雄一, 岩佐義朗, 転波列の水理学的特性について-薄層流に関する研究, 第 7 報-, 土木学会誌, Vol. 40-1, pp. 5-12, 1955.
- 4) 岩佐義朗, 開水路水流の不安定限界について, 土木学会誌, Vol. 40-6, pp. 45-51, 1955.
- 5) Yu, J. and Kevorkian, J., Nonlinear evolution of small disturbances into roll waves in an inclined open channel, *J. Fluid Mech.*, Vol. 243, 575-594, 1992.
- 6) Kranenburg, C., On the evolution of roll waves, *J. Fluid Mech.*, Vol. 245, 249-261, 1992.
- 7) Engelund, F., Instability of erodible beds, *J. Fluid Mech.*, Vol. 42, 225-244, 1971.
- 8) Parker, G. and Izumi, N., Purely erosional cyclic and solitary steps on a cohesive bed, *J. Fluid Mech.*, Vol. 419, 203-238, 2000.
- 9) Izumi, N. and Yamaguchi, S., Instability of a purely erosional bed, *Proceedings of Twelfth Congress of the APD-IAHR*, November 13-16, Bangkok, Thailand, 77-86, 2000.
- 10) Fredsøe, J., On the development of dunes in erodible channels, *J. Fluid Mech.*, Vol. 64, 1-16, 1974.
- 11) Press, H. P., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T. and Flannery, B. P., *Numerical Recipes in FORTRAN*, 2nd Edn., Cambridge University Press, 1992.

(2001 年 4 月 20 日 受付)