

Multi-linear 型 1 自由度系の地震応答解析における剛性変化時刻の一算定法

A Method of Calculation of Stiffness Turning Time in Seismic Response Analysis
of Multi-linear Single Degree of Freedom Systems

成行 義文*, 平尾 潔**, 新川 和之***, 竹園雅樹****

Yoshifumi Nariyuki, Kiyoshi Hirao, Kazuyuki Shinkawa, Masaki Takezono

*正会員 博(工) 徳島大学助教授 工学研究科エコシステム工学専攻 (〒770-8506 徳島市南常三島町 2-1)

**フェロー 工博 徳島大学教授 工学部建設工学科 (〒770-8506 徳島市南常三島町 2-1)

*** 国土交通省四国地方整備局松山工事事務所 (〒790-0048 松山市出合 1782)

****学生会員 徳島大学工学研究科建設工学専攻 (〒770-8506 徳島市南常三島 2-1)

This paper deals with a method for the improvement of the accuracy of seismic energy response analysis of multi-linear single degree of freedom systems whose hysteretic characteristics of the restoring force is represented as a piecewise linear model. A technique to accurately obtain the turning time of the system stiffness without fail in seismic response analysis based on the Newmark's β method is proposed here. In this study, it was clear that the calculation time of the method proposed here was shorter than that of the conventional iterative method and also confirmed that the Trapezoidal formula was effective to accurately calculate the energy response of structures for strong earthquakes in the case that the time increment in numerical integral was relatively small.

Key Words: Multi-linear SDOF system, Seismic response analysis, Newmark's β method, Analytical accuracy, Stiffness turning time

1. はじめに

構造物に地震あるいは風等の動的荷重(外乱)が作用する場合の構造物の応答を正確に把握することは、構造物を安全に、しかも合理的に設計する上で重要である。

一般に、実際の構造物はきわめて複雑であり、そのモデル化に際しては、問題となる振動現象の本質が損なわれない程度に、構造物を理想化し、単純化しなければならない。地震動を受ける土木・建築構造物の動的挙動を大局的に把握するためには、それらの構造物を1つの集中質量に離散化し、地盤とその質量をせん断ばねおよびダッシュポットで結合したいわゆるせん断1自由度系モデルが多く用いられる。このような系の振動は、周知のように1階の線形常微分方程式により表されるが、外力が地震動のように複雑な波形として数値的に与えられる場合には、これを解析的に解くことは極めて困難である。したがって、このような場合には、一般に電子計算機による数値解法が用いられる。

応答の数値解法としては各種の方法が提案されている

が、大きく分ければ、物理的解釈に基づく応答計算法と数学的な数値計算法とに分類される。物理的解釈に基づく応答計算法としては、Newmarkの β 法¹⁾としてまとめられる加速度法系の方法、また数学的な数値計算法としては、階差法・Runge-Kutta法²⁾などがある。前者は、基本的に2次の精度しか期待できないが、後者に比べて解の安定性に優れている。したがって、土木・建築構造物の振動のように比較的低い振動数成分だけを考慮すればよい現象に対する実用的な公式として前者は有効な手法である。

現在、構造物の耐震設計は「比較的頻繁に発生する中小地震に対しては構造物は損傷を受けないように、また比較的発生頻度の低い大地震に対しては構造物の損傷を一部許容するものの人命に関わるような崩壊には至らないようにする。」という2段階設計法の理念に基づいて行われている。したがって、構造物を地震に対して安全に設計するためには、強震下における構造物の非弾性応答を厳密に算定する必要がある。前述のようなせん断1自由度系にモデル化されることの多い橋脚等の比較的簡単

な構造物の復元力履歴特性は、一般に折線型(piecewise linear)として定義され、このようなモデルの地震応答解析には増分形式のNewmarkの β 法が用いられることが多い³⁾。このようなmulti-linear型の弾塑性復元力履歴特性を有する系の地震応答をより正確に算定するためには、降伏あるいは速度の反転が生じる時刻、すなわち系の剛性が急変する時刻を厳密に押さえながら解析を進めなければ、時刻とともに解析誤差が蓄積されることになる。

一般に、これらの剛性変化時刻の求め方としては、まず基準増分時間 Δt 後の応答を求め、これが降伏点あるいは速度反転点等を超えている場合には、時間増分を小さくして解き直すということを繰返し、試行錯誤的に復元力-変位関係がそれらの剛性変化点に達する時刻を求めるという方法(以下、反復法と呼ぶ)が用いられている。しかし、この方法には基本的に2つの問題点があると考えられる。1つ目の問題点は、場合によってはこれらの点を検出できないこと、もう1つの問題点は、一般にそれらの点を求めるのに多くの反復を必要とし、その回数もcase by caseであるということである。前者は解析結果の精度の低下を、また後者は演算時間の増大をもたらす大きな要因である。近年、より合理的な耐震設計法を導くために、非線形変位応答スペクトルのみでなく入力ならびに履歴吸収エネルギースペクトル等の非弾性応答スペクトルに関する多くの検討が成されている^{4)~9)}。これらのスペクトルは一般に構造物の周期を初めとする多くのパラメータの設定値のすべての組合せに対して、時刻歴応答解析を行うことにより求められるため、個々の演算時間(あるスペクトル曲線上の1点を求めるのに要する時間)は短くても全体としては膨大な演算時間となることがある。また、性能照査型設計等で用いられる所定の損傷度(最大塑性率等)に対する所要入力強度スペクトル¹⁰⁾等を求める場合には、スペクトル曲線上のすべての点で収束計算が必要となるため、演算時間はさらに増大する。このようなことより、個々の応答解析に要する演算時間はできる限り短いことが望ましい。

また、構造物のエネルギー応答を精度良く求めるためには、前述のように剛性変化点を順次正確に押さえるとともに、各時間増分に対するエネルギー増分を、応答解析に用いた増分基本式の積分として求める必要がある。しかしながら、一般に応答解析における時間増分が比較的小さいことより、エネルギー増分の計算には微小増分時間内では、すべての諸量は線形的に変化すると仮定した台形公式を用いることが多い。この台形公式を用いた場合のエネルギー応答の算定精度に関する検討も必要である。

以上のような観点から本研究では、前述の反復法における剛性変化点に達する時刻の算定に際しての問題点を解決するために、各微小増分時間ごとにそれらの点の存在を正確に判定するとともにそれらが生じる時刻を厳密に算定することができる一手法を開発し、それを

Newmarkの β 法を用いた1自由度系の弾塑性応答解析法に組み込み、その有効性に関する比較検討を行うとともに、台形公式によるエネルギー算定の精度に関しても若干の検討を行った。

2. 非線形1自由度系の運動方程式とその数値解法上の問題点

2.1 地動を受けるTri-linear型1自由度系の運動方程式

地動を受ける1自由度系の弾塑性応答は一般に次式のように表される。

$$m\ddot{x} + Q(\dot{x}, x, t) = -m\ddot{x}_0 \quad (1)$$

ここに、 x : 相対変位 $\ddot{x}_0$: 地動加速度
 $\dot{x}$: 相対速度 m : 質量
 $\ddot{x}$: 相対加速度 Q : 復元力

一般に弾塑性復元力 Q は変位履歴だけの関数で表され、速度に関係する減衰は、その他諸々の原因による減衰をまとめた形で別に考慮されるため、地動を受ける非線形1自由度系の運動方程式は式(2)のように表される(図-1)。

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Q(x) = -m\ddot{x}_0 \quad (2)$$

