

ディジタルフィルタを伴う時間積分法の周波数特性について

Frequency Characteristics of Digital Filtering Time Integration Scheme

本田利器*・澤田純男**

Riki HONDA and Sumio SAWADA

*正会員 工修 京都大学 防災研究所 (〒 611-0011 京都府宇治市五ヶ庄)

**正会員 工博 京都大学 防災研究所 (〒 611-0011 京都府宇治市五ヶ庄)

Nonlinear dynamic analysis, such as a nonlinear FEM, is essential in earthquake engineering. Nonlinear analysis, which must be conducted in the time domain, sometimes suffers from computational instability triggered by high frequency noise. Authors proposed a time integration scheme that eliminates high frequency noise by a digital filter (DFTI scheme). Its computation process is a combination of conventional time integration methods and digital filtering technique. In this paper, detail of the characteristics of DFTI scheme is investigated, taking central difference method and Newmark β method as examples of time integration schemes. Investigation reveals that it does not improve the stability of central difference method. It is also found that its applicability for Newmark β method is limited.

Key Words : time integration scheme, digital filter, stability, frequency characteristics

1. はじめに

地震工学をはじめとする多くの分野において、大規模な非線形動的解析の重要性は非常に高まっており、その合理的な解析手法が求められている。

地震工学で扱われる非線形問題は多くの場合、材料の降伏などによる分岐条件などを含むため時間領域で解く必要がある。時間領域における動的解析においては、解析の発散の回避は重要な課題である。解の発散は、一般に高周波のノイズがトリガとなって引き起こされる場合が多い。したがって、いわゆる減衰に相当する効果を加えることにより解析の発散を防ぐことができる。例えば、Rayleigh 減衰は設定が容易であり効果も大きいことから広く用いられている。

一方、数値積分のアルゴリズムに減衰効果を加えることにより安定な時間積分を可能にする手法も提案されている。

広く使われている Newmark の β 法¹⁾や、Wilson の θ 法²⁾等はこのような高周波成分を除去する減衰効果を持つ時間積分法である。さらに、アルゴリズムの中で与える減衰の振動数特性 (周波数特性) を可変にしたり、Newmark の β 法の一般化をはかるなどして、より効率のよい減衰をあたえることを可能としたアルゴリズムも提案されてきている。それらの例としては、Hilber らによる手法 (HHT 法)³⁾、Wood らによる α 法⁴⁾、Hoff, Pahl による θ_1 法^{5),6)}、Katona, Zienkiewicz による beta-m 法⁷⁾、及びこれらの手法を包含した定式化を与える Chung, Hulbert による generalized α 法⁸⁾や、collocation 法⁹⁾、また、Houbolt 法¹⁰⁾や Park 法¹¹⁾等も挙げられる。さらに近年では、Newmark の β 法において計算精度の向上を図った手法¹²⁾やより明確に、多様な周波数特性を実現可能な外部減衰を導入する手法¹³⁾等も提案されている。

このような背景に鑑み、筆者らは時間積分を行う過

程においてディジタルフィルタにより高周波成分を除去できる手法 (ここでは「DFTI 法」とよぶ) を提案した¹⁴⁾。DFTI 法は、基本的には上述の時間積分法とは異なる考え方に基づくものであり、高周波成分の除去は、時間積分の過程において作用させるディジタルフィルタによって行う。DFTI 法では、変位等の時刻歴を表す時系列として、仮想的に、フィルタリングされた時系列とフィルタリングされていない時系列という 2 種類を考慮することにより、様々な高次のフィルタを作用させることを可能にした手法であり、中央差分法や Newmark の β 法等の既存の種々の時間積分法と併用することが可能な手法である。

DFTI 法が実現する減衰の効果については簡単なシミュレーションにより示されている¹⁴⁾が、詳細な検討はなされていない。本論文では、DFTI 法の周波数特性を明らかにし、その安定性等について検討する。

2. ディジタルフィルタ

ディジタルフィルタとは、ある時系列 $\{x_n\}$ に対し、係数 $a_i, (i = 0 \dots M)$ 及び $b_i, (i = 1 \dots N)$ (M, N は整数) を用いて

$$y_n = \sum_{i=0}^M a_i x_{n-i} - \sum_{i=1}^N b_i y_{n-i} \quad (1)$$

として時系列 $\{y_n\}$ を求めるものである。この時、 $\{y_n\}$ は係数 a_i, b_i によって定まるフィルタを施された時系列となる。

式 (1) で表されるディジタルフィルタの伝達関数 $H(z)$ は、

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M a_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N b_i z^{-i}} \quad (2)$$

と求められる。したがって、このフィルタの振幅 $A_{amp}(\omega)$ 及び位相 $\theta(\omega)$ の周波数特性は、 $H(z)$ に $z = e^{i\omega\Delta t}$ を代入して得られる関数を $H(\omega)$ として、それぞれ、

$$A_{amp}(\omega) = |H(\omega)| \quad (3)$$

$$\theta(\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{\text{Im}(H(\omega))}{\text{Re}(H(\omega))} \right) \quad (4)$$

