

成層弾性波動場の Green 関数のスペクトル表現に寄与する 放射条件を満足する複素 Rayleigh 波モードについて

Complex Rayleigh Wave Modes Satisfying Radiation Condition for the Spectral Representation
of Green's Function for Elastic Layered Half Space

東平光生*

Terumi Touhei

*正会員 工博 東京理科大学助教授 理工学部土木工学科 (〒278-8510 千葉県野田市山崎 2641)

Complex Rayleigh wave modes satisfying the radiation condition are investigated in this paper. The relationship between the complex Rayleigh wave modes and the spectral representation of Green's function for elastic layered half space is mainly focused on the investigation. The decomposition form of the residue of Green's function at the complex Rayleigh poles are derived in terms of eigenfunctions, which are found to be the same as the decomposition form of the normal modes. The complex Rayleigh wave modes are found to express non-propagating waves. Numerical calculations are carried out to clarify the distribution of complex Rayleigh poles in the permissible Riemann sheets. The effects of the complex modes on the complete form of Green's function are examined based on the numerical calculations.

Key Words : Green's function, elastic layered half space, spectral representation, complex Rayleigh wave modes

1. はじめに

成層弾性体の波動場の Green 関数を計算することは、地震応答解析や地下資源探査といった問題の中で重要な課題である。近年のコンピュータ性能の大幅な向上とともに Green 関数の計算技術も大きく進歩してきた。そして、Green 関数の計算手法として提示されてきた代表的なものとして、Fuchs と Müller の reflectivity method¹⁾、Bouchon と Aki の discrete wavenumber method²⁾⁻⁶⁾、Harvey の modal method⁷⁾、Haddon による一連のリーキングモードに関する研究⁸⁾⁻¹⁰⁾などを上げることができる。また、著者は最近になって、成層弾性体の波動場の Green 関数のスペクトル分解表示を示した¹¹⁾¹²⁾。この研究の目的は Green 関数の新たな計算手法の展開というよりもむしろ、Green 関数に寄与する留数項と分岐線積分の数学的な統一性を固有関数とエネルギー積分によって明らかにすることであった。

最近になって著者は、Green 関数を直接波数積分した結果とスペクトル表現による結果を一致させるためには、なお permissible sheet 上に存在する複素 Rayleigh 波を考慮しなければならないことを見出した。複素 Rayleigh 波に関するこれまでの研究は、Haddon⁸⁾⁻¹⁰⁾らの論文に見られるように、permissible sheet の外に存在し、放射条件を満足しないものに対し多く行われてきた。著者の調べた限りにおいて、permissible sheet 上に存在する複素 Rayleigh 極に関する研究については、Watson¹³⁾らによって 2-D の成層波動場でその性質が論じられてい

るに過ぎない。こうした背景の下で、本論文は 3-D の成層波動場の Green 関数のスペクトル表現と permissible sheet にある複素 Rayleigh 極の関係を論じることを目的とする。特に、波数領域の Green 関数の正規モード極での留数と正規モードの関係がそのまま複素 Rayleigh 波モードに適用されること、複素 Rayleigh 波が非伝播性の波動であることの二つを理論展開の視点から示す。2-D の場合、複素 Rayleigh 波が非伝播性の波動であることは Watson¹³⁾の論文にも見られるように比較的容易に示せる。しかし、3-D の場合には、後述の horizontal wavefunction に Hankel 関数を用いなければならないことも含め、これを示すことは煩雑になってくる。ここではこうした点を考慮した叙述を進める。また、実際に数値計算を行い、複素 Rayleigh 極の permissible sheet 上の分布の様子、複素 Rayleigh 波のモードの形状、Green 関数への寄与などを検討する。

2. 基礎方程式および基本仮定

議論の出発点を明確にするために、基礎方程式および基本仮定を示す。図-1 に成層弾性波動場を示す。ここで、 ρ は質量密度、 λ および μ は Lamé の定数を示す。これら材料定数には layer index が付けられているが、以降ではこれらは層ごとに一定な深さ方向の正の有界な関数であることを承認したのち、layer index は省略する。図-1 に示すように、ここでは円筒座標系 (r, θ, z)

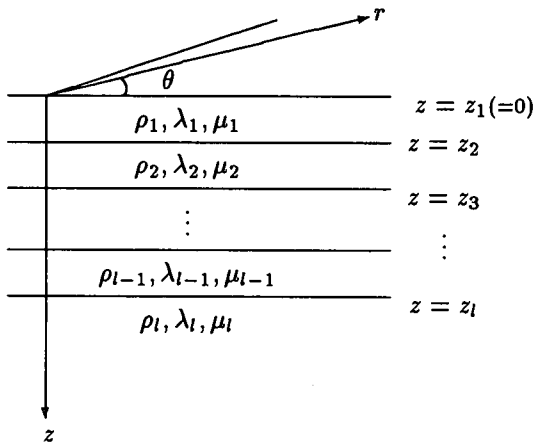


図-1 成層弾性波動場

を用い、鉛直座標 z は、鉛直下向きに正の方向をとる。また、自由表面の鉛直座標 z_1 は $z_1 = 0$ とする。

Green 関数を定義する方程式は次式で与えられる。

$$[(\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot + \mu\nabla^2 + \rho\omega^2] \mathbf{G}(r, \theta, z) = -\frac{1}{2\pi r} \delta(r) \delta(z - z') \mathbf{1} \quad (1)$$

ここに、 $\mathbf{G}$ は Green 関数、 $\mathbf{1}$ は外力の方向を記述するための 3 行 3 列の単位行列、 ω は角振動数でここでは実数で与える。また、 ∇ は勾配演算子、 $\delta(\cdot)$ は Dirac のデルタ関数をあらわす。さらに、ここでのソース点の空間座標は、 $(0, 0, z')$ とし、進行波を得るための Green 関数の時間因子は $\exp(i\omega t)$ と決める。ただし、 t は時間をあらわす。

Aki and Richards¹⁴⁾ のテキストを参照すれば、式 (1) の解を次のように誘導することはさほど難しくない。

$$\mathbf{G}(r, \theta, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} k \mathbf{H}_k^m(r, \theta) \mathbf{g}_k^m(z, z') dk \quad (2)$$

ここに、 m は円筒座標系 θ に関する Fourier 成分の次数、 k は波数、 $\mathbf{g}_k^m(z, z')$ は波数領域の Green 関数で 3 行 3 列の行列の形式をとる。また、 $\mathbf{H}_k^m$ は波動の水平方向への伝播を記述する行列で、ここでは horizontal wave function と呼ぶ。この horizontal wave function の成分は次式であらわされる。

$$\mathbf{H}_k^m(r, \theta) = \begin{bmatrix} Y_k^m(r, \theta) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \partial_r Y_k^m(r, \theta) & \frac{1}{k r} \partial_\theta Y_k^m(r, \theta) \\ 0 & \frac{1}{k r} \partial_\theta Y_k^m(r, \theta) & -\frac{1}{k} \partial_r Y_k^m(r, \theta) \end{bmatrix}$$