ここに、 c は粘性減衰係数である。

式(2)を質量 m で除すと次のようになる。

$$\ddot{x} + 2h\omega_0\dot{x} + \frac{Q(x)}{m} = -\ddot{x}_0 \quad (3)$$

ここに、 $c/m = 2h\omega_0$ であり、 h および ω_0 はそれぞれ減衰定数および弾性時固有円振動数である。また、復元力 $Q(x)$ の履歴特性は図-2に示すTri-linear型とする。図中、 k_0 は弾性剛性、 γ_1 、 γ_2 は弾塑性剛性比、 Q_y 、 x_x は降伏強度、降伏変位である。

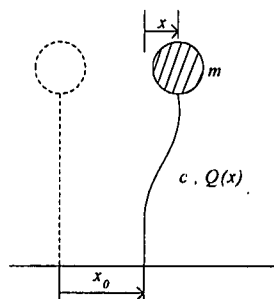


図-1 非線形1自由度系モデル

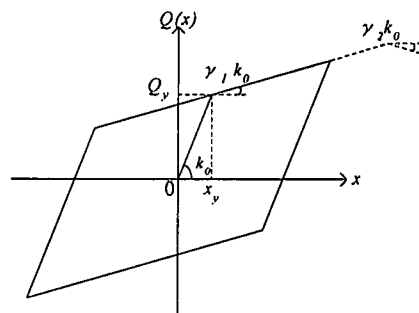


図-2 Tri-linear型復元力履歴特性

2.2 Newmark の β 法による運動方程式の数値積分

本節では地震応答解析で広く用いられている Newmark の β 法を使った数値解析法³⁾を示す。Newmark の β 法では、 t_{n+1} 時刻における速度 $\dot{x}_{n+1}$ ならびに変位 x_{n+1} は、それぞれ式(4)ならびに式(5)のように表される。

$$\dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n + \frac{1}{2}(\ddot{x}_n + \ddot{x}_{n+1})\Delta t \quad (4)$$

$$x_{n+1} = x_n + \dot{x}_n\Delta t + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\ddot{x}_n\Delta t^2 + \beta\ddot{x}_{n+1}\Delta t^2 \quad (5)$$

ここに、

x_n : t_n 時刻における変位

$\dot{x}_n$: t_n 時刻における速度

$\ddot{x}_n$: t_n 時刻における加速度

Δt : 時間増分

β : Newmark の β 法におけるパラメータ

また、 t_{n+1} 時刻における加速度 $\ddot{x}_{n+1}$ は式(3)より式(6)のように表される。

$$\ddot{x}_{n+1} = -2h\omega_0\dot{x}_{n+1} - \frac{Q_{n+1}}{m} - \ddot{x}_{0n+1} \quad (6)$$

ここに、 $\ddot{x}_{0n+1}$ および Q_{n+1} は t_{n+1} 時刻での地動加速度および復元力($Q(x_{n+1})$)である。

以上の式(4)～式(6)が、Newmark の β 法を用いて地震応答解析を行う場合の基本式である。パラメータ β は加速度変化の仮定に応じて次のような値をとる。

- ① 線形加速度法: $\beta = 1/6$
- ② 平均加速度法: $\beta = 1/4$
- ③ 衝撃加速度法: $\beta = 0$
- ④ 段階加速度法: $\beta = 1/8$

参考のため線形加速度法($\beta = 1/6$)の場合の加速度 $\ddot{x}$ (線形; 1 次式), 速度 $\dot{x}$ (2 次式), 変位 x (3 次式)を概念的に表せば図-3 のようである。この場合の t_{n+1} 時刻の速度 $\dot{x}_{n+1}$ および変位 x_{n+1} は式(7)および式(8)のように表される。

$$\dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n + \frac{1}{2}(\ddot{x}_n + \ddot{x}_{n+1})\Delta t \quad (7)$$

$$x_{n+1} = x_n + \dot{x}_n\Delta t + \frac{1}{6}(2\ddot{x}_n + \ddot{x}_{n+1})\Delta t^2 \quad (8)$$

一般に質点系の地震応答解析では $Q(x)$ の構成則を multi-linear 型と仮定することが多い(図-4 参照)。 $t_n \sim t_{n+1}$ 間の Q - x 関係が、図-4 のように同一直線上にあるとすると、時刻 t_{n+1} における復元力 Q_{n+1} と変位 x_{n+1} との間には式(9)のような関係がある。

$$Q_{n+1} = \gamma_m k_0 x_{n+1} + (Q_n - \gamma_m k_0 x_n) \quad (9)$$

ここに、 γ_m は弾塑性剛性比 $= k_m/k_0$ である。

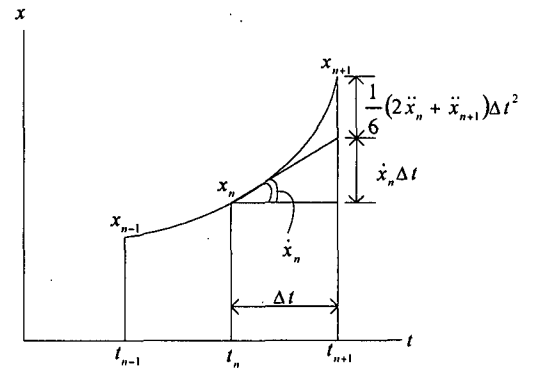
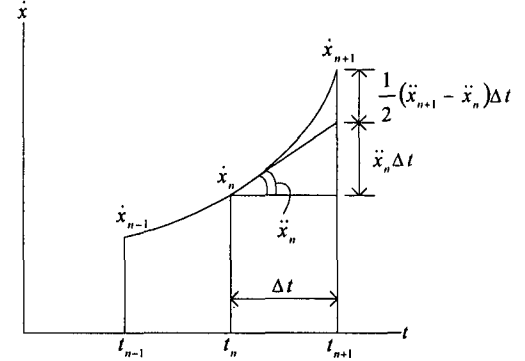
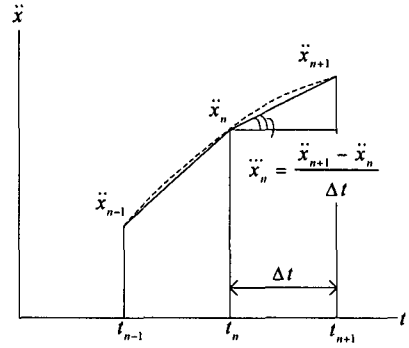


図-3 線形加速度法

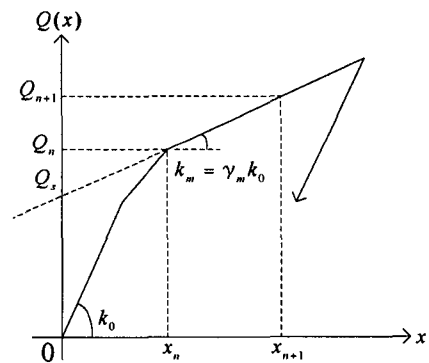


図-4 multi-linear 型復元力履歴特性

式(9)を式(6)に代入すると次式が得られる。

$$\ddot{x}_{n+1} = -2h\omega_0\dot{x}_{n+1} - \frac{1}{m}\gamma_m k_0 x_{n+1} - \frac{1}{m}(Q_n - \gamma_m k_0 x_n) - \ddot{x}_{0n+1} \quad (10)$$

$Q_s = Q_n - \gamma_m k_0 x_n$ より, 式(10)は式(11)のように表される.

$$\ddot{x}_{n+1} = -2h\omega_0 \dot{x}_{n+1} - \gamma_m \omega_0^2 x_{n+1} - \frac{1}{m} Q_s - \ddot{x}_{0n+1} \quad (11)$$

式(4), 式(5)および式(11)を連立して $\ddot{x}_{n+1}$ について解くと式(12)が得られる.

$$\ddot{x}_{n+1} = -\frac{B_2}{B_1} \quad (12)$$

ここに,

$$B_1 = 1 + h\omega_0 \Delta t + \beta \gamma_m \omega_0^2 \Delta t^2$$

$$B_2 = 2h\omega_0 \left(\dot{x}_n + \frac{1}{2} \ddot{x}_n \Delta t \right) + \gamma_m \omega_0^2 \left\{ x_n + \dot{x}_n \Delta t + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{x}_n \Delta t^2 \right\} + \frac{Q_s}{m} + \ddot{x}_{0n+1}$$

式(12)を式(4), 式(5)に代入することにより, 時刻 t_{n+1} における速度 $\dot{x}_{n+1}$ ならびに変位 x_{n+1} が求まる.