となる。一般に $\theta(\omega)$ は 0 ではないため、これらのフィルタを施すことにより時系列に時間遅れ (遅延時間) が生じる。遅延時間 $\tau(\omega)$ は、

$$\tau(\omega) = -\frac{d\theta}{d\omega} \quad (5)$$

で与えられる。

2.1 定振幅・定遅延フィルタ

デジタルフィルタの遅延時間が周波数依存性を有すると、フィルタ処理後のデータは、周波数成分毎に異なる時刻の値を有することになり、波形形状が崩れる。これは、周波数成分ごとの挙動が独立していない非線形系の時刻歴解析において重大な問題となる。したがって、フィルタの遅延は周波数に依存しない一定値をとることが好ましい。また、フィルタの振幅特性としては、解析の対象とする周波数領域においては一定値 1、それより高周波領域においては可能な限り小さい値を有するのが好ましい。

このようなフィルタは、定振幅・定遅延フィルタとして、種々提案されている¹⁸⁾。ここでは、Thiran¹⁵⁾による遅延最大平坦フィルタ (Maximally Flat Delay : MFD フィルタ)、佐藤が提案したヤコビフィルタ¹⁶⁾及び有理ルジャンドルフィルタ¹⁷⁾を用いる。これらは振幅、遅延ともに平坦性を有している IIR フィルタである。また、係数の関数形が陽に与えられているので係数の算出も容易である。

(1) 最大遅延平坦フィルタ (MFD フィルタ)

最大遅延平坦 (MFD) フィルタは、全極型関数 (式 (2) において $M = 0$ 、すなわち、分母が定数項のみからなる関数) で与えられる。式 (5) から、フィルタの遅延時間が平坦で一定値 τ_0 であるためには、

$$\theta = \tau_0 \omega \quad (6)$$

であればよい。MFD フィルタでは、式 (4) を $\omega = 0$ の周りでテイラー展開した場合に ω^k の係数が $k=2, \dots, 2n-1$ について 0 となるように $\{b_i\}$ を定める。この解はサンプリング時間間隔を Δt として、

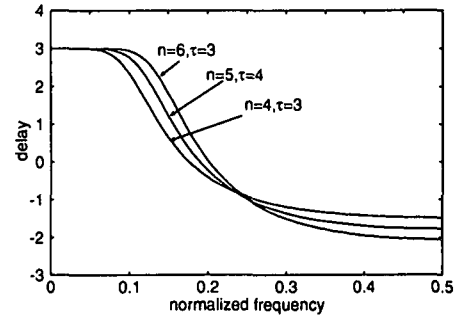
$$b_k = (-1)^k C_n \prod_{i=0}^{n-1} \frac{2\tau + i}{2\tau + k + i} \quad (7)$$

$$a_0 = \sum_{i=0}^n b_i = \frac{2n!}{n!} \frac{1}{\prod_{i=n+1}^{2n} (2\tau + i)} \quad (8)$$

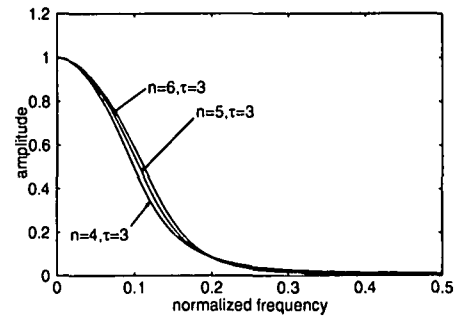
ただし、 $\tau = \tau_0 / \Delta t$

と与えられる。遅延時間がサンプリング時間間隔 Δt の整数倍で与えられる点もこのフィルタの特徴である。

MFD フィルタの遅延及び振幅の周波数特性の例を図-1 に示す。なお、本図及び以下の周波数特性を表す図においては、周波数 f を離散時間間隔 Δt を乗じることによって正規化している。同図に示されるように、 N, τ を変化させることにより、FIR フィルタの振幅の周波数特性や遅延時間を変化させることができる。



(a) 遅延



(b) 振幅

図-1 MFD フィルタの振幅・遅延時間の周波数特性の例

(2) ヤコビフィルタ

ヤコビフィルタは、伝達関数 $H(z^{-1})$ の減衰及び遅延が $z = 1$ (すなわち、 $\omega = 0$) において最大平坦近似するように求めたものである。具体的には $z = 1$ のまわりで

$$H(z^{-1}) \sim z^{-\tau} \quad (9)$$

が成立するという条件を満たすように設定している。ここで $\sim$ は左右の両式の $z = 1$ のまわりでのべき級数展開係数がある次数まで全て一致することを表す。

ヤコビフィルタの伝達関数は

$$Q_{n,m}(z^{-1}, \tau) = \sum_{k=0}^n m_{-k} C_k \prod_{i=0}^{n-1} \frac{2\tau + i}{2\tau + k + i} z^{-k} \quad (10)$$

で与えられるヤコビ多項式を用いて

$$H(z^{-1}) = \frac{Q_{M,N}(z^{-1}, -\tau)}{Q_{N,M}(z^{-1}, \tau)} \quad (11)$$

として与えられる。したがって、デジタルフィルタの係数は、

$$a'_k = N_{+k} C_k \prod_{i=0}^{N-k-1} \frac{2\tau + i}{2\tau + k + i} \quad (k = 0 \dots M) \quad (12)$$

$$b'_l = M_{-l} C_l \prod_{i=0}^{M-l-1} \frac{2\tau + i}{2\tau + l + i} \quad (l = 0 \dots N) \quad (13)$$