ただし、

$$Y_k^m(r, \theta) = J_m(kr) \exp(im\theta)$$

であり、 J_m は m 次の第 1 種 Bessel 関数、 ∂ は下付き添え字のパラメータによる偏微分の演算子である。

また、波数領域の Green 関数は次の方程式の解である。

$$\mathbf{A}_k \mathbf{g}_k^m(z, z') = -\hat{\mathbf{f}}^m \delta(z - z') \quad (3)$$

ここに、 $\mathbf{A}_k$ は微分演算子で、

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{L}_k - k^2 \mathbf{D} + \rho\omega^2 \mathbf{1} \quad (4)$$

であり、 $\mathbf{A}_k$ を構成する $\mathbf{L}_k$ および $\mathbf{D}$ は次のように与えられる。

$$\mathbf{L}_k = \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu)\partial_z^2 & -(\lambda + \mu)k\partial_z & 0 \\ (\lambda + \mu)k\partial_z & \mu\partial_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu\partial_z^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_k = \text{diag.} \begin{bmatrix} \mu & (\lambda + 2\mu) & \mu \end{bmatrix}$$

また、式 (3) の $\hat{\mathbf{f}}^m$ は、式 (1) に現れる単位行列 $\mathbf{1}$ を波数領域に変換したものであり、次のように表される。

$$\hat{\mathbf{f}}^m = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & -i \\ 0 & -i & \mp 1 \end{bmatrix} \quad \text{when } m = \pm 1$$

$$\hat{\mathbf{f}}^m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{when } m = 0$$

$$\hat{\mathbf{f}}^m = 0 \quad \text{otherwise} \quad (5)$$

ただし、式 (5) の第 1 式は複号同順である。この式より式 (2) の m に関する無限和は $-1 \leq m \leq 1$ の有限和となる。また、Green 関数は層境界で表面力が釣り合い、変位が連続しなければならないが、この条件は次式で与えられる。

$$g_k^m(z_j - \epsilon, z') = g_k^m(z_j + \epsilon, z')$$

$$P_k g_k^m(z_j - \epsilon, z') = P_k g_k^m(z_j + \epsilon, z') \quad (j = 2, \dots, l) \quad (6)$$

ここに、 ϵ は無限小の正数、 P_k は変位を表面力に変換する微分演算子で次式で示される。

$$P_k = \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu)\partial_z & -\lambda k & 0 \\ \mu k & \mu\partial_z & 0 \\ 0 & 0 & \mu\partial_z \end{bmatrix} \quad (7)$$

この微分演算子 P_k を用いて、Green 関数の満たすべき自由表面の境界条件は本論文では以下のように記述する。

$$P_k g_k^m(0, z') = 0 \quad (8)$$

前述のように、本論文では、複素 Rayleigh 波モードと Green 関数の関係を考えてゆく。このため $g_k^m(z, z')$ を複素波数平面で考察することが必要となってくる。この状況で、複素波数を表す変数として、 κ を採用する。したがって、 $g_k^m(z, z')$ は複素波数平面で考えた波数領域の Green 関数を表す。また、この複素波数平面での cut を図-2 に示す。ただし、図-2 に現れる γ_κ および ν_κ は、次式のとおりである。

$$\gamma_\kappa = \sqrt{\kappa^2 - k_{\alpha l}^2}$$

$$\nu_\kappa = \sqrt{\kappa^2 - k_{\beta l}^2} \quad (9)$$

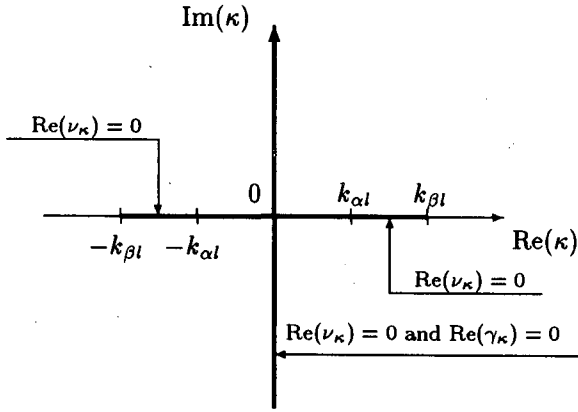


図-2 複素波数平面の cut

ここに $k_{\alpha l}$ および $k_{\beta l}$ は半無限層での P 波と S 波の波数を示す。詳細な議論は省略するが, permissible sheet 上での複素波数は, 放射条件より $\text{Re}(\gamma_\kappa) > 0$ および $\text{Re}(\nu_\kappa) > 0$ を満足し, cut 上の波数は $\text{Re}(\gamma_\kappa) = 0$ および $\text{Re}(\nu_\kappa) = 0$ を満足することになる。本論文では, 複素平面上の cut 上の波数の集合を σ_c で表すことにする。すなわち,

$$\sigma_c \stackrel{\text{def}}{=} \{k \mid \text{Re}(\gamma_k) = 0\} \cup \{k \mid \text{Re}(\nu_k) = 0\}$$

また, 次の条件を満足する複素波数の集合も用いる。

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \{\kappa \mid \text{Re}(\gamma_\kappa) \geq 0 \text{ and } \text{Re}(\nu_\kappa) \geq 0\}$$

議論を個々の成層波動場に限らない一般的なものとするため, 次の三つの仮定を設ける。すなわち, 波動場は成層弾性体として一般的なものを想定するが, 以下の仮定を満足するものだけに制限する。また, 展開の過程ではベクトル $v_\kappa(z)$, ($\kappa \in C \setminus \sigma_c$) を用いるが, これは 3 成分からなる列ベクトルで次の成層波動場の層境界での変位の連続条件と表面力の釣り合い条件を満足するものとする。

$$\begin{aligned} v_\kappa(z_j - \epsilon, z') &= v_\kappa(z_j + \epsilon, z') \\ \mathcal{P}_\kappa v_\kappa(z_j - \epsilon, z') &= \mathcal{P}_\kappa v_\kappa(z_j + \epsilon, z') \\ (j &= 2, \dots, l) \end{aligned}$$

ただし, $v_\kappa(z)$ が自由表面の境界条件を満足するかどうかは, そのときの条件で異なるものとする。

Assumption 1

σ_p を波数領域の Green 関数 $g_\kappa^m(z, z')$ の複素波数平面上 (permissible sheet) の極の集合とする。このとき,

$$\sigma_p \subset C \setminus \sigma_c \quad (A.1)$$

が成立する。また, すべての極は simple とする。さらに, 極は permissible sheet 全体にわたって存在し得る。また, σ_p は高々可算集合である。

Assumption 2 複素波数 $\kappa \in \sigma_p$ に関しては, 固有関数が存在する。すなわち,

$$A_\kappa v_\kappa(z) = 0, \quad \mathcal{P}_\kappa v_\kappa(0) = 0, \quad (\kappa \in \sigma_p) \quad (A.2)$$