2.3 数値積分の精度に影響を及ぼす要因

前述のように, 非線形系の地震応答を求める際には, 復元力-変形関係における弾性限界点あるいは変位反転点等の剛性変化点を正確に捉える必要がある. もしこれらが正確に捉えられなければ, 図-5に示すようにそれ以後の復元力-変位関係は誤差を含んだものとなり, 解析結果の精度が低下することになる. また同図より, 履歴ループの囲む面積によって表される履歴吸収エネルギーの算定精度にも悪影響を及ぼすことが分かる.

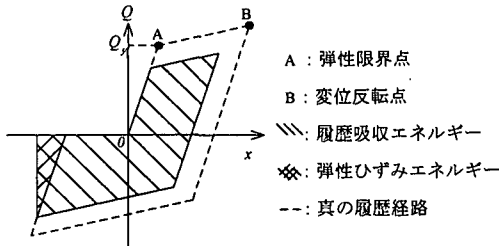


図-5 履歴吸収エネルギー過小評価の一例

一般に, 剛性変化点を求める方法としては, 次章で述べるような増分時間を機械的に操作して所要の時刻を求める反復法が用いられる. この方法はアルゴリズムが簡単のため従来より広く用いられており, それなりの成果をあげているが解析精度の面で次のような欠点が考えられる. すなわち, 一般にこの反復法では時刻 t_n 及び $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ における変位及び速度を用いて, 図-6(a), (b)中に示すような方法で微小増分時間 Δt 内における剛性変化点の存在を判定している. しかし, 図-7のような場合には, それらの判定法では剛性変化点の存在を予測できず, このことが反復法の誤差の一因になっているものと思われる. また, 一般にこのような数値解析の精度は増分時間 Δt に影響されるが, ここでは, 基準増分時間として比較的小さい $\Delta t = 0.01$ (sec) という値を用いているので, その影響は非常に小さいと考えられる. したがって, ここでは増分時間 Δt が精度に及ぼす影響については考えないことにする.

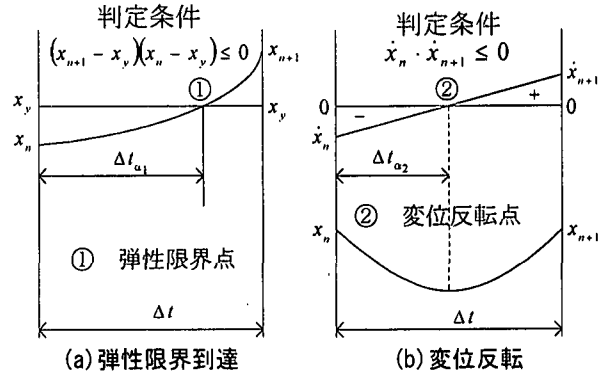


図-6 反復法における弾性限界到達および変位反転の判定方法

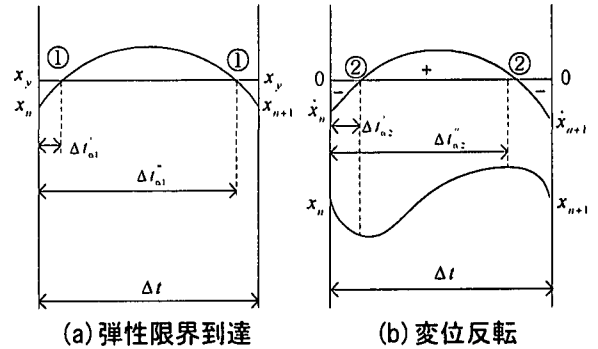


図-7 判定不可能なケース

3. 剛性変化時刻の求め方

エネルギー応答解析を精度良く行うためには, 前述のように剛性変化時刻を正確に求めながら解析を進める必要がある. これらの点を求める方法として, 従来より任意の増分時間内に剛性変化時刻が存在すると判定された場合は, 増分時間を damping することによりその時刻を見つける反復法が広く用いられている. しかしこの反復法は前章でも述べたように精度的にいくつかの問題点を有しており, また比較的多量の演算時間を有する. したがって本研究では, 反復法に内在するこれらの欠点を除去するために, 剛性変化時刻の存在の有無を確実に判定してそれらを正確に算定するとともに, 演算時間が比較的短い手法について検討した.

3.1 反復法による剛性変化時刻の求め方

図-8に示すような復元力特性において弾性限界点①を求める場合, その点の変位 x_y が既知であるのでその点から $x(t_n)$ を差し引きその差の絶対値が収束判定誤差 ε 内に収まるようにする. すなわち, 図-9の(i)のように Δt 秒後の変位が x_y を超えたならば, 同図(ii)のように増分時間を $\Delta t \rightarrow (1/2)\Delta t$ と damping し, 再度, 加速度・速度・変位を算定し直し, 降伏変位 x_y を超えていないか判定する. この繰り返しの作業により $x(t)$ と x_y との差が所定の収束判定誤差内に収まっていればその時の時刻を弾性限界

時刻とする。また、次の剛性変化点が変位反転点（図-8 点②）の場合にも同様な操作を行うが、この場合にはその点を超えたかどうかは速度 $\dot{x}$ の符号の変化により判定する。

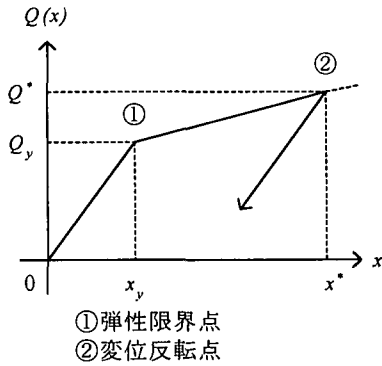


図-8 剛性変化点(弾性限界点, 変位反転点)

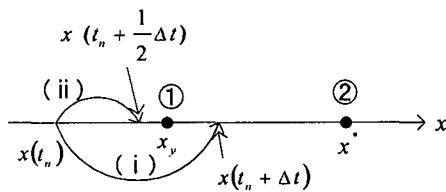


図-9 反復法における収束方法

3.2 本法による剛性変化時刻の求め方

線形加速度法($\beta=1/6$)を用いる場合、増分時間 Δt 内において各諸量は次のように変化すると仮定されている（図-10 参照）。

- ・ Δt 間では $\ddot{x}_0$ および $\ddot{x}$ は線形的に変化する。
- ・ $\dot{x}, x$ はそれぞれ 2 次, 3 次関数的に変化する。