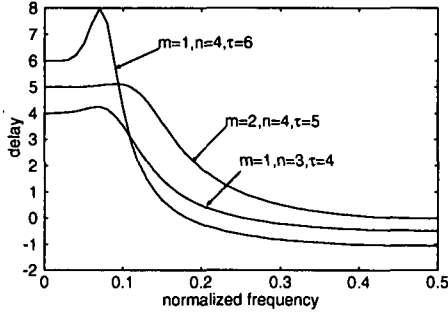
を用いて

$$a_k = a'_k/b'_0 \quad (k=0 \dots M) \quad (14)$$

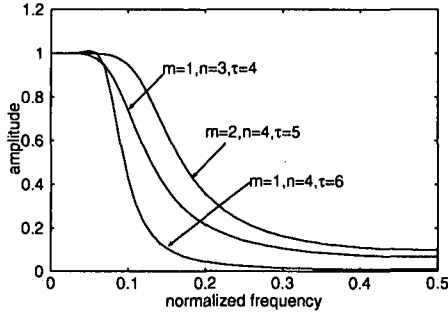
$$b_l = b'_l/b'_0 \quad (l=1 \dots N) \quad (15)$$

と求められる。

ヤコビフィルタの振幅・遅延時間の周波数特性の例を図-2に示す。ヤコビフィルタは $M < N$ とするとローパスフィルタとなるが、 N と M の差が大きいとき遅延が極大値を有するようになる。図-2で、 $m=1, n=4, \tau=6$ のフィルタでは振幅や位相が極値を有していることが分かる。



(a) 遅延



(b) 振幅

図-2 ヤコビフィルタの振幅・遅延時間の周波数特性の例

(3) 有理ジャンドルフィルタ

有理ジャンドルフィルタは、MFD フィルタに FIR フィルタを重ねることにより作成される IIR フィルタである。FIR フィルタでは、 $a_i = a_{M-i}$ を満たす係数列 $\{a_i\}$ を用いることで遅延が完全に一定値 $(M/2)\Delta t$ をとるフィルタを実現できる。この FIR フィルタの振幅を調整することで定遅延・定振幅フィルタが得られる。今、求める伝達関数 $H(z)$ を

$$H(z) = \frac{q(z^{-1})}{p(z^{-1}, \tau)} \quad (16)$$

とおく。ただし、 $p(z^{-1}, \tau)$ は遅延時間 $\tau\Delta t$ の MFD フィルタの分母の多項式であり、 $q(z^{-1})$ は完全な定遅延性を有する FIR フィルタを表す z^{-1} の M 次多項式 (ただし M は偶数) である。フィルタの定振幅性を次式で与える。

$$H(z) \cdot H(z^{-1}) \sim 1 \quad (17)$$

なお、ここで $z = e^{j\omega\Delta t}$ とした時、左右両辺の $\omega=0$ の周りでのテイラー展開がある次数以下で一致することを表す。

これを整理すると、MFD フィルタの遅延が $\tau\Delta t$ である時の定振幅性を与える FIR フィルタは

$$q(z^{-1}) = \frac{1}{N!} \sum_{k=0}^{M/2} \frac{(-\tau)^k C_k}{2N+2\tau} C_k z^{-(k+M/2)} (z-1)^{2k} \quad (18)$$

と与えられ¹⁷⁾、 $q(z)$ の各項の係数 a_k は

$$a_k = \sum_{j=0}^M \sum_{k=0}^{M/2} \sum_{i=0}^{2k} \delta_{j, (M/2+k-i)} a_k 2k C_i (-1)^i \quad (19)$$

と与えられる。ここで、 $\delta_{i,j}$ はクロネッカーのデルタ記号であり、

$$a_k = \frac{(-\tau)^k C_k}{2N+2\tau} C_k \frac{k!(2N-2k)!}{(N-k)!}$$

$$N C_M = \frac{\Gamma(N+1)}{\Gamma(N-M+1)\Gamma(M+1)}$$

である。なお、 $N < 0, M > 0$ の時 ($N' = -N$ として)

$$-N' C_M = (-1)^M N' + M + 1 C_M \quad (20)$$

である。なお、係数 b_k は、MFD フィルタと同じである。

有理ジャンドルフィルタの遅延及び振幅の周波数特性の例を図-3に示す。有理ジャンドルフィルタにおいても、 N, M, τ を変化させることにより、フィルタの振幅の周波数特性や遅延時間を変化させることができる。有理ジャンドルフィルタでは、ヤコビフィルタのように振幅や遅延時間が極値を持つという問題は無い。

3. デジタルフィルタを伴う時間積分法 (DFTI 法)

3.1 計算手順

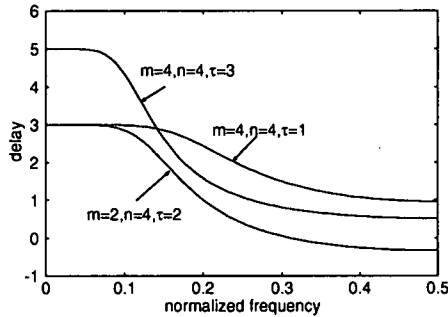
デジタルフィルタを用いた時間積分法 (DFTI 法) の計算手順について述べる。

DFTI 法では、フィルタを施した時系列 $\{\tilde{x}_n\}$ から運動方程式を解く (時間積分を行う) ことにより逐次算出されていく数列を、フィルタを施されていない時系列 $\{x_n\}$ として定義する。そして、 $\{\tilde{x}_n\}$ 及び $\{x_n\}$ を 2 つの時系列と考えることにより、デジタルフィルタを施した時間積分を行う。このプロセスの概念図を図-4に示す。