Assumption 3 複素波数 $\kappa \in C \setminus \sigma_p$ に関しては, 次の解を一意的に構成することが可能である。

$$A_\kappa v_\kappa(z) = -f\delta(z - z'), \quad \mathcal{P}_\kappa v_\kappa(0) = 0 \quad (A.3)$$

ここで, f は 3 成分よりなる列ベクトルであり任意に与えるものとする。同様に, 自由表面で与えた, 任意の表面力 $\mathcal{P}_\kappa v_\kappa(0)$ の境界条件に対し, $A_\kappa v_\kappa(z) = 0$ を満足する解を一意的に構成することができる。

Assumption 1 では, Green 関数の極は複素波数平面の cut 上には見出せないことをまず主張する。これと Assumption 2 によって, Green 関数の極に関連する固有関数はすべて L_2 空間に属することになり, 固有関数の内積, したがって, 以下で定義するエネルギー積分が例外なく有限な値をとることになる。また, Assumption 1 ですべての極は simple であることを主張することは, この後に続く, Green 関数の留数項の固有関数への分解の議論を単純にするために行う。複素波数平面全体にわたって極の存在を許容するが, これは Watson らの研究結果¹³⁾に基づく。Assumption 3 に示すように解が一意的に構成してゆけることは, 伝達マトリックス法などを参照することで明らかであろうが, 例外なしに, 解が構成できるということを議論の立脚点として明示する。なお, Assumption 3 の一意性の条件より, $f = 0$ あるいは, $\mathcal{P}_\kappa v_\kappa(0) = 0$ の場合には, $\kappa \notin \sigma_p$ とすれば $v_\kappa(z) \equiv 0$ が従う。

以下では, 実数の固有値の固有関数を正規モード, 複素数の固有値に関する固有関数を複素モードと呼び, 両者を区別することにする。また, 両者をあわせて固有モードという呼び方を用いる場合もある。また, 微分演算子 A_κ の中で SH 波成分だけは対称である。これより SH 波成分に関する固有値すなわち, Love 波については波数を permissible sheet に制限すれば正規モードのみからなる。したがって, 複素モードが問題となるのは Rayleigh 波についてのみということになる。

3. 固有モードと Green 関数の関係についての基本的性質

Green 関数と正規モードの関係については SH 波成分について Aki and Richards のテキストで触れられている。ここでは, この Green 関数と正規モードの関係を複素モードを含めた一般的な固有モードとの関係にまで拡張する。まず, 次の方程式の同次解,

$$A_\kappa v_\kappa(z) = 0, \quad (\kappa \in C \setminus \sigma_c) \quad (10)$$

を考える。Assumption 2 と 3 から, $\kappa \notin \sigma_p$ のときは, $v_\kappa(z)$ は自由表面の境界条件は満足せず, $\kappa \in \sigma_p$ のときは, $v_\kappa(z)$ 自由表面の境界条件も満足する固有関数で

ある。この同次解に対する内積を次のように定義する。

$$\langle v_\kappa(z), A_\kappa v_\kappa(z) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty v_\kappa(z)^T A_\kappa v_\kappa(z) dz \quad (11)$$

この内積の定義では、どちらかのベクトルに共役複素数をとることはしないことに注意する。この内積を用いてスカラー関数 $F(\kappa)$ を次のように定義する。

$$F(\kappa) = -\langle v_\kappa(z), A_\kappa v_\kappa(z) \rangle - v_\kappa(0)^T P_\kappa v_\kappa(0), \quad (\kappa \in \mathcal{C} \setminus \sigma_c) \quad (12)$$

$F(\kappa)$ の重要な性質は、次式で表される。

$$\begin{aligned} F(k_n) &= 0, & k_n \in \sigma_p \\ F(\kappa) &\neq 0, & \kappa \notin \sigma_p \end{aligned} \quad (13)$$

部分積分を式(12)に施すことで次式を得る。

$$F(\kappa) = -\omega^2 I_0 + I_1 + \kappa^2 I_2 + 2\kappa I_3 \quad (14)$$

ここに、 I_j ($j = 0, 1, 2, 3, 4$) はエネルギー積分で、次のように定義される。

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^\infty \rho v_\kappa(z)^T v_\kappa(z) dz \\ I_1 &= \int_0^\infty \partial_z v_\kappa(z)^T K_1 \partial_z v_\kappa(z) dz \\ I_2 &= \int_0^\infty v_\kappa(z)^T K_2 v_\kappa(z) dz \\ I_3 &= \int_0^\infty \partial_z v_\kappa(z)^T K_3 v_\kappa(z) dz \end{aligned} \quad (15)$$

ただし、式(15)の K_p ($p = 1, 2, 3$) は3行3列の行列であり、その成分は

$$\begin{aligned} K_1 &= \text{diag.} \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu) & \mu & \mu \end{bmatrix} \\ K_2 &= \text{diag.} \begin{bmatrix} \mu & (\lambda + 2\mu) & \mu \end{bmatrix} \\ K_3 &= \begin{bmatrix} 0 & -\lambda & 0 \\ \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

である。

このエネルギー積分の定義によって、次の定理を得る。

Theorem 1 $k_n \in \sigma_p$ とする。このとき、極 k_n における Green 関数の留数は次のように固有関数に分解される。

$$\text{Res}_{\kappa=k_n} g_\kappa^m(z, z') = \frac{\varphi_n(z) \varphi_n(z')^T}{2k_n I_2 + 2I_3} \hat{f}^m \quad (T.1)$$

ここに、 $\varphi_n(z)$ は、極 k_n に対する固有関数である。また、 I_2 および I_3 は式(15)によって定義されるエネルギー積分で、これらの式の $v_\kappa(z)$ のかわりに、 $\varphi_n(z)$ を用いて計算されるスカラー量である。

この定理は、Green 関数と固有モードの関係を複素モードを含んだ形で一般的に示したものである。この定理の一部分、すなわち正規モードとしての Love 波と Green 関数の関係については、Aki and Richards のテキスト

14) で示されている。ここでの定理の証明のプロセスは、Aki and Richards のテキストにそのまま沿う形で行われるので、証明の詳細は省略する。ただし、証明のプロセスでは、すべての極は simple であるという仮定 (Assumption 1) によって、

$$F'(k_n) = 2k_n I_2 + 2I_3$$

が式(T.1)の右辺の分母に用いられていることに注意する。

ここで、複素モードの特性を記述するために次の Lemma を用意する。

Lemma 1 $v_\kappa(z)$ が次の方程式の解であるとする。

$$A_\kappa v_\kappa(z) = 0, \quad (\kappa \in \mathcal{C})$$

このとき、 $v_\kappa(z)$ 複素共役の関係にある $v_\kappa^*(z)$ は次式を満足する。

$$A_{\kappa^*} v_\kappa^*(z) = 0, \quad (\kappa \in \mathcal{C}) \quad (L.1)$$

ただし、 κ^* は κ の共役複素数である。

この Lemma は地盤の材料物性の実数で与えられていること、ならびにソースの加振振動数も実数で与えられていることに基づく。この Lemma の帰結とエネルギー積分の定義から次の定理が成立する。