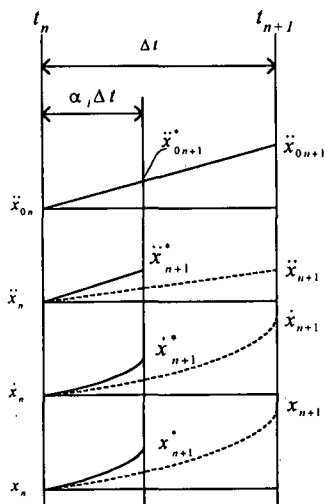


図-10 線形加速度法における各諸量の変化

(1) 弾性限界到達時刻の求め方

今、時刻 $t_{\alpha_1} = t_n + \alpha_1 \Delta t$ 後においてちょうど $x = x_y$ となるものとする ($x_{n+1}^* = x_y$; 図-10 参照)。式(5)に式(12)を代入し、 $x_{n+1} \rightarrow x_y$, $\Delta t \rightarrow \alpha_1 \Delta t$, $\ddot{x}_{0n+1} \rightarrow \ddot{x}_0 + \alpha_1(\ddot{x}_{0n+1} - \ddot{x}_0)$ とおくとともに、式(6)の関係を考慮すると、 α_1 に関する 3 次

方程式が式(13)のように得られる。

$$\left\{ \beta \ddot{x}_{0n} - \left(\frac{1}{2} - 2\beta \right) h \omega_0 \ddot{x}_n \Delta t \right\} \Delta t^2 \alpha_1^3 + \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{Q_n}{m} + \ddot{x}_n \right) + \beta \gamma_m \omega_0^2 \Delta x_y \right\} \Delta t^2 \alpha_1^2 + (h \omega_0 \Delta x_y - \dot{x}_n) \Delta t \alpha_1 + \Delta x_y = 0 \quad (13)$$

ここに、 $\Delta \ddot{x}_{0n} = \ddot{x}_{0n+1} - \ddot{x}_{0n}$ 、また $\Delta x_y = x_y - x_n$ である。この 3 次方程式に $0 < \alpha_1 \leq 1$ なる解 α_1 が存在すれば、時刻 $t_{\alpha_1} = t_n + \alpha_1 \Delta t$ にちょうど弾性限界点に到達することになる。また、ある増分時間 Δt 内で、弾性限界点に限らず、変位反転を伴わずに剛性が変化する場合には、式(13)中の Δx_y を $\Delta x_y = x_s - x_n$ とおけばよい。ただし、 x_s は剛性変化点での変位である。

(2) 変位反転時刻の求め方

今、時刻 $t_{\alpha_2} = t_n + \alpha_2 \Delta t$ においてちょうど $\dot{x} = 0$ となるものとする。式(4)に式(6)、式(9)および式(5)を順次代入し、 $\dot{x}_{n+1} \rightarrow 0$, $\ddot{x}_{0n+1} \rightarrow \ddot{x}_{0n} + \alpha_2(\ddot{x}_{0n+1} - \ddot{x}_{0n})$, $\Delta t \rightarrow \alpha_2 \Delta t$ とおいて整理すると、 α_2 に関する 3 次方程式が式(14)のように得られる。

$$\left(\frac{1}{2} - 2\beta \right) \gamma_m \omega_0^2 \ddot{x}_n \Delta t^3 \alpha_2^3 + \left\{ (1 - 2\beta) \gamma_m \omega_0^2 \dot{x}_n \Delta t + \Delta \ddot{x}_{0n} \right\} \Delta t^2 \alpha_2^2 + \left(\frac{Q_n}{m} + \ddot{x}_{0n} - \ddot{x}_n \right) \Delta t \alpha_2 - 2\dot{x}_n = 0 \quad (14)$$

ここに、 $\frac{Q_n}{m} = \gamma_m \omega_0^2 x_n + \frac{Q_0}{m}$ である。

この 3 次方程式に $0 < \alpha_2 \leq 1$ なる解 α_2 が存在すれば、時刻 $t_{\alpha_2} = t_n + \alpha_2 \Delta t$ でちょうど変位が反転することになる。

以上、弾性限界点ならびに変位反転点に達する時刻を求めるための 3 次方程式（式(13)および式(14)）を示した。本研究では、これらの 3 次方程式の解の精度を保つため、カルダノ法により求めた解を、それを初期値としてニュートン法により補正している。 α_1 および α_2 に関する 3 次方程式(式(13), 式(14))の係数をまとめて表-1 に示す。表中の a, b, c, d は式(15)に示すような 3 次方程式の係数である。

$$a \alpha^3 + b \alpha^2 + c \alpha + d = 0 \quad (15)$$

なお、ある時間ステップで $0 < \alpha_1 \leq 1$ かつ $0 < \alpha_2 \leq 1$ となった場合には、当然 α_1 と α_2 の小さい方が採用される。

4. 本法と反復法の精度ならびに演算時間に関する比較

本章では実地震動(1954 年 El Centro 記録, N44E)を受ける Tri-linear 型 1 自由度系を対象とし、線形加速度法 ($\beta=1/6$) を用いて、本法と反復法との精度ならびに演算時間の比較検討を行う。また比較に用いた解析結果は、表-2 のような入力地震動ならびに構造特性パラメータ値に対するものである。ここに各記号は次のようなパラ

メータを表している。

- F : 入力強度比 ($= \frac{m\ddot{x}_{0\max}}{Q_y}$)
 T_0 : 系の弾性時固有周期
 h : 減衰定数
 γ_1 : 弾塑性剛性比 ($=k_1/k_0$)
 γ_2 : 弾塑性剛性比 ($=k_2/k_0$)
 Δt : 基準増分時間
 T : 入力時間
 ε : 収束判定誤差

表2 各パラメータの値

パラメータ	値
F	0.5, 1.0, 2.0
$T_0(sec)$	0.1, 0.5, 1.0, 2.0
h	0.0, 0.05, 0.2
γ_1	0.05, 0.1
γ_2	0.05
$T(sec)$	15
$\Delta t(sec)$	0.01
ε	$10^{-5}, 10^{-10}$

4.1 精度に関する比較

本節では、本法と反復法による最大応答値の比較を行う。表-3～表-6 は、本法により求めた最大変位 ($x_{\max A}$)、最大速度 ($\dot{x}_{\max A}$) および最大加速度 ($\ddot{x}_{\max A}$) に対する反復法によるそれら ($x_{\max B}$, $\dot{x}_{\max B}$, $\ddot{x}_{\max B}$) の比を各構造特性ごとに示したものである。これらの表から次のようなことが分かる。

- ① 周期 T_0 が比較的長い場合には最大変位、最大速度、最大加速度の比はほぼ 1 となっている。これは、周期が長くなるほど変位反転等の回数が減りまた応答がゆるやかになるために反復法が変位反転点等を見逃す場合が少なくなるためであると思われる。
- ② 周期 T_0 が短い場合でも、入力強度比 F が比較的大きい場合にはそれらの比は 1 に近づいている。これは、入力強度比が大きくなることにより系の周期が伸び、前述の①と同様な結果となるためであると思われる。
- ③ 周期 T_0 が短くかつ減衰定数 h が小さい場合には両者の応答の相違は比較的大きい。これは、減衰が小さい場合には、大きい場合に比べその応答の変動が急激に出るために反復法が変位反転点等を見逃す確率が高くなるためであると思われる。