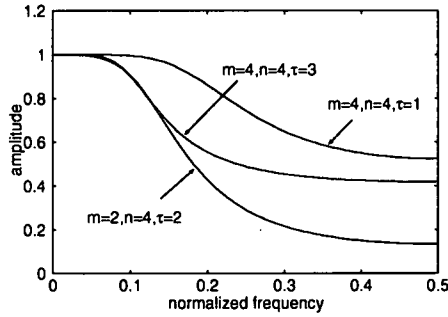
以下に、DFTI 法を用いた時間ステップの更新手順を具体的に示す。

今、時刻 $t = t_{n+1}$ における状態量 x_{n+1} が、それ以前の時間における状態量 x_i ($i = n, n-1, \dots$) および時間 t の関数として

$$x_{n+1} = f(t, x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots) \quad (21)$$



(a) 遅延



(b) 振幅

図-3 有理ルジャンドルフィルタの振幅・遅延時間の周波数特性の例

と与えられる系を考える。

時刻 $t \leq t_n$ における状態量が、デジタルフィルタにより高周波成分を除去されているものとし、これを $\tilde{x}_i$ とする。まず、関数 f を用いて、高周波成分を除去されていない状態量が

$$x_{n+1} = f(t, \tilde{x}_n, \tilde{x}_{n-1}, \tilde{x}_{n-2}, \dots) \quad (22)$$

として与えられる。この数列 $\{x_n\}$ は、時刻 $t \leq t_{n+1}$ において定義されるため、時刻 $t = t_{n+1}$ における状態量を式 (1) を用いて、

$$\tilde{x}_{n+1} = \sum_{i=0}^M a_i x_{n+1-i} - \sum_{i=1}^N b_i \tilde{x}_{n+1-i} \quad (23)$$

と定義できる。式 (23) より、このように求められた $\tilde{x}_{n+1}$ は、デジタルフィルタを施された時系列になっていることが分かる。したがって、このフィルタとして適切なローパスフィルタを設定することで、高周波成分を除去しつつ時間積分を行うことが可能になると考えられる。

前述したように、一般にデジタルフィルタは遅延時間を有しているため、時間積分において、その影響を考慮する必要がある。

そのため、DFTI 法では時系列

$$x_{n+1}, x_n, x_{n-1}, \dots$$

を、それぞれ、

$$t = t_{n+1} + \tau_0, t = t_n + \tau_0, t = t_{n-1} + \tau_0, \dots$$

という時刻における状態量を示すものであると定義する。ここで τ_0 はデジタルフィルタの遅延時間である。

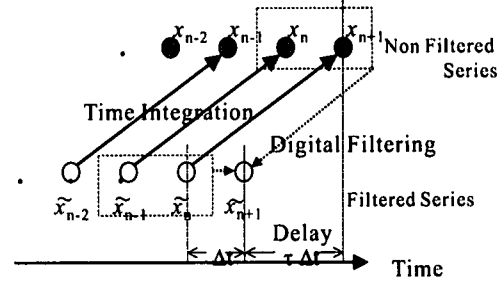


図-4 DFTI 法の計算手順の概念図

すなわち、式 (22) により x_{n+1} を算出する際に、 $t = t_{n+1}$ における値ではなく、 $t = t_{n+1} + \tau_0$ における値を算出する。これにより、式 (23) により与えられる $\tilde{x}_{n+1}$ に時刻 $t = t_{n+1}$ における値を持たせることができる。

3.2 周波数特性の検討

DFTI 法を既存の時間積分法とあわせて用いた場合の安定性などについて検討する。時間積分法としては Newmark の β 法と中央差分法を対象とする。

時間積分法の周波数特性は、一自由度系の自由振動を解析した場合の応答により評価することができる。全体系の応答は各振動モードの和であるから、対象とする問題の振動モードごとの応答特性を一自由度系の応答として評価することにより、全体系の解析に適用した場合の特性を評価できるのである。

以下では、まず、Newmark の β 法と中央差分法における時間ステップの更新マトリクスを求め、それを用いて DFTI 法の周波数特性を検討する。

(1) Newmark の β 法の更新マトリクス

Newmark の β 法を考える場合、時刻 $t = t_n$ における状態量としては

$$x_n = \{x_n, \dot{x}_n\}^T \quad (24)$$

とできる。加速度 $\ddot{x}_n$ も状態量であるが、DFTI 法では常に運動方程式を満たしているため、変位 x 及び速度 $\dot{x}$ が定まれば加速度が一意に定まる。したがって、上記の状態量に含ませる必要はない。

更新マトリクス U は次のように求められる。今、対象とする運動方程式を

$$\ddot{x} + 2h\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = 0 \quad (25)$$

と書く。

Newmark の β 法による場合、

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t \dot{x}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \{(1-2\beta)\ddot{x}_n + 2\beta\ddot{x}_{n+1}\} \quad (26)$$

$$\dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n + \frac{\Delta t}{2} \{\dot{x}_{n+1} + \dot{x}_n\} \quad (27)$$

となる。式 (25) (において $x = x_n$ としたものと、 $x = x_{n+1}$ としたもの) 及び式 (26) から、

$$\begin{aligned} & [1 + \beta\Delta t^2\omega_0^2]x_{n+1} + (2\beta\Delta t^2h\omega_0)\dot{x}_{n+1} \\ & = \left\{1 - \frac{1-2\beta}{2}\Delta t^2\omega_0^2\right\}x_n + \{\Delta t - (1-2\beta)\Delta t^2h\omega_0\}\dot{x}_n \end{aligned} \quad (28)$$