Theorem 2 $k_n \in \sigma_p$ とし、 $\varphi_n(z)$ をこの固有値に対する固有関数とする。このとき、 k_n の共役複素数 k_n^* も固有値であり、これに対応する固有関数は $\varphi_n^*(z)$ である。さらに、互いに複素共役の関係にある固有値のエネルギー積分も互いに複素共役の関係にある。

次節では、モードの重ね合わせで Theorem 2 がどのような意味を持つてくるかを検討する。

4. 複素 Rayleigh 波モードの Green 関数への寄与

複素 Rayleigh 波モードの Green 関数への寄与を見するために、式(2)にもどろう。これは、次のように表された。

$$G(r, \theta, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-1}^1 \int_0^\infty \kappa H_\kappa^m(r, \theta) g_\kappa^m(z, z') d\kappa$$

ただし、ここでは式(5)より、 m に関する和は有限和に置き換えている。この積分の積分路を変形し、permissible sheet 上の複素 Rayleigh 波の Green 関数への寄与を求めることがここでの目的となる。

まず、horizontal wavefunction を次のように書き換える。

$$H_\kappa^m(r, \theta) = \frac{1}{2} \left[H_\kappa^{m(1)}(r, \theta) + H_\kappa^{m(2)}(r, \theta) \right] \quad (17)$$

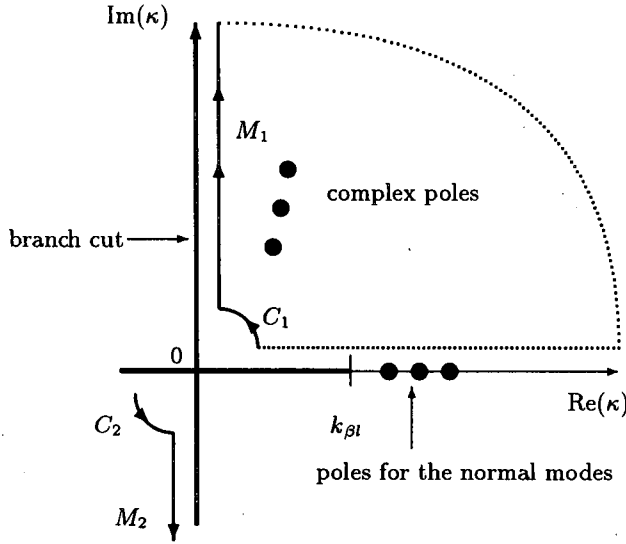


図-3 η_1 のための積分路 M_1 , M_2 , C_1 および C_2

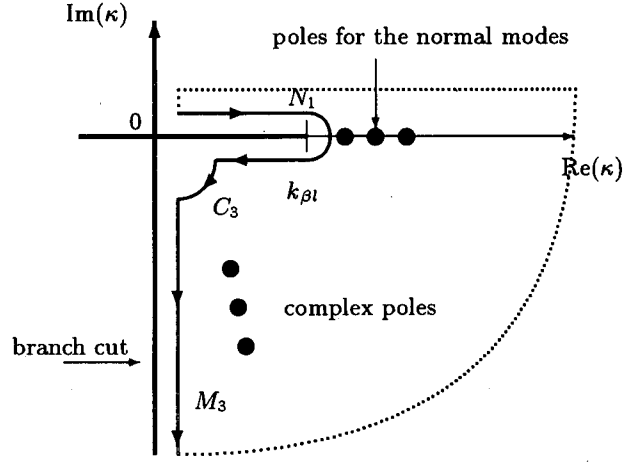


図-4 η_2 の評価のための積分路 N_1 , M_3 および C_3

ここに,

$$H_{\kappa}^{m(\tau)}(r, \theta) = \begin{bmatrix} Y_{\kappa}^{m(\tau)}(r, \theta) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\kappa} \partial_r Y_{\kappa}^{m(\tau)}(r, \theta) & \frac{1}{\kappa r} \partial_{\theta} Y_{\kappa}^{m(\tau)}(r, \theta) \\ 0 & \frac{1}{\kappa r} \partial_{\theta} Y_{\kappa}^{m(\tau)}(r, \theta) & -\frac{1}{\kappa} \partial_r Y_{\kappa}^{m(\tau)}(r, \theta) \end{bmatrix} \quad (\tau = 1, 2)$$

であり, $Y_{\kappa}^{m(\tau)}(r, \theta)$ は次式で示される.

$$Y_{\kappa}^{m(\tau)}(r, \theta) = H_m^{(\tau)}(\kappa r) \exp(im\theta), \quad (\tau = 1, 2)$$

ただし, $H_m^{(\tau)}$ は m 次の Hankel 関数である. この置き換えによって, 式(2)の Green 関数は次のように表される.

$$G(r, \theta, z) = \frac{1}{4\pi} \left[\sum_{m=-1}^1 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\epsilon}^{\infty} \kappa H_{\kappa}^{m(1)}(r, \theta) g_{\kappa}^m(z, z') d\kappa + \int_{\epsilon}^{\infty} \kappa H_{\kappa}^{m(2)}(r, \theta) g_{\kappa}^m(z, z') d\kappa \right\} \right] \quad (18)$$

式(18)では, 極限移行 " $\epsilon \rightarrow 0$ " が, Hankel 関数の特異性によって必要となってくることに注意する.

以下の議論では, 次の二つの積分

$$\eta_1 = \int_{\epsilon}^{\infty} \kappa H_{\kappa}^{m(1)}(r, \theta) g_{\kappa}^m(z, z') d\kappa$$

および,

$$\eta_2 = \int_{\epsilon}^{\infty} \kappa H_{\kappa}^{m(2)}(r, \theta) g_{\kappa}^m(z, z') d\kappa$$

の評価に主眼が置かれる. 図-3に示すように, η_1 のための積分路 (ϵ, ∞) は第1種 Hankel 関数の性質を用いることで, 次のように置き換えることができる.

$$\eta_1 = \int_{C_1} \kappa H_{\kappa}^{m(1)}(r, \theta) g_{\kappa}^{m\downarrow}(z, z') d\kappa + \int_{M_1} \kappa H_{\kappa}^{m(1)}(r, \theta) g_{\kappa}^{m\downarrow}(z, z') d\kappa$$

$$+ 2\pi i \sum_{\xi_j \in \sigma_{p1}} \xi_j H_{\xi_j}^{m(1)}(r, \theta) \text{Res}_{\kappa=\xi_j} g_{\kappa}^m(z, z') \quad (19)$$

ただし, σ_{p1} は permissible sheet 上の複素 Rayleigh 極のうち, 第1象限に存在するものの集合である. また, $g_{\kappa}^{m\downarrow}(z, z')$ は波数領域の Green 関数が半無限層で下降波になっていることを示す. 積分 η_1 は, 次式と等価である.