表-1 α_1 および α_2 に関する 3 次方程式の係数

	a	b	c	d
α_1	$(\beta \Delta \ddot{x}_{0n} - (1/2 - 2\beta) h \omega_0 \ddot{x}_{0n} \Delta t) \Delta t^2$	$\{1/2(Q_n/m + \ddot{x}_{0n}) + \beta \cdot \gamma_n \omega_0^2 \Delta x_n\} \Delta t^2$	$(h \omega_0 \Delta x_n - \ddot{x}_{0n}) \Delta t$	Δx_n
α_2	$(1/2 - 2\beta) \gamma_n \omega_0^2 \ddot{x}_{0n} \Delta t^3$	$\{(1 - 2\beta) \cdot \gamma_n \omega_0^2 \ddot{x}_{0n} \Delta t + \Delta \ddot{x}_{0n}\} \Delta t$	$(Q_n/m + \ddot{x}_{0n} - \ddot{x}_{0n}) \Delta t$	$-2\ddot{x}_{0n}$

表-3 本法と反復法の精度の比較 (入力強度比の影響, $\varepsilon = 10^{-10}$)

$h=0.5, \gamma_1=0.1, \gamma_2=0.05, \varepsilon=10^{-10}$ A: 本 法 B: 反復法												
T_0 (系の周期)	0.1 (s)			0.5 (s)			1.0 (s)			2.0 (s)		
F (入力強度比)	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
$x_{\max B}/x_{\max A}$	0.9885	0.9794	1.0082	1.0007	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$\dot{x}_{\max B}/\dot{x}_{\max A}$	1.0426	0.9934	1.0034	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$\ddot{x}_{\max B}/\ddot{x}_{\max A}$	0.9832	0.9715	0.9991	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

表-4 本法と反復法の精度の比較 (入力強度比の影響, $\varepsilon = 10^{-5}$)

$h=0.5, \quad \gamma_1=0.1, \quad \gamma_2=0.05, \quad \varepsilon=10^{-5}$ A: 本 法 B: 反復法												
T_0 (系の周期)	0.1 (s)			0.5 (s)			1.0 (s)			2.0 (s)		
F (入力強度比)	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
$x_{\max B}/x_{\max A}$	0.9885	0.9794	1.0082	1.0007	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$\dot{x}_{\max B}/\dot{x}_{\max A}$	1.0426	0.9934	1.0034	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$\ddot{x}_{\max B}/\ddot{x}_{\max A}$	0.9832	0.9715	0.9991	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

表-5 本法と反復法の精度の比較(減衰定数の影響, $T_0=1.0\text{sec}$)

$T_0=1.0\text{ (s)}, \gamma_1=0.1, \gamma_2=0.05, \varepsilon=10^{-10}$							A:本 法		B:反復法	
F (入力強度比)	0.5			1.0			2.0			
h (減衰定数)	0.00	0.05	0.20	0.00	0.05	0.20	0.00	0.05	0.20	
$x_{\max B}/x_{\max A}$	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$\dot{x}_{\max B}/\dot{x}_{\max A}$	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$\ddot{x}_{\max B}/\ddot{x}_{\max A}$	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

表-6 本法と反復法の精度の比較(減衰定数の影響, $T_0=0.1\text{sec}$)

$T_0=0.1(s), \quad \gamma_1=0.1, \quad \gamma_2=0.05, \quad \varepsilon=10^{-10}$							1:本 法 2:反復法		
F (入力強度比)	0.5			1.0			2.0		
h (減衰定数)	0.00	0.05	0.20	0.00	0.05	0.20	0.00	0.05	0.20
$x_{\max B}/x_{\max A}$	1.0449	0.9885	1.0000	0.9694	0.9794	0.9948	1.0365	1.0082	0.9785
$\dot{x}_{\max B}/\dot{x}_{\max A}$	0.9449	1.0426	1.0000	0.9338	0.9934	0.9999	1.0280	1.0034	1.0066
$\ddot{x}_{\max B}/\ddot{x}_{\max A}$	0.9571	0.9832	1.0000	0.8779	0.9715	0.9940	1.0037	0.9991	0.9980

4.2 演算時間に関する比較

図-11～図-13 は、本法の演算時間(T_{ca})と反復法の演算時間(T_{cb})とを比較したものである。入力波は前述のような El Centro 記録であるが比較のため調和波(SIN 波, 周期 0.5sec)に対する結果も示している。図-11 より, 系の固有周期が長くなるにつれて反復法の演算時間が著しく短くなっているのが分かる。これは, 一般に固有周期が長いほど応答がゆっくり変化するために変位反転点等の剛性変化点が現れる時間間隔が大きくなることと, 応答が塑性域へ入りにくくなるため, 結果的にそれらの点を求めるための反復回数が減るためであると思われる。また本法の場合は, 各時間ステップごとに必ず剛性変化点の有無を判定しているために系の固有周期等にあまり左右されないことがわかる。また図-12 より, 入力強度比ならびに弾塑性剛性比が演算時間に及ぼす影響は本法ならびに反復法ともに非常に小さいことが分かる。さらに図-13 より分かるように, 本法の演算時間は収束判定誤差の大きさにほとんど左右されないのに対し, 反復法の演算時間は収束判定誤差が小さくなると, それにほぼ反比例して増えている。このことは, 本法による剛性変化時刻等の算定精度が極めて高いことを示しているものと思われる。

5 エネルギー応答の算定方法

本章では, 被積分関数をそのまま積分してエネルギー増分を厳密に求める方法と微小増分時間内において各諸量は線形的に変化すると仮定し台形公式を用いて各エネルギー増分を求める方法の 2 通りのエネルギー算定方法について比較する。台形公式は時間増分 Δt が微小な場合にはその精度は比較的良好であるが, Δt の大きさに左右される。したがってより厳密には, 各被積分関数を

画一的に線形とみなす台形公式を用いず, それらの関数をそのまま積分すべきである。

5.1 エネルギー釣合い式

前出の式(3)の両辺に $\dot{x}dt$ を乗じ, 時刻 t に関して $0 \sim t$ 区間にわたり積分すると次のような単位質量当りのエネルギー釣合い式が得られる。

$$\int_0^t \ddot{x}\dot{x}dt + \int_0^t 2h\omega_0\dot{x}\dot{x}dt + \int_0^t \frac{Q(x)}{m}\dot{x}dt = -\int_0^t \ddot{x}_0\dot{x}dt \quad (16)$$

ここで, $\bar{Q}(x) = Q(x)/m$ として式(16)を書き換えると式(17)のようになる。

$$\frac{1}{2}\dot{x}_t^2 + 2h\omega_0 \int_0^t \dot{x}^2 dt + \int_0^t \bar{Q}(x)dx = -\int_0^t \ddot{x}_0\dot{x}dt \quad (17)$$

ここに, $\dot{x}_t$ および x_t は時刻 t における速度および変位である。また, 左辺の第 1 項は運動エネルギー, 第 2 項は減衰エネルギー, 第 3 項は履歴吸収エネルギー, 右辺は入力エネルギーである。ここで, 第 3 項は厳密には, 履歴吸収エネルギー(塑性ひずみエネルギー)と弾性ひずみエネルギーとの和であるが, 応答終了時には後者は 0 となるため, ここでは第 3 項を便宜的に履歴吸収エネルギーと呼ぶことにする。各エネルギーならびにそれらの増分をそれぞれ次のような記号で表す。