また、式(25)と(27)から、

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t}{2} \omega_0^2 x_{n+1} + (1 + h\omega_0 \Delta t) \dot{x}_{n+1} \\ = -\frac{\Delta t}{2} \omega_0^2 x_n + (1 - h\omega_0 \Delta t) \dot{x}_n \end{aligned} \quad (29)$$

が得られる。したがって、更新マトリクスは

$$\begin{aligned} U = & \begin{bmatrix} 1 + \beta \Delta t^2 \omega_0^2 & 2\beta \Delta t^2 h\omega_0 \\ \frac{\omega_0^2}{2} \Delta t & 1 + h\Delta t \omega_0 \end{bmatrix}^{-1} \\ & \times \begin{bmatrix} 1 - (\frac{1}{2} - \beta) \Delta t^2 \omega_0^2 & \Delta t - (1 - 2\beta) \Delta t^2 h\omega_0 \\ -\frac{\Delta t}{2} \omega_0^2 & 1 - h\omega_0 \Delta t \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (30)$$

と得られる。

(2) 中央差分法の更新マトリクス

中央差分法の場合の状態ベクトル及び更新マトリクスを算出する。状態ベクトルとしては

$$X_n = \{x_n, x_{n-1}\}^T \quad (31)$$

ととればよい。

$$\frac{x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}}{\Delta t^2} + 2h\omega_0 \frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{2\Delta t} + \omega_0^2 x_n = 0 \quad (32)$$

を整理すると

$$\begin{aligned} (1 + h\omega_0 \Delta t) x_{n+1} \\ = (2 - \Delta t^2 \omega_0^2) x_n + (h\omega_0 \Delta t - 1) x_{n-1} \end{aligned} \quad (33)$$

がえられる。したがって、

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} X_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} X_n = x_n \quad (34)$$

となることを考慮すると、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 + h\omega_0 \Delta t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X_{n+1} \\ = \begin{bmatrix} 2 - \Delta t^2 \omega_0^2 & h\omega_0 \Delta t - 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X_n \end{aligned} \quad (35)$$

となる。したがって、更新マトリクスは

$$\begin{aligned} U = & \begin{bmatrix} 1 + h\omega_0 \Delta t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 - \Delta t^2 \omega_0^2 & h\omega_0 \Delta t - 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ = & \begin{bmatrix} \frac{2 - \Delta t^2 \omega_0^2}{1 + h\omega_0 \Delta t} & \frac{h\omega_0 \Delta t - 1}{1 + h\omega_0 \Delta t} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (36)$$

とすることができる。

(3) 周波数特性の検討方法

上で Newmark の β 法及び中央差分法について求めた時間ステップの更新マトリクスを、離散時間間隔 Δt を陽に書いて、 $U[\Delta t]$ と書く。

すなわち、時刻 $t = t_n$ における状態量ベクトルを x_n とすると

$$x_{n+1} = U[\Delta t] x_n \quad (37)$$

となる。

DFTI 法を適用する場合、フィルタリングされた状態量 $\tilde{x}_n$ から、次の時間ステップにおけるフィルタリングされていない状態量 x_n を算出することが必要であるから、デジタルフィルタの遅延時間を $\tau \Delta t$ として

$$x_{n+1} = U[(\tau + 1)\Delta t] \tilde{x}_n \quad (38)$$

となる。時間ステップの更新は、複数回に分けて行うことも可能である。この場合、

$$x_{n+1} = U[\Delta t]^{\tau+1} \tilde{x}_n \quad (39)$$

または、

$$x_{n+1} = U[2\Delta t]^{\frac{\tau+1}{2}} \tilde{x}_n \quad (40)$$

等となる。

以下では、式(38),(39),(40)での更新に用いたマトリクスをいずれも単に U と書き、

$$x_{n+1} = U \tilde{x}_n \quad (41)$$

と表す。

式(41)を式(23)に代入すると

$$\tilde{x}_{n+1} = \sum_{i=0}^M a_i U \tilde{x}_{n-i} - \sum_{i=1}^N b_i \tilde{x}_{n+1-i} \quad (42)$$

となる。 $P = \max(M+1, N)$ を用いて

$$\tilde{X}_n = \{\tilde{x}_n, \tilde{x}_{n-1}, \dots, \tilde{x}_{n-P+1}\}^T \quad (43)$$

とすると、

$$\tilde{X}_{n+1} = A \tilde{X}_n \quad (44)$$

ただし、

$$A = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{P-2} & c_{P-1} \\ I & 0 & & & \\ & I & 0 & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & I & 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$c_i = a_i U - b_{i+1} I$$

I : 2×2 単位行列

$$a_i = 0, \quad \text{if } i > M$$

$$b_i = 0, \quad \text{if } i > N$$

と書ける。

したがって、DFTI 法を用いた時系列解析の周波数特性を知るためには、この A マトリクスの固有値を調べればよい。

A の i 番目の固有値を

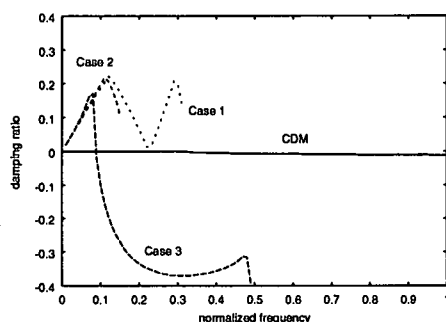
$$\lambda_i(\omega) = \alpha_i + i\beta_i \quad (46)$$