$$\eta_1 = \int_{C_2} \kappa H_{\kappa}^{m(2)}(r, \theta) g_{\kappa}^{m\downarrow}(z, z') d\kappa + \int_{M_2} \kappa H_{\kappa}^{m(2)}(r, \theta) g_{\kappa}^{m\downarrow}(z, z') d\kappa + 2\pi i \sum_{\xi_j \in \sigma_{p1}} \xi_j H_{\xi_j}^{m(1)}(r, \theta) \text{Res}_{\kappa=\xi_j} g_{\kappa}^m(z, z') \quad (20)$$

積分 η_2 に関しては, 第2種 Hankel 関数の性質を用いて次のように表現できる.

$$\eta_2 = \int_{N_1} \kappa H_{\kappa}^{m(2)}(r, \theta) g_{\kappa}^m(z, z') d\kappa + \int_{C_3} \kappa H_{\kappa}^{m(2)}(r, \theta) g_{\kappa}^{m\uparrow}(z, z') d\kappa + \int_{M_3} \kappa H_{\kappa}^{m(2)}(r, \theta) g_{\kappa}^{m\uparrow}(z, z') d\kappa - 2\pi i \sum_{\xi_j \in \sigma_{p1}} \xi_j^* H_{\xi_j}^{m(2)}(r, \theta) \text{Res}_{k=\xi_j^*} g_k^m(z, z') - 2\pi i \sum_{k_n \in \sigma_{pn}} k_n H_{k_n}^{m(2)}(r, \theta) \text{Res}_{k=k_n} g_k^m(z, z') \quad (21)$$

ここに, σ_{pn} は正値の正規モードの波数の集合, 積分路 N_1 , C_3 and M_3 については, 図-4に示している. また, $g_{\kappa}^{m\uparrow}(z, z')$ は波数領域の Green 関数が半無限層で上昇波を示すことを表している. ここでは, 第4象限にある複素 Rayleigh 極を考慮しているが, この考慮の方法は Theorem 2に基づき, 第1象限内の複素 Rayleigh 極の集合を用いて表されている. 二つの積分を加え, 著者が前論文¹¹⁾で示した分岐線積分核の固有関数への分

解を考慮することで、Green 関数のスペクトル分解表示が次のように得られる。

$$\begin{aligned}
 G(r, \theta, z) &= -\frac{i}{4} \sum_{m=-1}^1 \sum_{k_n \in \sigma_{pn}} k_n \mathbf{H}_{k_n}^{m(2)}(r, \theta) \frac{\varphi_n(z) \varphi_n(z')^T}{k_n I_2 + I_3} \hat{\mathbf{f}}^m \\
 &\quad - \frac{i}{4} \sum_{m=-1}^1 \int_{\sigma_c} k \mathbf{H}_k^{m(2)}(r, \theta) \Psi_k(z) [k I_2 + I_3]^{-1} \\
 &\quad \times \Psi_k(z')^T |dk| \hat{\mathbf{f}}^m \\
 &\quad + \mathbf{A}(r, \theta, z) + \mathbf{F}(r, \theta, z) \quad (22)
 \end{aligned}$$

ここでは、詳細な議論は省略しているが、 $\Psi_k(z)$ は連続スペクトルに対する固有関数、 I_2 および I_3 は行列形式で与えられる連続スペクトルのエネルギー積分を示す。また、 σ_c は連続スペクトルであり、簡単に言えば、Riemann 面の cut 上の波数である。さらに $\mathbf{A}(r, \theta, z)$ 複素 Rayleigh 波の Green 関数への寄与、 $\mathbf{F}(r, \theta, z)$ は積分路 C_2 ならびに C_3 からの寄与で、horizontal wavefunction の特異性に基づく $k=0$ での留数項である。前論文¹¹⁾ では $\mathbf{A}(r, \theta, z)$ および $\mathbf{F}(r, \theta, z)$ の二つの寄与が考慮されていない。複素 Rayleigh 波の Green 関数への寄与を固有関数で表現することで次式を得る。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}(r, \theta, z) &= -\frac{i}{4} \sum_{m=-1}^1 \sum_{\xi_j \in \sigma_{pl}} \left[\xi_j^* \mathbf{H}_{\xi_j}^{m(2)}(r, \theta) \frac{\hat{\varphi}_j^*(z) \hat{\varphi}_j^*(z')^T}{\xi_j^* \hat{I}_2 + \hat{I}_3} \right. \\
 &\quad \left. - \xi_j \mathbf{H}_{\xi_j}^{m(1)}(r, \theta) \frac{\hat{\varphi}_j(z) \hat{\varphi}_j(z')^T}{\xi_j \hat{I}_2 + \hat{I}_3} \right] \hat{\mathbf{f}}^m \quad (23)
 \end{aligned}$$

ここに、 $\hat{\varphi}_j(z)$ は複素 Rayleigh 波モードであり、正規モードと区別するために、 $\hat{\cdot}$ の記号を付加した。また、 $\hat{I}_2$ および $\hat{I}_3$ は複素 Rayleigh 波モードのエネルギー積分である。Rayleigh 波モードおよびエネルギー積分に付けられた記号 $*$ は共役複素数を取るものであることに注意する。

以下では、 $\mathbf{A}(r, \theta, z)$ の虚数部がゼロとなり、したがって複素 Rayleigh 波は非伝播性のモードであることを示す。そのために、まず式 (23) を次のように書き換える。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}(r, \theta, z) &= -\frac{i}{4} \sum_{\xi_j \in \sigma_{pl}} \left[\mathbf{A}_j^{(2)}(r, \theta, z) - \mathbf{A}_j^{(1)}(r, \theta, z) \right] \quad (24)
 \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_j^{(1)}(r, \theta, z) &= \sum_{m=-1}^1 \xi_j \mathbf{H}_{\xi_j}^{m(1)}(r, \theta) \Phi_j(z) \hat{\mathbf{f}}^m \\
 \mathbf{A}_j^{(2)}(r, \theta, z) &= \sum_{m=-1}^1 \xi_j^* \mathbf{H}_{\xi_j}^{m(2)}(r, \theta) \Phi_j^*(z) \hat{\mathbf{f}}^m
 \end{aligned}$$

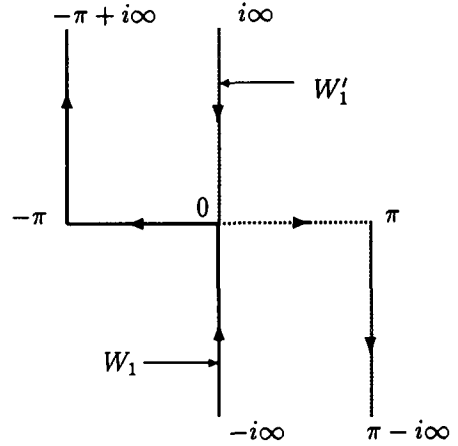


図-5 複素 τ 平面での積分路 W_1 および W_1'

$$\Phi_j(z) = \frac{\hat{\varphi}_j(z) \hat{\varphi}_j(z')^T}{\xi_j \hat{I}_2 + \hat{I}_3}$$