(1) 時刻 t における単位質量当りの各エネルギーの総計

$$\text{①運動エネルギー} \quad \bar{E}_k = \frac{1}{2}\dot{x}_t^2 \quad (18)$$

$$\text{②減衰エネルギー} \quad \bar{E}_D = 2h\omega_0 \int_0^t \dot{x}^2 dt \quad (19)$$

$$\text{③履歴吸収エネルギー} \quad \bar{E}_H = \int_0^t \bar{Q}(x)dx \quad (20)$$

$$\text{④入力エネルギー} \quad \bar{E}_I = -\int_0^t \ddot{x}_0 \dot{x} dt \quad (21)$$

(2) 時刻 $t_n \sim t_{n+1}$ 間の各エネルギー増分

$$\textcircled{1} \text{運動エネルギー増分 } \Delta \bar{E}_K = \frac{1}{2} (\dot{x}_{n+1}^2 - \dot{x}_n^2) \quad (22)$$

$$\textcircled{2} \text{減衰エネルギー増分 } \Delta \bar{E}_D = 2h\omega_0 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{x}^2 dt \quad (23)$$

$$\textcircled{3} \text{履歴吸収エネルギー増分 } \Delta \bar{E}_H = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \bar{Q}(x) dx \quad (24)$$

$$\textcircled{4} \text{入力エネルギー増分 } \Delta \bar{E}_I = - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \ddot{x}_0 \dot{x} dt \quad (25)$$

時刻 $t_n \sim t_{n+1}$ 間の各エネルギー増分は式(22)～式(25)のようになる。図-14のような斜線部（関数 $f(t)$ と t 軸とで囲まれる部分）の面積 S_1 は厳密には式(26)のようになるが、台形公式により近似的に表すと式(27)の S_2 ようになる。

$$S_1 = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t) dt \quad (26)$$

$$S_2 = \frac{1}{2} (f_{n+1} + f_n) (t_{n+1} - t_n) \quad (27)$$

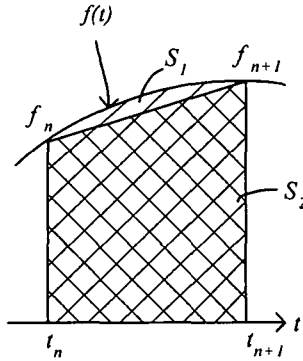


図-14 台形公式によるエネルギーの近似解 (S_2)

5.2 各エネルギーの厳密解

線形加速度法を用いた場合の時刻 $t(t_n \leq t \leq t_{n+1})$ における加速度 $\ddot{x}$ および速度 $\dot{x}$ を示すと次のようである。

$$\ddot{x}_t = \ddot{x}_n + \frac{1}{\Delta t_n} (\ddot{x}_{n+1} - \ddot{x}_n) (t - t_n) \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_t &= \dot{x}_n + \int_{t_n}^t \ddot{x}_t dt \\ &= \dot{x}_n + \ddot{x}_n (t - t_n) + \frac{1}{2\Delta t_n} (\ddot{x}_{n+1} - \ddot{x}_n) (t - t_n)^2 \end{aligned} \quad (29)$$

これらの式を前出の式(23)、式(24)ならびに式(25)に代入すると、時刻 $t_n \sim t_{n+1}$ 間の各エネルギー増分の厳密解が次のように得られる。ただし、運動エネルギー増分は前出の式(22)で表される。

①運動エネルギー増分の厳密解 $\Delta \bar{E}_{K1}$

$$\Delta \bar{E}_{K1} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{x} \ddot{x} dt = \frac{1}{2} (\dot{x}_{n+1}^2 - \dot{x}_n^2) \quad (30)$$

②減衰エネルギー増分の厳密解 $\Delta \bar{E}_{D1}$

$$\begin{aligned} \Delta \bar{E}_{D1} &= 2h\omega_0 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{x}^2 dt \\ &= 2h\omega_0 \Delta t_n \left\{ \dot{x}_n^2 + \frac{\Delta t_n^2}{60} (8\ddot{x}_n^2 + 9\ddot{x}_n \ddot{x}_{n+1} + 3\ddot{x}_{n+1}^2) + \frac{\Delta t_n}{3} \dot{x}_n (\ddot{x}_{n+1} + 2\ddot{x}_n) \right\} \end{aligned} \quad (31)$$

③履歴吸収エネルギー増分の厳密解 $\Delta \bar{E}_{H1}$

$$\Delta \bar{E}_{H1} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \bar{Q}(x) dx = \frac{1}{2} (x_{n+1} - x_n) (\bar{Q}_{n+1} + \bar{Q}_n) \quad (32)$$

④入力エネルギー増分の厳密解 $\Delta \bar{E}_{I1}$

$$\begin{aligned} \Delta \bar{E}_{I1} &= - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \ddot{x}_0 \dot{x} dt \\ &= - \frac{\Delta t_n}{24} [12\ddot{x}_n (\ddot{x}_0 + \ddot{x}_{0n+1}) + \Delta t_n \{ \ddot{x}_n (3\ddot{x}_0 + 5\ddot{x}_{0n+1}) + \ddot{x}_{n+1} (\ddot{x}_0 + 3\ddot{x}_{0n+1}) \}] \end{aligned} \quad (33)$$

5.3 台形公式による各エネルギーの近似解

以下に各エネルギー増分の台形公式による近似解を示す。ただし、運動エネルギー増分は式(22)で表される。また式中、 $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ である。

①運動エネルギー増分の近似解 $\Delta \bar{E}_{K2}$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{x} \ddot{x} dt = \frac{1}{2} (\dot{x}_{n+1}^2 - \dot{x}_n^2) = \Delta \bar{E}_{K1} \quad (34)$$

②減衰エネルギー増分の近似解 $\Delta \bar{E}_{D2}$

$$2h\omega_0 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{x}^2 dt \cong h\omega_0 (\dot{x}_n^2 + \dot{x}_{n+1}^2) \Delta t_n = \Delta \bar{E}_{D2} \quad (35)$$

③履歴吸収エネルギー増分の近似解 $\Delta \bar{E}_{H2}$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \bar{Q}(x) dx \cong \frac{1}{2} (\bar{Q}_n + \bar{Q}_{n+1}) (x_{n+1} - x_n) = \Delta \bar{E}_{H1} \quad (36)$$

④入力エネルギー増分の近似解 $\Delta \bar{E}_{I2}$

$$- \int_{t_n}^{t_{n+1}} \ddot{x}_0 \dot{x} dt \cong - \frac{1}{2} (\ddot{x}_0 \dot{x}_n + \ddot{x}_{0n+1} \dot{x}_{n+1}) \Delta t_n = \Delta \bar{E}_{I1} \quad (37)$$

5.4 近似解と厳密解との比較

表7～表10は、応答終了時における各エネルギーの近似解（台形公式）と厳密解との比を示したものである。なお、剛性変化点等は本法により求めている。

これらの表より、各エネルギー比に与える入力強度比ならびに構造特性パラメータ等の影響は比較的小さいことがわかる。しかし、詳細に見てみると、台形公式を用いた場合、履歴吸収エネルギー E_H の精度は良好であるが、入力エネルギー E_I を若干過大評価し、また減衰エネルギー E_D を若干過小評価する傾向があることが分かる。