とすると、式(44)の固有振動数 ω_i 及びその減衰定数 ξ_i は

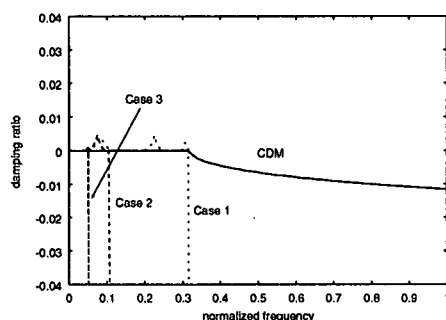
$$\omega_i = \Omega_i / \Delta t \quad (47)$$

$$\xi_i = -\text{Re}(\log(\lambda_i)) / \Omega = -\ln(\alpha_i^2 + \beta_i^2) / 2\Omega \quad (48)$$

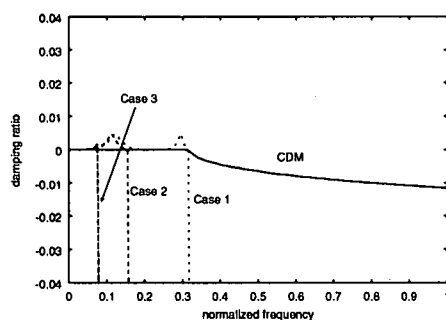
$$\Omega_i = \text{Im}(\log(\lambda_i)) = \tan^{-1}(\beta_i / \alpha_i) \quad (49)$$



(a) MFD フィルタ



(b) ヤコビフィルタ



(c) 有理ルジャンドルフィルタ

図-5 DFTI 法を中央差分法 (CDM) に適用した場合の減衰の周波数特性

と与えられる。

例えば、式 (48) で評価される減衰定数が負になる固有値が含まれる場合、対応する振動モードは発散傾向を有することになるため、解析は不安定になる。また、固有振動数の計算精度は、固有周期の真値 $T = 2\pi/\omega$ と式 (25) の有する固有周期 $T'_i = 2\pi/\omega_i$ から $\frac{T'_i - T}{T}$ として評価できる。

4. DFTI 法の安定性等に関する検討

4.1 中央差分法

時間積分法として中央差分法を用いた場合の DFTI 法の安定性について検討する。

デジタルフィルタとして、

1. $N = 6, \tau = 3$ とした MFD フィルタ (このフィルタの遅延は $3\Delta t$)
2. $M = 2, N = 4, \tau = 5$ としたヤコビフィルタ (このフィルタの遅延は $5\Delta t$)
3. $M = 4, N = 4, \tau = 1$ とした有理ルジャンドルフィ

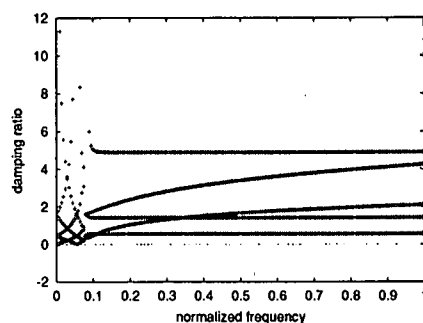


図-6 Case 1 を対象として MFD フィルタを用いた DFTI 法を中央差分法に適用した場合の減衰の周波数特性

ルタ (このフィルタの遅延は $3\Delta t$)

の 3 種類を用いた場合の周波数特性について述べる。

x_n から $\tilde{x}_{n+1}$ への時間ステップの更新で、MFD フィルタ及び有理ルジャンドルフィルタを用いる場合には $4\Delta t$ 、ヤコビフィルタを用いる場合 $6\Delta t$ だけ更新する必要がある。 $4\Delta t$ (または $6\Delta t$) 後の $\tilde{x}_{n+1}$ を算出する方法を変えた下記の 3 ケースについて検討する。

Case 1 離散時間間隔を Δt として、時間ステップの更新を 4 回 (ヤコビフィルタを用いる場合は 6 回) 繰り返す。

Case 2 離散時間間隔を $2\Delta t$ (ヤコビフィルタを用いる場合は $3\Delta t$) として、時間ステップの更新を 2 回繰り返す。

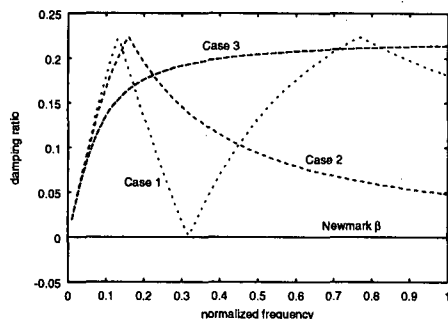
Case 3 離散時間間隔を $4\Delta t$ (ヤコビフィルタを用いる場合は $6\Delta t$) として、1 回のみの時間ステップの更新を行う。

図-5 に、DFTI 法を中央差分法に適用した場合の減衰の周波数特性を示す。式 (45) の A マトリクスはひとつの周期に対して複数の固有値を持つが、これらの図では、それらの固有値が与える減衰のうち最も小さい値をプロットしている。最小の減衰が正の値を有すれば全てのモードが正の減衰を有し、解析は安定であることになる。