である。 Φ_j は 3×3 の行列であり、ここでは、形式的に次のように成分表示をしておく。

$$\Phi_j = \begin{bmatrix} g_{zz} & g_{zr} & 0 \\ g_{rz} & g_{rr} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

この成分の中の 0 は Love 波成分がゼロとなることに基づいている。同様に、 $\mathbf{A}_j^{(1)}(r, \theta, z)$ および $\mathbf{A}_j^{(2)}(r, \theta, z)$ の成分表示の方法を次のようにしておく。

$$\mathbf{A}_j^{(\tau)}(r, \theta, z) = \begin{bmatrix} \lambda_{(j)11}^{(\tau)} & \lambda_{(j)12}^{(\tau)} & \lambda_{(j)13}^{(\tau)} \\ \lambda_{(j)21}^{(\tau)} & \lambda_{(j)22}^{(\tau)} & \lambda_{(j)23}^{(\tau)} \\ \lambda_{(j)31}^{(\tau)} & \lambda_{(j)32}^{(\tau)} & \lambda_{(j)33}^{(\tau)} \end{bmatrix}, \quad (\tau = 1, 2) \quad (25)$$

このようにして、具体的にこの行列の成分を計算してみる。紙面の都合上、すべてを示すことはできないが、たとえば次のようになる。

$$\lambda_{(j)22}^{(1)} = \frac{1}{\xi_j} \partial_r H_1^{(1)}(\xi_j r) g_{rr} \cos \theta \quad (26)$$

$$\lambda_{(j)22}^{(2)} = \frac{1}{\xi_j^*} \partial_r H_1^{(2)}(\xi_j^* r) g_{rr}^* \cos \theta \quad (27)$$

ここで、Hankel 関数の性質に関する Lemma を証明とともに示す。

Lemma 2 複素変数の第 1 種 Hankel 関数と第 2 種 Hankel 関数の間には次の関係がある。

$$H_\nu^{(1)}(\bar{z}) = \overline{H_\nu^{(2)}(z)} \quad (L.2)$$

ここに、 z は複素変数、 ν は実数、 $\bar{z}$ は z の共役複素数で、この Lemma とその次の証明の中での複素共役の表し方とする。

良く知られるように、実変数を引数に持つ第 1 種 Hankel 関数と第 2 種 Hankel 関数は互いに複素共役の関係があ

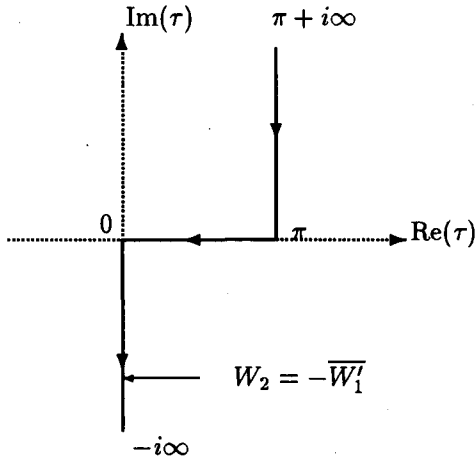


図-6 複素 τ 平面での積分路 $\overline{W_1'}$ および W_2

る。この事実を拡張し、Hankel関数の引数が複素数となる場合のHankel関数の性質を記述したものがこのLemmaである。証明はまずHankel関数の積分表示¹⁵⁾から出発する。

$$H_\nu^{(1)}(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{W_1} \exp(-iz \sin \tau + i\nu \tau) d\tau \quad (28)$$

ここに、積分路 W_1 は図-5に示す。この積分表示で $z \rightarrow \bar{z}$ および $\tau \rightarrow -\tau$ と変数変換を行う。この変数変換によって、次式が得られる。

$$H_\nu^{(1)}(\bar{z}) = \frac{1}{\pi} \int_{W_1'} \exp(i\bar{z} \sin \tau - i\nu \tau) d\tau \quad (29)$$

ただし、積分路 W_1' は図-5に示す。さらに、式の変形を続けて行くことで、求めるべき関係式が得られることになる。

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(\bar{z}) &= \frac{1}{\pi} \int_{W_1'} \overline{\exp(-iz \sin \bar{\tau} + i\nu \bar{\tau})} d\bar{\tau} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{W_1'} \exp(-iz \sin \bar{\tau} + i\nu \bar{\tau}) d\bar{\tau} \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{W_2} \exp(-iz \sin \tau + i\nu \tau) d\tau \\ &= \overline{H_\nu^{(2)}(z)} \end{aligned} \quad (30)$$

ここで最後の関係式は再び文献¹⁵⁾によった。また、積分路 W_2 は図-6に示している。

このLemmaによって、

$$\lambda_{(j)22}^{(1)} = (\lambda_{(j)22}^{(2)})^* \quad (31)$$

の関係が得られる。実は、すべての成分について

$$\lambda_{(j)pq}^{(1)} = (\lambda_{(j)pq}^{(2)})^*, \quad (p, q = 1 \sim 3)$$

となり、次の定理が得られる。

Theorem 3 複素 Rayleigh 波の Green 関数への寄与 $\Lambda(r, \theta, z)$ の虚数部はゼロである。すなわち、

$$\text{Im}\{\Lambda(r, \theta, z)\} = 0 \quad (T.2)$$

これより、複素 Rayleigh 波は、非伝播性の波動となる。

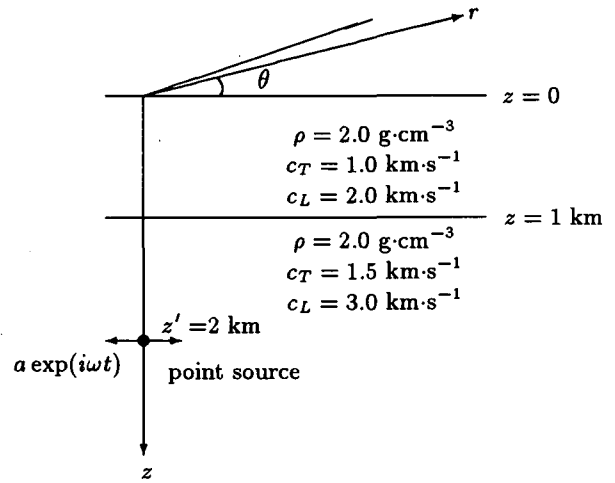


図-7 解析モデル

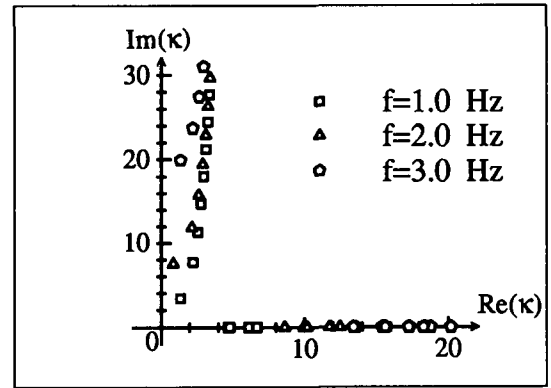
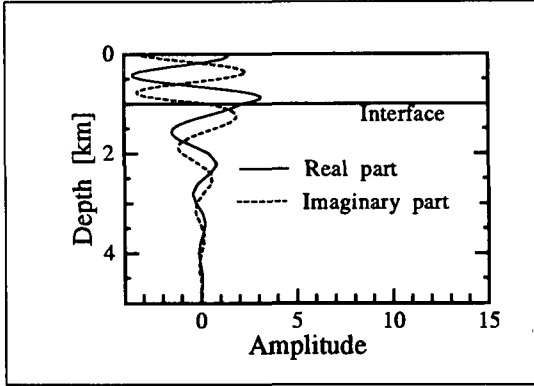