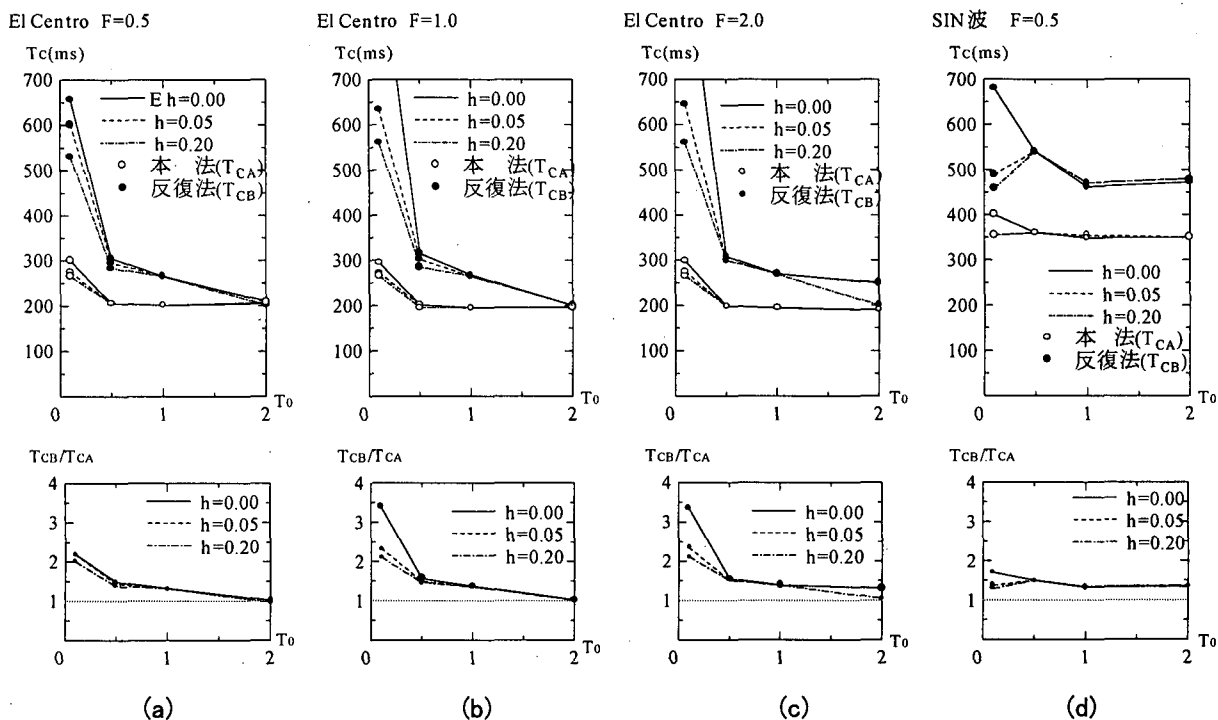


図-11 系の固有周期と演算時間の関係 ($\gamma_1=0.1$, $\varepsilon=10^{-5}$)

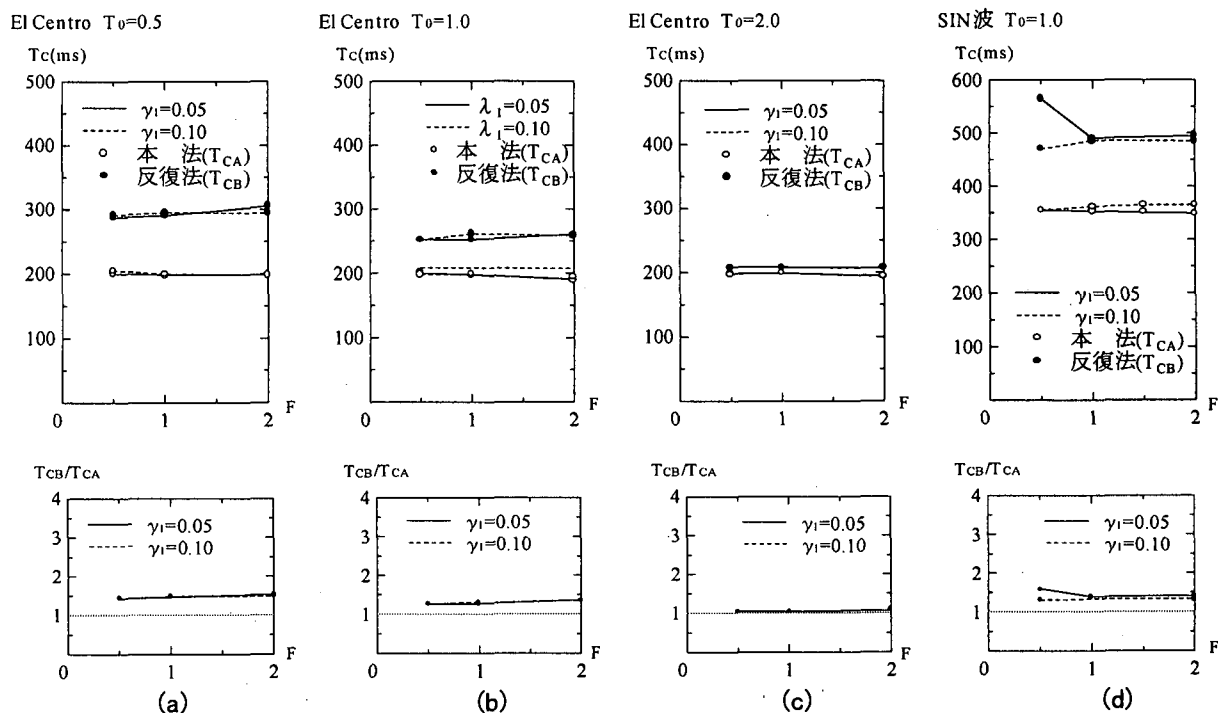


図-12 入力強度比と演算時間の関係 ($h=0.05$, $\varepsilon=10^{-5}$)

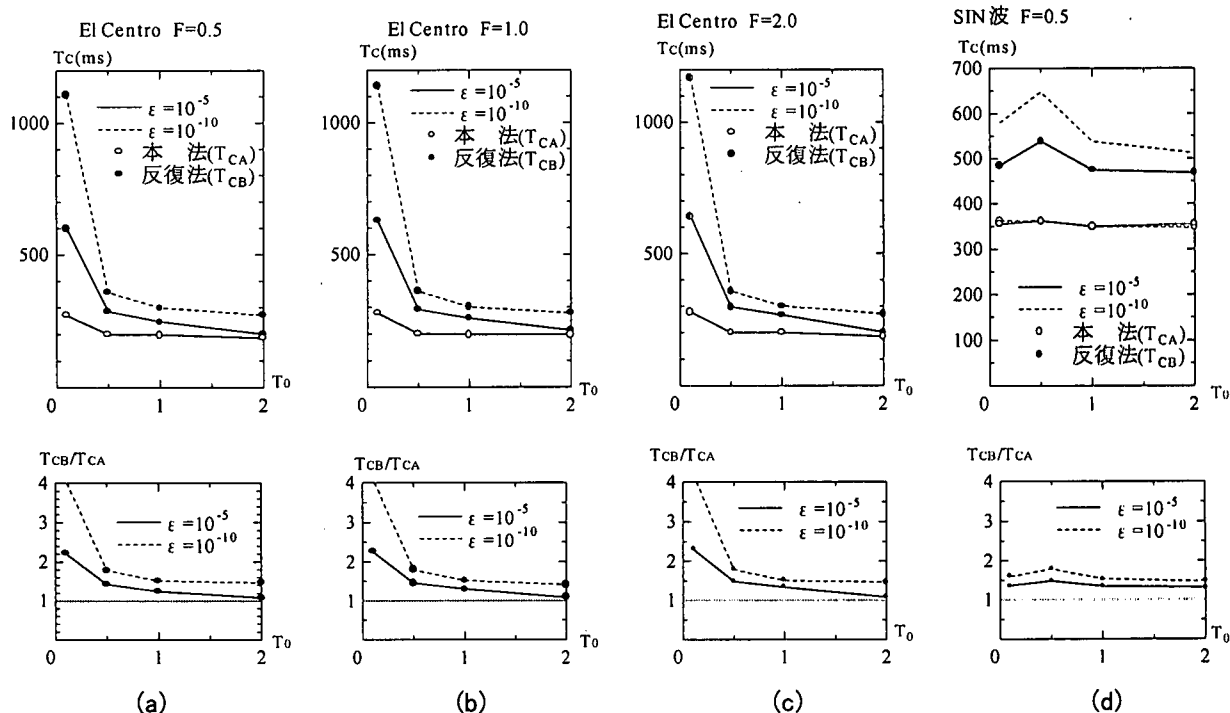


図-13 収束判定誤差が演算時間に及ぼす影響 ($\gamma_1=0.1$, $h=0.05$)