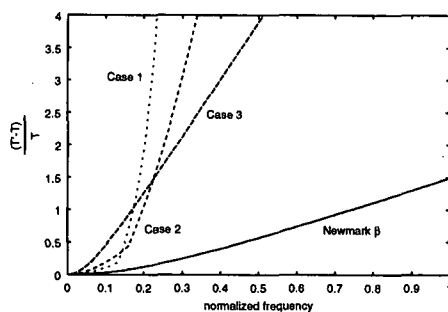
同図 (a) には MFD フィルタを用いた場合の減衰の周波数特性を示した。Case 1~3 のいずれにおいてもある周波数までは減衰が付加されている効果があるが、その周波数を越える領域では減衰が負になっている。これは、その周波数を越える振動数のモードが含まれる解析は不安定になることを意味する。なお、Case 1 及び 2 で高周波部分がプロットされていないのは、 A マトリクス (式 (45)) の固有値に計算できないものがあり¹、最小の減衰が定められなかったためである。

参考のため、MFD フィルタを用いた Case 1 の場合について、全てのモードの減衰を算出した。すなわち、 A マトリクスの全ての固有値を算出し、それぞれの固有値に対応する減衰を式 (48) により評価した。このようにして得られた全ての減衰を周波数に対してプロットすると図-6 のようになる。同図より、求められた減衰は全て正值をとっていることが分かる。ただし、図-5(a) で減衰がプロットされていない周波数帯に固有振動数

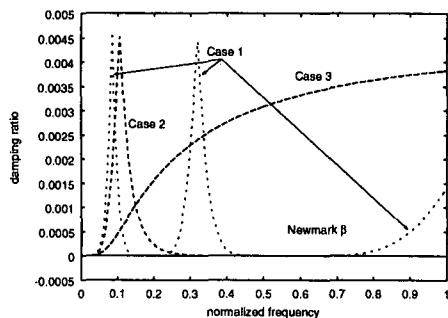
¹ A が正則でないためと考えられる。なお、計算は Mathematica を用いて有効数字 80 桁で行っている。



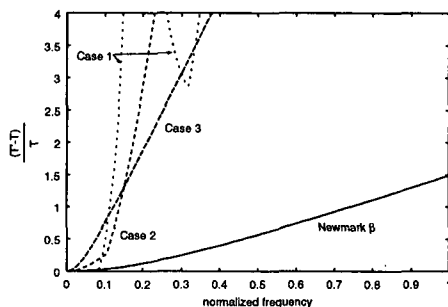
(a) MFD フィルタ



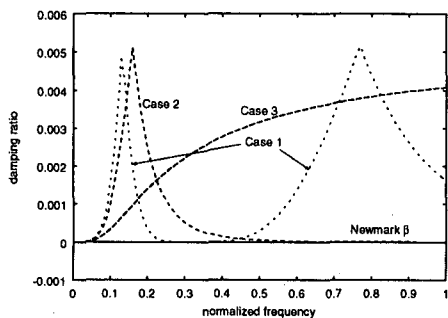
(a) MFD フィルタ



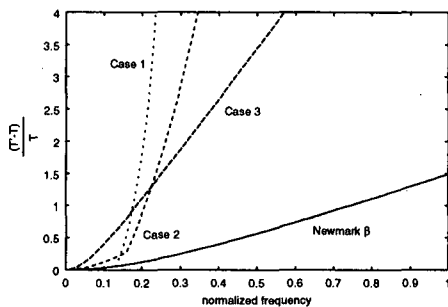
(b) ヤコビフィルタ



(b) ヤコビフィルタ



(c) 有理ルジャンドルフィルタ



(c) 有理ルジャンドルフィルタ

図-7 DFTI 法を Newmark の β 法に適用した場合の減衰の周波数特性

を有する系を対象として数値解析を行うとその計算は発散する。したがって、解析手法としては安定ではないことがわかる。

図-5(b) から、ヤコビフィルタを用いた場合、Case 1 ~3 のいずれにおいてもある周波数までは減衰が付加されている効果があるが、その周波数を越える領域では減衰が負になっていることが分かる。また、同図(c) から有理ルジャンドルフィルタにおいても同様の傾向が見られる。

いずれにおいても、中央差分法を単独で用いた場合に減衰が負となる周波数領域では、DFTI 法を用いた場合にも減衰は負となっている。これは、中央差分法で不安定になる解析は、DFTI 法を用いるだけで安定化することは困難であることを意味する。したがって、例えば、離散時間間隔を大きくとったために不安定となっている解析を DFTI 法で安定化するという事は困難であろう。

図-8 DFTI 法を Newmark の β 法に適用した場合の振動周期の評価精度の周波数特性

4.2 Newmark の β 法

時間積分法として Newmark の β 法を用いた場合の DFTI 法の安定性について検討する。なお、本検討では同手法のパラメータは $\beta = \frac{1}{4}$ とする。この同手法の与える減衰は 0 となる。

デジタルフィルタとしては、中央差分法の場合と同じ 3 種類のフィルタを用いて検討する。また、時間更新の方法としても中央差分法の場合と同様の Case 1 ~3 について検討する。

図-7 に、DFTI 法を Newmark の β 法に適用した場合の減衰の周波数特性を示す。これらの図でも、各周波数の複数の解のうち最も小さい減衰の値をプロットしている。図-7(a) に MFD フィルタを用いた場合の DFTI 法の減衰の周波数特性を示す。Case 1,2 の場合、ある周波数までは減衰が付加されている効果がみられるが、その周波数を越える領域で減衰が非常に小さくなっている周波数があることが分かる。そのような周波数を固有振動数に持つモードに対しては、DFTI 法を用いることによる減衰の付加は期待できない。一方、Case 3 の場合には高周波数領域まで減衰を付加できているこ