図-8 複素波数平面(permissible sheet)における極の分布

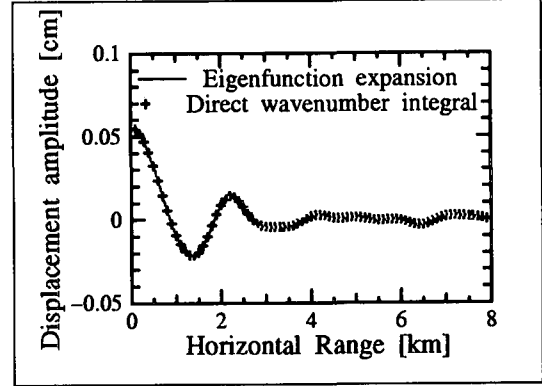
5. 数値計算例

図-7に数値計算のための2層からなる成層弾性波動場の解析モデルを示す。解析モデルでは、表面層の質量密度を $2.0 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ 、P波の速度を $2.0 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ 、S波の速度を $1.0 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ 、表面層厚を 1.0 km とする。また、半無限層の質量密度を表面層と同じ $2.0 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ 、P波とS波の速度を $3.0 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ および $1.5 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ とする。点振源は、地表面から 2.0 km の深さにとり、水平加振を考える。加振力の大きさは、 $1.0 \times 10^7 \text{ kN}$ とし、考慮する振動数は、 1.0 と 2.0 Hz の2種類とする。また、波動場の固有関数および特性方程式は伝達マトリックス法をベースに求めることにする。

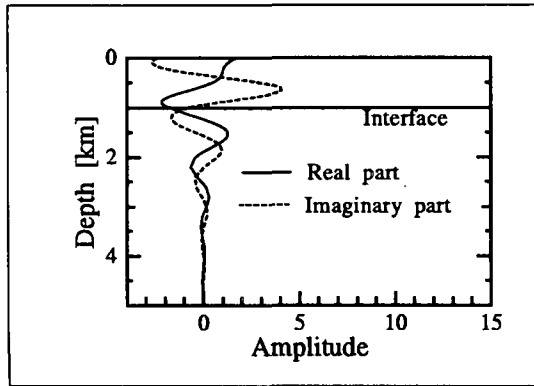
まずはじめに、複素 Rayleigh 極の複素波数平面での分布の様子を示す。図-8に、複素波数平面の第1象限に分布する複素 Rayleigh 極および実軸上の正規モード極の位置を示す。ここでの正規モード極は、通常の bisection 法に従い求め、複素 Rayleigh 極は、次の Newton-Raphson 法のスキームを採用して求めている。



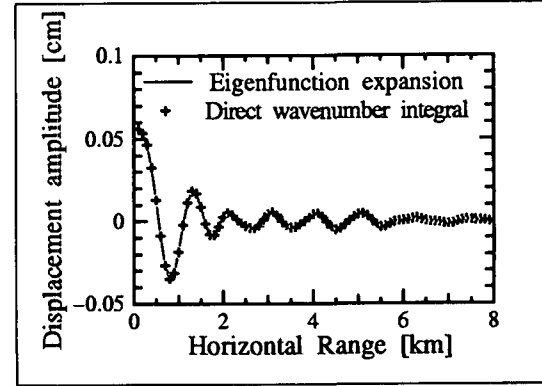
(a) radial component



(a) $f = 1 \text{ Hz}$



(b) vertical component



(b) $f = 2 \text{ Hz}$

図-9 複素 Rayleigh 波のモード形状

$$\kappa_{j+1} = \kappa_j - \frac{F(\kappa_j)}{F'(\kappa_j)}, \quad (j = 1, 2, \dots)$$

ここに、 κ_j は特性方程式 $F(\kappa) = 0$ の近似解である。また、 $F(\kappa)$ の導関数 $F'(\kappa)$ は次式により求めている。

$$F'(\kappa_j) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{F(\kappa)}{(\kappa - \kappa_j)^2} d\kappa$$

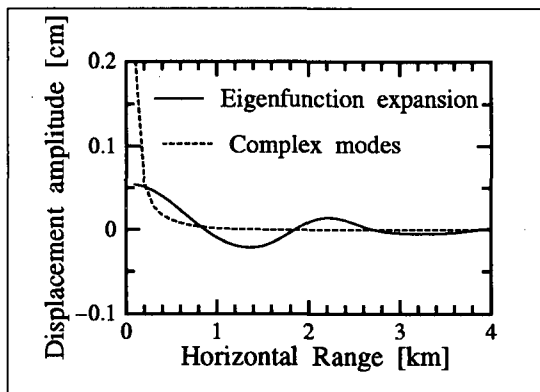
この Newton-Raphson 法で複素数極を求めてみたところ、今回の数値計算に関して言えば、近似解は複素波数の絶対値でおよそ 10 km^{-1} 程度以下のものに収束することが分かった。この収束してゆく波数は初期値の選び方に大きく依存することはなかった。しかし、これより絶対値が大きな極に対しては初期値の選び方によっては、解を見つけることすらできなかった。そこで、この問題に対処するため、特性関数の複素平面上での等高線を描き、あらかじめ複素極の位置を推定するという前処理を行った。この結果、絶対値の大きな複素極も見つけることが可能となった。図-8によれば、複素 Rayleigh 極は虚数軸に沿うように分布している。こ

図-10 直接積分とスペクトル表現による Green 関数の比較

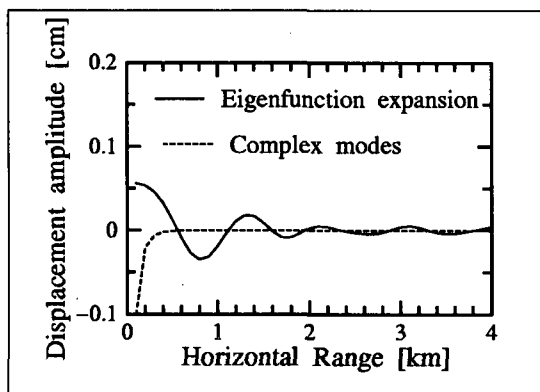
こでは、1Hz から 3Hz の振動数の結果について示しているが、複素 Rayleigh 極は絶対値が大きくなると、振動数によらず、同一の直線上にのってくるようである。