表-7 厳密解と台形公式による近似解の比較 (入力強度比の影響, $\epsilon=10^{-5}$)

$h=0.05$, $\gamma_1=0.1$, $\gamma_2=0.05$, $\epsilon=10^{-5}$				1: 厳密解 2: 台形公式による解					
T_0 (系の周期)	0.5 (s)			1.0 (s)			2.0 (s)		
F (入力強度比)	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
E_{I2}/E_{I1}	1.0037	1.0044	1.0043	1.0012	1.0012	1.0010	1.0010	1.0008	1.0009
E_{D2}/E_{D1}	0.9694	0.9711	0.9734	0.9903	0.9901	0.9886	0.9963	0.9963	0.9964
E_{H2}/E_{H1}	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

表-8 厳密解と台形公式による近似解の比較 (入力強度比の影響, $\epsilon=10^{-10}$)

$h=0.05$, $\gamma_1=0.1$, $\gamma_2=0.05$, $\epsilon=10^{-10}$				1: 厳密解 2: 台形公式による解					
T_0 (系の周期)	0.5 (s)			1.0 (s)			2.0 (s)		
F (入力強度比)	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
E_{I2}/E_{I1}	1.0037	1.0044	1.0043	1.0012	1.0012	1.0010	1.0010	1.0008	1.0009
E_{D2}/E_{D1}	0.9694	0.9711	0.9734	0.9903	0.9901	0.9886	0.9963	0.9963	0.9964
E_{H2}/E_{H1}	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

表-9 厳密解と台形公式による近似解の比較（減衰定数の影響, $\varepsilon=10^{-5}$ ）

$T_0=1.0(s)$, $\gamma_1=0.1$, $\gamma_2=0.05$, $\varepsilon=10^{-5}$ 1:厳密解 2:台形公式による解									
F (入力強度比)	0.5			1.0			2.0		
h (減衰定数)	0.00	0.05	0.20	0.00	0.05	0.20	0.00	0.05	0.20
E_{I2}/E_{I1}	1.0008	1.0012	1.0023	0.9985	1.0012	1.0028	1.0012	1.0010	1.0024
E_{D2}/E_{D1}	*****	0.9903	0.9855	*****	0.9901	0.9858	*****	0.9886	0.9854
E_{H2}/E_{H1}	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

表-10 厳密解と台形公式による近似解の比較（減衰定数の影響, $\varepsilon=10^{-10}$ ）

$T_0=1.0(s)$, $\gamma_1=0.1$, $\gamma_2=0.05$, $\varepsilon=10^{-10}$ 1:厳密解 2:台形公式による解									
F (入力強度比)	0.5			1.0			2.0		
h (減衰定数)	0.00	0.05	0.20	0.00	0.05	0.20	0.00	0.05	0.20
E_{I2}/E_{I1}	1.0008	1.0012	1.0023	0.9985	1.0012	1.0028	1.0012	1.0010	1.0024
E_{D2}/E_{D1}	*****	0.9903	0.9855	*****	0.9901	0.9858	*****	0.9886	0.9854
E_{H2}/E_{H1}	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

6. おわりに

本研究では, multi-linear 型の復元力履歴特性を有する 1 自由度系の地震応答解析を増分形式の Newmark の β 法を用いて行う場合, 解析精度に大きく影響を及ぼす剛性変化点の効率的でかつ精度の良い算定手法(本法)を提案し, 従来の増分時間の damping 等の試行錯誤的な繰返しにより剛性変化点を求めながら解析を進める方法(反復法)との比較検討を行うとともに, 台形公式を用いたエネルギー応答の算定精度についても若干の比較を行った。ただし, 比較に用いた計算例はすべて $\beta=1/6$ (線形加速度法)として解析した結果である。

以下に本研究で得られた主な結論を列挙する。

- 1) 系の周期が短いほど, また入力強度比および減衰定数が小さいほど, 反復法と本法との解析精度の差は小さくなる傾向がある。
- 2) 本法の方が, 反復法に比べて演算時間が短く, またその傾向は系の周期が短いほど顕著である。
- 3) 反復法の演算時間は系の固有周期が短くなるにつれて長くなるが, 本法の演算時間は周期が 0.5sec 以上の場合は周期に関係なくほとんど一定である。
- 4) 減衰定数, 入力強度比および弾塑性剛性比が演算時間に及ぼす影響は, 本法ならびに反復法とも非常に小さい。

5) 収束判定誤差が小さくなると反復法の演算時間は反比例的に大きくなるが, 本法の演算時間はほとんど変化しない。このことより本法による剛性変化時刻等の算定精度が極めて高いことが分かる。

6) 台形公式によるエネルギー応答の近似精度は概ね良好であるが, 若干減衰エネルギーを過小に, また入力エネルギーを過大に評価する傾向がある。

ここで提案した剛性変化時刻の算定手法は, 任意の multi-linear 型復元力履歴特性を有する 1 自由度系の地震応答解析に適用できるが, 多自由度系への拡張は難しいと思われる。

参考文献

- 1) Newmark, N. M., "A Method of Computation for Structural Dynamics", Proc. of ASCE, Vol. 85, No. EM, 1959, pp. 67~94.
- 2) 小坪清真: 土木振動学, 森北出版, pp. 270~273, 1973 年.
- 3) 柴田明徳: 最新建築学シリーズ 9, 最新耐震構造解析 森北出版, pp. 97~112, 1981 年.

- 4) Housner, G.W. : Behavior of structures during Earthquakes, ASCE, EM4, pp.109~129, 1959 年.
- 5) 加藤 勉・秋山 宏 : 強震による構造物へのエネルギー入力と構造物の損傷, 建築学会論文報告集, 第 235 号, pp. 9~18, 1975 年.
- 6) 安藤・峯岸・田中 : 地震時に構造物が消費する塑性エネルギーについて—その 2 塑性エネルギー Spektral についての考察—, 日本建築学会大会学術講演梗概集, I-445, pp. 889~890, 1984 年.
- 7) 大野・西岡・藤野 : 構造物が地震時に受ける塑性ひずみエネルギー量の定量的評価, 土木学会論文報告集, 第 333 号, pp. 91~99, 1983 年.
- 8) 茅野・山田・家村 : 入力エネルギー Spektral による地震動強度の評価と耐震設計法, 第 39 回土木学会年次学術講演会講演概要集, I-445, pp. 889~890, 1984 年.
- 9) 三上・平尾・成行・笹田 : 強震下における 1 自由度系の履歴吸収エネルギーと弾性応答値との関係について, 土木学会論文集, 第 368 号/I-5, pp. 401~410, 1986 年.
- 10) 三上・平尾・成行・澤田・笹田 : レベル 2 地震動に対する損傷制御震度 Spektral に関する一研究, 構造工学論文集, Vol. 45A, pp. 809~818, 1999 年.

(2001 年 4 月 20 日)