とが分かる。図-7(b), (c) から、ヤコビフィルタ及び有理ルジャンドルフィルタを用いた場合の減衰の周波数特性についても、MFD フィルタと同様に、Case 3 の場合のみ全ての周波数帯に渡って減衰を付加できていることが分かる。

図-8 に、図-7 のそれぞれの減衰を与えるモードについて、式 ((3)) で与えられる精度の指標をプロットした。同じ図にプロットされている Newmark の β 法についての指標との比較から、DFTI 法を用いた場合には、Newmark の β 法を単独で用いた場合に比較して周期の計算精度が低下することが分かる。なお、実際の数値解析で実用に耐えうる $\frac{T_c - T}{T_c}$ の値はせいぜい 0.5~1.0 程度であり、これを越える値を与える周波数帯においては減衰を付加してそのモードを減衰させる等の対処が必要となる。

5. おわりに

デジタルフィルタを伴う時間積分法 (DFTI 法) の周波数特性を中央差分法及び Newmark の β 法に適用した場合の安定性について検討した。

DFTI 法を中央差分法に適用した場合、フィルタリングにより減衰が付加されるモードの他に、高振動数領域において発散傾向を有しているモードが生じ、そのモードのために解析は不安定化する。したがって、中央差分法に DFTI 法を適用する場合、低周波部分においては減衰を付加する効果は見られるが、解析を安定化させる効果は期待できないことが分かった。

DFTI 法を Newmark の β 法に適用した場合にも、フィルタリングにより減衰が付加されるモードの他にもモードが生じることが分かった。ただし、フィルタリングされた状態量 x_n から、フィルタリングされていない時系列の次の時間ステップにおける状態量 x_{n+1} を算出する計算過程を複数段階に分けず、一回の計算で行う場合 (本文中の Case 3 に相当) には、高周波領域で大きい減衰を付加できていることが分かった。ただし、普通の Newmark の β 法に比較して計算精度はかなり低いものとなっている。

参考文献

- 1) N. M. Newmark: A method of computation for structural dynamics, *ASCE Proc.* 85 (EM3), pp.67-94, 1959.
- 2) E. L. Wilson: A computer program for the dynamic stress analysis of underground structures, *SESM Report* No.68-1, University of California, Berkeley, CA, 1968.
- 3) H. M. Hilber, T. J. R. Hughes, and R. L. Taylor: Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics, *Earthq. eng. struct. dyn.* 5, pp.283-292 (1977).
- 4) W. L. Wood, M. Bossak and O. C. Zienkiewicz: An alpha modification of Newmark's method, *Int. j. numer. methods. eng.* 15 pp.1562-1566, 1981.
- 5) C. Hoff and P. J. Pahl: Practical performance of the θ_1 method and comparison with other dissipative algorithms in structural dynamics, *Comput. methods appl. mech. eng.* 67, pp.87-110, 1988.
- 6) C. Hoff and P. J. Pahl: Extended comparison of the Hilber-Hughes-Taylor α -method and the θ_1 -method, *Comput. methods appl. mech. eng.* 67, pp.367-385, 1988.
- 7) M. G. Katona and O. C. Zienkiewicz: A unified set of single-step algorithms, Part 3: the beta-m method, a generalization of the Newmark scheme, *Int. j. numer. methods. eng.* 21 pp.1345-1359, 1985.
- 8) J. Chung, G. M. Hulbert: A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation - the generalized- α method -, *J. applied mechanics, Transactions of ASME*, 60, pp.371-375, 1993.
- 9) H. M. Hilber and T. J. R. Hughes: Collocation, dissipation and 'overshoot' for time integration schemes in structural dynamics, *Earthq. eng. struct. dyn.* 6, pp.99-117 (1978).
- 10) J. C. Houbolt: A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft, *J. aeronautical science* 17, pp.540-550, 1950.
- 11) K. C. Park: Evaluating time integration methods for nonlinear dynamic analysis, in *Finite element analysis of transient nonlinear behavior* (eds. T. Belytschko et al.), ASME, New York, 1975.
- 12) T. C. Fung: Complex-time-step Newmark methods with controllable numerical dissipation, *Int. j. numer. meth. engng.* 41 pp.65-93, 1998.
- 13) A. Munjiza, D. R. J. Owen, and A.J.L. Crook, An $M(M^{-1}K)^m$ proportional damping in explicit integration of dynamic structural systems, *Int. j. numer. meth. engng.* 41, pp.1277-1296, 1998.
- 14) 本田利器, 澤田純男: デジタルフィルタを内蔵した時間積分法, 応用力学論文集, pp.389-396, Vol.1, 1998.
- 15) Thiran, J.: Recursive digital filters with maximally flat group delay, *IEEE Trans.*, CT-18, 6, pp.659, 1971.
- 16) 佐藤正光: ヤコビフィルタ-理想低域特性に近似するデジタルフィルタ-, 電子通信学会論文誌, Vol J58-A, No.11, pp.691-698, 1975.
- 17) 佐藤正光: 有理ルジャンドルフィルタ-減衰および遅延平坦デジタルフィルタ-, 電子通信学会論文誌, Vol J59-A, No.4, pp.327-332, 1976.
- 18) 式部幹: デジタルフィルタの設計, 東海大学出版会, pp.138-151, 1986.

(2001 年 4 月 20 日 受付)