この複素 Rayleigh 波のモード形状を図-9 に示す。この複素 Rayleigh 波は振動数 1 Hz 波数 $k = (0.84 + 7.54i) \text{ km}^{-1}$ に対するものである。これによると、複素 Rayleigh 波のモードは半無限層で振動しながら減衰しており、正規モードの特性とは異なる複素 Rayleigh 波モードの特徴が確認できる。一方で、複素 Rayleigh 波モードの表面層の振幅は半無限層の振幅より大きく、表面層での増幅特性を表すモードであることが分かる。この性質は、正規モードと共通しており、半無限層で大きな振幅を示す連続スペクトルの固有関数¹¹⁾の特徴と一線を画していると言える。

次に、Green 関数のスペクトル表現による結果と、Green 関数を直接波数積分した結果について比較したものを図-10に示す。これらの図の横軸は加振点からの水平距離を示し、その軸の方向は加振力の方向と一致させている。ここでの変位の方向は radial 成分であり、



(a) $f = 1 \text{ Hz}$



(b) $f = 2 \text{ Hz}$

図-11 複素 Rayleigh 波モードの Green 関数への寄与

変位は地表面上のものである。この図より Green 関数のスペクトル表現による結果と直接波数積分の結果はきわめて良い一致を示していることが分かる。これは Green 関数のスペクトル表現の妥当性を数値計算の上で示すばかりでなく、Green 関数のスペクトル表現に、複素 Rayleigh 波のモードと horizontal wavefunction の $k = 0$ の特異性の考慮が必要であることを示している。

最後に Green 関数に寄与する複素 Rayleigh 波の様子を調べるために、Green 関数の値と複素 Rayleigh 波の振幅の比較を図-11 に示す。この図の横軸は、図-10 と同様に加振点からの水平距離であり、軸の方向は加振力の方向と一致させている。この図によると、複素 Rayleigh 波は加振点直上付近で Green 関数の振幅と比して、非常に大きな振幅を示す一方、水平距離の増大によって急激に減衰する。この理由として、式(19)および(21)で r が小さくなると、積分路 M_1 と M_3 に関する積分の収束が遅くなり、周回積分内により多くの複素 Rayleigh 波モードが入り込むことが挙げられる。 $r = 0$ では積分路 M_1 と M_3 に関する積分の収束は見込めず、

複素 Rayleigh 波の振幅は $r = 0$ で発散し、特異性を示す波となる。また、式(23)によれば、複素 Rayleigh 波は、第1種 Hankel 関数と第2種 Hankel 関数による波動の重ね合わせで表現される。時間因子 $\exp(i\omega t)$ の仮定と Hankel 関数の漸近形から、第1種 Hankel 関数は内向きの円筒波を、第2種 Hankel 関数は外向きの円筒波を表す。前述のように、複素 Rayleigh 波は非伝播性の波動であるが、この数値計算によって、内向きの波と外向きの波の重ね合わせで定常波が作られ、振源直上付近で大きな振幅を形成しているという理解がなされることになる。

6. 結論

本論文では、放射条件を満足する複素 Rayleigh 波と Green 関数のスペクトル表現との関係を中心に検討を行った。そして、複素 Rayleigh 波が非伝播性の波動であること、Green 関数の振幅に比べ震源直上付近で非常に大きな振幅を持つことを明らかにした。また、Green 関数がエネルギー積分を介して正規モードに分解される形式がそのまま複素 Rayleigh 波モードに拡張されることも示した。Green 関数のスペクトル表現には、正規モードと分岐線積分からの寄与の他に放射条件を満足する複素 Rayleigh 波モードの寄与と horizontal wavefunction の $k = 0$ の特異性に基づく留数項を加えねばならず、直接的な Hankel 変換に基づく波数積分と比較して相当複雑な形式となる。しかしながら、これらの考慮によって、Green 関数の完全な固有関数展開の形式が得られると言え、直接波数積分を実行した結果とスペクトル表現の結果の数値的な一致を見ることになった。

参考文献

- 1) Fuchs, K and Müller, G.: Computation of synthetic seismograms with the reflectivity method and comparison with observations, *Geophys. J.*, Vol. 23, pp. 417-433, 1971.
- 2) Bouchon, M. and Aki, K.: Discrete wavenumber representation of seismic wave fields. *Bull. Seis. Soc. Am.*, Vol. 67, 259-277, 1977.
- 3) Bouchon, M.: Discrete wavenumber representation of elastic wavefields in three space dimensions, *J. Geophys. Res.*, Vol. 84, pp. 3609-3614, 1979.
- 4) Bouchon, M.: Calculation of complete seismograms for an explosive source in layered medium, *Geophysics*, Vol. 45, pp. 197-203, 1980.
- 5) Bouchon, M.: A simple method to calculate Green's functions for elastic layered media, *Bull. seis. Soc. Am.*, Vol. 71, pp. 959-979, 1981.
- 6) Bouchon, M.: The complete synthesis of seismic crustal phases at regional distances, *J. Geophys. Res.*, Vol. 87, pp. 1735-1741, 1982.
- 7) Harvey, D. J.: Seismogram synthesis using normal mode superposition: the locked mode approximation. *Geophys. J. R. astr. Soc.* Vol. 66, pp. 37-69, 1981.

- 8) Haddon, R. A. W.: Computation of synthetic seismograms in layered earth models using leaky modes, *Bull. Seis. Soc. Am.*, Vol. 74, 1225-1248, 1984.
- 9) Haddon, R. A. W.: Exact evaluation of the response of a layered elastic medium to an explosive point source using leaky modes, *Bull. Seis. Soc. Am.*, Vol. 76, 1755-1775, 1986.
- 10) Haddon, R. A. W.: Response of an oceanic wave guide to an explosive point source using leaky modes, *Bull. Seis. Soc. Am.*, Vol. 77, 1804-1822, 1987.
- 11) 東平光生: 離散および連続スペクトルの固有関数を用いた成層弾性波動場の Green 関数の表現, 土木学会論文集, No.605/I-45, 171 - 185, 1998.
- 12) 東平光生: Hyperfunction の概念による成層弾性波動場の Green 関数の分岐線積分核の分解について, 土木学会論文集, No.640/I-50, 231 - 236, 2000.
- 13) Watson, T.H.: A real frequency, complex wavenumber analysis of leaking modes, *Bull. Seis. Soc. Am.*, **62**, pp. 369-384, 1972.
- 14) Aki, K. and Richards, P.G., *Quantitative Seismology*, Freeman and Company, 1980.
- 15) 寺沢寛一: 自然科学者のための数学概論 (増訂版), 岩波書店, 1982.

(2001 年 4 月 20 日 受付)